Main. U
90m -5,1

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Digitized by Google

<36604423160015

<36604423160015

Bayer. Staatsbibliothek

Digitized by Google

K

Digitized by Google

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung,

angefangen

von

Georg Simon Klügel,

fortgesetzt

von

Carl Brandan Mollweide,

ehemals Professoren der Mathematik zu Halle und Leipzig

und beendigt

von

Johann August Grunert,

Dr. und Professor der Mathematik zu Brandenburg a. d. H.
Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt.

Erste Abtheilung.

Die reine Mathematik.

Fünfter Theil

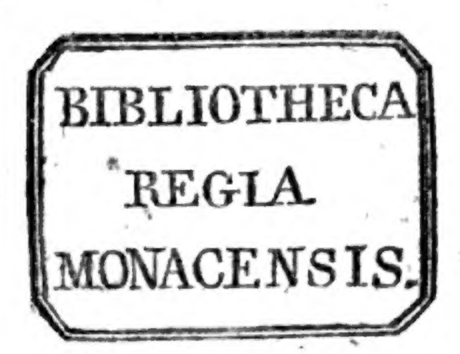
von T bis Z.

Mit acht Kupfertafeln.

Leipzig, 1831.

Bey E. B. Schwickert.

Digitized by Google



Digitized by Google

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung,

angefangen

von

Georg Simon Klügel,

fortgesetzt

von

Carl Brandan Mollweide,
ehemals Professoren der Mathematik zu Halle und Leipzig

und beendigt

von

Johann August Grunert,
Dr. und Professor der Mathematik zu Brandenburg a. d. H.
Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt.

Erste Abtheilung.

Die reine Mathematik.

Fünfter Theil. Erster Band.

T und U.

Leipzig, 1831.
Bey E. B. Schwickert.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorrede.

Ich übergebe hiermit den Freunden des Klügelschen mathematischen Wörterbuchs dessen fünften Theil, mit dem Wunsche, daß die Ausführung der Arbeit der Lust und Liebe, mit welcher sie unternommen wurde, einigermaßen entsprechen, und daß ich nicht zu weit hinter meinen beiden verdienten Vorgängern zurückgeblieben seyn möge. Vorarbeiten habe ich nicht gefunden. Nur über die Artikel Taylor's Lehrsatz, Umkehrung der Reihen, Unendlich und Zahlzeichen hatte der verewigte Klügel noch Einiges aufgesetzt. Aber nur die Notizen über den zuletzt genannten Artikel sind mir bei meiner Arbeit von einigem Nutzen gewesen. Jedoch wird man auch bei diesem Artikel die Zusätze und Erweiterungen von meiner Seite nicht unbemerkt lassen. Bei manchen Artikeln mehr zu geben verbot der beschränkte Raum, und die Auswahl ist mir nicht selten schwer geworden. Mit diesem Bande ist die erste Abtheilung des ganzen Werkes, welche der reinen Mathematik gewidmet ist, zu Ende geführt, und die Verlagshandlung hat mich nun zu-

Digitized by Google

nächst zu einem Bande Nachträge, Ergänzungen und Zusätze, welche durch die vielen Erweiterungen der Mathematik seit 1803, wo der erste Band erschien, nöthig geworden sind, aufgefordert. Ob dann auch die angewandte Mathematik in einer lexicographischen Bearbeitung, zu welcher sich die einzelnen Disciplinen dieser Wissenschaft wohl vorzugsweise eignen, erscheinen wird, muß lediglich von dem Urtheil der Kenner, und von der erhöheten Theilnahme des mathematischen Publicums an der nun vollendeten ersten Abtheilung abhängen, in welcher die wackere Verlagshandlung für das in dieses Werk schon verwandte bedeutende Kapital nur allein einige Entschädigung finden kann.

Möge denn das Werk in seiner so weit vollendeten Gestalt fortfahren, zur immer weitern Verbreitung des so wichtigen mathematischen Studiums beizutragen.

Brandenburg a. H., im September 1830.

Der Verfasser.

Digitized by Google

T.

Tabula foecunda, heißt bei Regiomontan die Tafel der Tangenten. Thl. I. S. 669.

Tabula mirifica, heißt bei einigen ältern Schriftstellern, z. B. in Clavii Geometria pract. Lugd. 1607. 4. p. 278., die Tafel der Binomial-Coefficienten. M. s. diesen Art. (4). Clavius geht bis zur 17ten Potenz, bis zu dem Coefficienten, von welchem an die vorhergehenden wiederkehren.

Tabula pythagorica, ist das sogenannte Einmaleins, dessen Erfindung gewöhnlich dem Pythagoras zugeschrieben wird. Der Name scheint beim Beda (Opp. Colon. 1612. p. 77.) zuerst vorzukommen. Die Tafel selbst haben Nikomachus (Paris. 1538. p. 28.) und Boethius (Basil. 1570. p. 1314.) Der Abacus pythagoricus (s. Abacus) scheint hiervon wesentlich verschieden gewesen, und nur durch eine Verwechslung auch auf das Einmaleins übergetragen zu seyn, worüber Reimer in Bossut's Geschichte der Math. I. Hamb. 1804. S. 31., und Mannert de numerorum, quos arabicos vocant, vera origine pythagorica. Norimb. 1801. zu vergleichen sind.

Tactio, s. Kreis. (78. am Ende).

Tafel, in der Perspectiv. S. diesen Art. (6.)

Tafelgrund, eigentlich Grundlinie der Tafel, ist in der Perspectiv die Durchschnittslinie der Tafel mit der Fundamentalebene.

Tafeln, mathematische, sind 1. Verzeichnisse der, bestimmten numerischen Werthen ihrer veränderlichen Größen entsprechenden, numerischen Werthe gewisser Functionen. Dahin gehören a. die Tafeln der Quadrat- und Cubikzahlen, welche die Werthe der Functionen x^2 und x^3 für $x = 1, 2, 3, 4$, u. s. f. enthalten. b. Die Tafeln der Quadrat- und Cubikwurzeln, welche die Werthe der Functionen $\sqrt{x}$ und $\sqrt[3]{x}$ für dieselben Werthe von x bis zu einer gewissen Gränze enthalten. c. Die Tafeln der Logarithmen für die Functionen log. vulg. x und lognat x, für die natürlichen Zahlenwerthe von x bis zu einer gewissen Gränze. d. Die trigonometrischen Tafeln für die Functionen sin x, cos x, tang x, cot x, in Bezug auf einen bestimmten Radius, und die einzelnen Werthe des Winkels oder Bogens x wenigstens von Minute zu Minute. e. Manche kleinere Tafeln, wie z. B. zur Berechnung der Kreisbögen, als Functionen der zugehörenden Winkel für einen bestimmten Radius, der Binomial-Coefficienten, Bernoullischen Zahlen, u. s. f. f. Tafeln der Werthe verschiedener transcendenten Functionen, wie z. B. des Integrallogarithmus in Soldner Théorie et Tables d'une nouvelle function transcendante. Munic. 1809., der Werthe des Integrals $\int e^{-tt} \partial t$ für bestimmte Werthe von t in Kramp Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Leips. 1798. p. 193., und anderer transcendenten Functionen in Legendre Exercices de calcul intégral. T. III. Paris. 1816. u. dergl.

Alle diese Tafeln sind zur Erleichterung und Abkürzung oft vorkommender Rechnungen bestimmt, indem sie ein für alle Mal berechnet enthalten, was man sonst für jeden einzelnen Fall immer besonders berechnen müßte. Die Einrichtung kann sehr verschieden seyn, ist aber in jedem Falle im Ganzen nur einfach, und gewöhnlich wird darüber den Tafeln selbst eine besondere Einleitung und Anleitung zum Gebrauche vorausgeschickt. Enthält die Function nur eine veränderliche Größe, so daß sie $= \varphi x$; so werden die numerischen Werthe von x in vertikale Reihen geordnet, und die entsprechenden Werthe von φx daneben ge-

setzt. In besondern Fällen können indeß Abkürzungen möglich seyn, wie z. B. bei den gemeinen Logarithmen- und trigonometrischen Tafeln. Gewöhnlich kommen aber diese Abkürzungen darauf zurück, daß öfter wiederkehrende Zahlen nur einmal geschrieben werden. Ist die Function $= \varphi$ (x, y), und enthält also zwei veränderliche Größen; so werden die Werthe von x in eine Vertikalreihe, die Werthe von y in die erste Horizontalreihe gesetzt, und die zweien bestimmten Werthen von x und y entsprechenden Werthe von φ (x, y) in die Punkte geschrieben, wo eine durch den Werth von x gezogene Horizontallinie die durch den Werth von y gezogene Vertikallinie schneidet. Für Functionen dreyer veränderlichen Größen müßte die Einrichtung natürlich zusammengesetzter ausfallen. Solche Tafeln sind aber auch nur von seltnem Gebrauch in der Mathematik, und nur in ganz speciellen Fällen. Jenachdem die Tafeln Functionen mit einer oder mit zwei veränderlichen Größen darstellen, heißen sie Tafeln mit einfachem oder doppeltem Eingang. Gewöhnlich enthalten die Tafeln eine besondere Spalte der Differenzen oder Proportionaltheile, welche zur Erweiterung der Tafel über die ihr ursprünglich gesteckten Gränzen mittelst des Interpolirens oder Einschaltens dienen, worüber dieser Artikel nachzusehen. Die Berechnung der Tafeln erfordert nach der Natur der Function, welche sie darstellen sollen, verschiedene Methoden. Hat man indeß nur erst eine Grundreihe von Werthen der Function berechnet; so lassen sich mittelst der Interpolations-Methoden die übrigen Werthe in die Grundreihe einschalten. Man wird sich von diesen Methoden am besten einen Begriff aus der Berechnung der trigonometrischen Linien im Art. Cyclotechnie (Thl. I. S. 676.) oder aus dem Art. Logarithmus (54), so wie auch aus dem Art. Einschalten verschaffen. Gute allgemeine Bemerkungen über diesen Gegenstand findet man in einer Abhandlung von Olivier in Crelle's Journal der Math. B. 2. H. 3. S. 252. Hier gestattet der Raum keine weitere Ausführung. Ferner enthalten aber

2. mathematische Tafeln auch nur gewisse Verwandlungen und Zerlegungen gewisser Zahlen, ohne eigentlich die Werthe einer Function darzustellen, wohin u. A.

die Factorentafeln in Verbindung mit den Tafeln der Primzahlen (s. Theiler einer Zahl. 10.), die Tafeln zur Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, wie z. B. Schröter (Helmstädt. 1799.) und Wucherer (Carlsruhe. 1795.) geliefert haben, u. dergl. Ueber den Gebrauch der nach Gauß (Monatl. Corresp. November. 1812.) Vorgange von E. A. Matthiessen berechneten Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmus der Summe oder Differenz zweier Größen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind (Altona. 1817.) s. m. Trigonometrie. (14). Indeß hat auch schon Wolf auf Erleichterung solcher Rechnungen gedacht, aber nicht durch Tafeln, sondern nur durch Formeln (Act. Erud. Jun. 1715. Kästners Anal. endl. Größen. 752.).

3. Auch hat man Tafeln, welche zur Erleichterung der Auflösung gewisser unbestimmten Gleichungen dienen, wie z. B. der Canon Pellianus. Auct. C. F. Degen. Hafniae. 1817., welcher für die Werthe der Größe a von 1 bis 1000 die einfachsten Auflösungen der unbestimmten Gleichung $y^2 = ax^2 + 1$ in ganzen Zahlen enthält (s. Unbestimmte Analytik. 46.), und andere Tafeln zur Erleichterung der Rechnungen in der unbestimmten Analytik, vorzüglich in Legendre Théorie des nombres. Paris. 1806., am Ende.

4. Endlich versteht man unter Tafeln auch Sammlungen mathematischer Formeln, deren mehrfache Bearbeitung bei der täglich sich erweiternden Ausdehnung der Analysis sehr zu wünschen ist. Z. B. Sammlungen trigonometrischer Formeln in verschiedenen Werken, besonders Cagnoli Traité de Trig. Paris. 1808., der Integrale entwickelter Functionen in den sogenannten Integraltafeln, deren Meier Hirsch (Berlin. 1810) geliefert, und auch Moth angekündigt hat (Schumachers astron. Nachrichten. 1826. No. 94.). Manche recht brauchbare Tafeln enthalten immer noch Lamberts Zusätze zu den log. und trig. Tabellen. Berlin. 1770.; auch Stöpels Rathgeber bei math. Beschäftigungen. Stendal. 1819. Die sehr vielfältigen Tafeln der angewandten Mathematik, besonders der Astronomie, gehören nicht hierher.

Tangens secunda, s. Cotangente.

Tangente, wird in einer doppelten Bedeutung gebraucht: a. gleichbedeutend mit Berührende Linie (s. diesen Artikel), wo sie also von unbestimmter Länge ist; b. gleichbedeutend mit trigonometrischer Tangente (Goniometrie. 8.), wo sie von bestimmter Länge ist. Die letztere Bedeutung ist in diesem Wörterbuche festgehalten worden.

Ueber die umgekehrte Methode der Berührenden s. Inversa methodus tangentium.

Ueber die trigonometrischen Tangenten vergl. m. Goniometrie, Cyclometrie, Cyclotechnie, und auch Product, da aus den dort entwickelten Producten für sin x und cos x auch leicht ein Product für $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ abgeleitet werden kann. Die Darstellung von tang φ durch einen Kettenbruch s. m. Quadratur. (61.) Eine Darstellung von tang n z durch ein Product von Tangenten giebt Euler in der Introd. in An. inf. I. Cap. 14. §. 254. Die Summirung von Bögen, deren Tangenten nach einem gegebenen Gesetze fortgehen, lehrt nach Eulers Vorgange (Comm. Petrop. T. IX. p. 234. Nov. Comm. T. IX. p. 40—52.) Pfaff in einer scharfsinnigen Abhandlung in seinen Disquisitiones analyticae. Helmst. 1797. Disq. I., auch Einiges schon im Versuch einer neuen Summationsmethode. Berlin. 1788.

Künstliche Tangenten nennt man die Logarithmen der trigonometrischen Tangenten in den trigonometrischen Tafeln.

Linie der Tangenten, s. Proportionalzirkel. (10.)

Tarif, (tarifa), zuweilen für Rechenknecht.

Taun, und Tauntel nennt J. F. C. Werneburg in seiner Teliosadik (s. diesen Artikel) das, was sonst gewöhnlich zwölf und Zwölftel heißt. Die Einführung einer neuen, auf die Dodekadik gegründeten, Rechenkunst im gemeinen Leben beabsichtigend, war natürlich auch die Bildung einer neuen Sprache nöthig, da unsere Zahlwörter sich unmittelbar auf die Dekadik beziehen. Eilf heißt bei ihm

mör, dreizehn taundrei, dreißig dreitaun, u. s. f. Sein Eifer führte ihn zu weit.

Taylor's Lehrsatz, Theorema Taylorianum, ist die analytische Formel, durch welche die aus den Veränderungen ihrer veränderlichen Größen entspringende Veränderung einer Function in eine nach den positiven ganzen Potenzen der Veränderungen der veränderlichen Größen fortschreitende Reihe entwickelt dargestellt wird. Für Functionen mit einer veränderlichen Größe kommt die Formel zuerst in des berühmten brittischen Geometers Brook Taylor Methodus incrementorum directa et inversa. Lond. 1715. Prop. VII. Cor. II. vor. Die Benennung des Satzes nach seinem Erfinder scheint zuerst von L'Huilier in seiner Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs. Berlin, 1786. gebraucht zu seyn, und ist seitdem gewöhnlich geworden. Euler und Kästner gedenken Taylors nicht als Erfinder.

1. Taylor deutet folgenden Weg an, zu dem wichtigen Satze zu gelangen. Sey y irgend eine Function von x, welche in y' übergehe, wenn x in $x + n\Delta x$ übergeht. Setzt man nun (Arithmetische Reihen höherer Ordnungen. 7.) $A = y$, $a = \Delta y$, $b = \Delta^2 y$, $c = \Delta^3 y$, u. s. f., und n für das dortige x; so ist

$$y' = y + \frac{n}{1} \cdot \Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^3 y + \ldots$$
$$= y + \frac{n\Delta x}{1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{n(n-1)\Delta x^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots$$

Denkt man sich nun, daß $n\Delta x$, indem Δx in's Unendliche ab-, n in's Unendliche zunimmt, immer eine constante Größe $= i$ bleibt; so gehen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}, \ldots;$$
$$n\Delta x,\ n(n-1)\Delta x^2,\ n(n-1)(n-2)\Delta x^3, \ldots$$

in ihre Gränzen

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots;$$
$$n\Delta x = i,\ n^2\Delta x^2 = i^2,\ n^3\Delta x^3 = i^3, \ldots$$

über, und man erhält:

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\Delta y = y' - y = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

welches die berühmte Taylorsche Reihe ist.

2. Dieser Beweisart, welche sich auch auf ähnliche Art in Euleri Inst. calculi diff. II. §. 46. ff., so wie auch noch bei Prony im Journal de l'école polytechnique. Cah. 4. p. 544. findet, ist die neuere Analysis wegen Einmischung der Idee vom Unendlichen abhold. Lagrange, die Wichtigkeit der Taylorschen Reihe als Grundlage der Differentialrechnung und Functionentheorie ganz erkennend, suchte sie auf rein analytischem Wege zu begründen (Théorie des fonctions analytiques. Nouv. éd. Paris, 1813. Chap. I. II. Léçons sur le calcul des fonctions. Nouv. éd. Paris, 1806. Léçon II.). Er führt den Beweis auf folgende sehr sinnreiche Art.

3. Sey $fx = y$ irgend eine Function von x. Sie gehe, wenn x sich um i verändert, in $f(x+i) = y'$ über; so soll $f(x+i)$ in eine Reihe nach Potenzen von i entwickelt werden. Da $f(x+i)$ für $i = 0$ wieder in fx übergeht; so muß die gesuchte Reihe nothwendig ein von i unabhängiges Glied, welches $= fx$, enthalten. Folglich wird die Reihe seyn:

$$fx + pi^\alpha + qi^\beta + ri^\gamma + \ldots.$$

Lagrange zeigt nun zuerst, daß kein Exponent von i eine gebrochene, keiner eine negative Zahl seyn kann, so lange nämlich x und i als ganz unbestimmte Größen betrachtet, und ihnen keine bestimmten Werthe beigelegt werden. Unter dieser Voraussetzung haben nämlich fx und $f(x+i)$ offenbar wegen der gleichen Functionszeichen auch gleich viele Werthe. Wäre nun aber auch nur ein Exponent von i, z. B. γ, eine gebrochene Zahl; so hätte ri^γ mehr als einen Werth und die Entwickelung

$$fx + pi^\alpha + qi^\beta + ri^\gamma + \ldots.$$

von $f(x+i)$ würde also, indem man jeden Werth von fx mit jedem einzelnen Werthe von ri^γ verbinden könnte, mehr

Werthe als fx, also auch als f(x+i) haben, welches offenbar ungereimt ist. Wäre aber ein Exponent von i, z. B. γ, negativ; so würde das entsprechende Glied für i=0, folglich auch f(x+i) für i=0, d. i. fx, unendlich, welches aber, so lange x als völlig unbestimmt betrachtet wird, unmöglich ist, und nur für besondere Werthe von x vielleicht eintreten kann. Man ist also nach diesen Betrachtungen berechtigt, zu setzen:

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots,$$

wie in der Folge nun immer geschehen soll. Die wichtigste Einwendung, welche gegen diese Darstellung von Lagrange gemacht werden kann, scheint die zu seyn, daß bei derselben ohne weitern Beweis die Möglichkeit der Entwickelung f(x+i) in die allgemeinere Reihe

$$fx + pi^\alpha + qi^\beta + ri^\gamma + \ldots$$

angenommen wird. Lacroix, in der Einleitung zu seinem großen Werke über höhere Analysis, zeigt die Möglichkeit der Entwickelung in Reihen nach den positiven ganzen Potenzen der veränderlichen Größe für jede Form der Functionen besonders.

4. Zur Bestimmung der Coefficienten p, q, r, s, u. s. f., gelangt nun Lagrange auf folgendem Wege. Setzt man i+k für i; so erhält man, nur die erste Potenz von k beibehaltend, leicht:

$$f(x+i+k) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$$
$$+ (p + 2qi + 3ri^2 + \ldots) k + \ldots$$

Setzt man aber überall x+k für x, und bezeichnet die Zustände, in welche dadurch p, q, r, u. s. f. übergehen, durch

$$p + p'k + \ldots, \quad q + q'k + \ldots, \quad r + r'k + \ldots, \text{ u. s. f.}$$

da dieselben nach dem Obigen von dieser Form seyn müssen; so erhält man, ebenfalls nur die ersten Potenzen von k beibehaltend;

$$f(x+i+k) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$$
$$+ (p + p'i + q'i^2 + r'i^3 + \ldots) k + \ldots$$

Da nun beide Entwickelungen von f(x+i+k) identisch seyn müssen, und für jedes k und i gelten; so muß seyn:

$$p + 2qi + 3ri^2 + 4si^3 + \ldots = p + p'i + q'i^2 + r'i^3 + \ldots$$

für jedes i. Also $2q = p'$, $3r = q'$, $4s = r'$, u. s. f.; $q = \frac{1}{2}p'$, $r = \frac{1}{3}q'$, $s = \frac{1}{4}r'$, u. s. f.

Die Functionen p, q, r, s, u s. f., als Coefficienten der Reihe für $f(x+i)$, sind offenbar von der besondern Beschaffenheit der Function fx abhängig, und können daher als von derselben abgeleitete oder derivirte Functionen betrachtet werden. Nach derselben Art der Derivation aber, nach welcher p von fx abgeleitet wird, werden, wie aus dem Obigen unmittelbar folgt, p', q', r', s', u. s. f. aus p, q, r, s, u. s. f. abgeleitet. Bezeichnet man daher mit Lagrange die erste derivirte Function von fx durch $f'x$; die erste von $f'x$, d. i. die zweite von fx, durch $f''x$; die erste von $f''x$, d. i. die dritte von fx, durch $f'''x$; u. s. f.; so ist nach dem Obigen:

$$p = f'x,\ p' = f''x;\ q = \tfrac{1}{2}p' = \tfrac{1}{2}f''x,\ q' = \tfrac{1}{2}f'''x;$$

$$r = \tfrac{1}{3}q' = \frac{1}{2.3}f'''x,\ r' = \frac{1}{2.3}f^{IV}x;\ s = \tfrac{1}{4}r' = \frac{1}{2.3.4}f^{IV}x,\ s' = \frac{1}{2.3.4}f^{V}x;$$

u. s. f.

weil p' die erste derivirte Function von p, q' die erste von q, u. s. f., ist. Demnach ist also

$$f(x+i) = fx + \frac{i}{1}f'x + \frac{i^2}{1.2}f''x + \frac{i^3}{1.2.3}f'''x + \ldots$$

Es erhellet hieraus, daß die erste derivirte Function einer Function fx, welche die primitive genannt wird, der Coefficient von i in der Entwickelung von $f(x+i)$ ist. Denselben nennt man auch nach den neuern Ansichten den Differentialquotienten von fx, und auf ähnliche Art die zweite, dritte u. s. f. derivirte Function den zweiten, dritten, u. s. f., Differentialquotienten, so daß also

$$fx = y,\ f'x = \frac{\partial y}{\partial x},\ f''x = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ f'''x = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},\ \text{u. s. f.}$$

wobei die Artikel Differenzen-, und Differentialrechnung zu vergleichen sind. Also nach dieser eigentlich nur veränderten Bezeichnung für $f(x+i) = y'$:

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots$$

wie vorher.

5. Setzen wir den Binomischen Lehrsatz für positive ganze Exponenten voraus; so ist $(x+i)^n = x^n + nx^{n-1}i + \ldots$, $\Delta . x^n = (x+i)^n - x^n = nx^{n-1}i + \ldots$; also

$\frac{\partial . x^n}{\partial x} = nx^{n-1}$, nach obiger Erklärung des Differentialquotienten. Man kann nun nach dem Obigen setzen:

$$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$$

wo fx, p, q, r, u. s. f. nur von x abhängen. Bezeichnen wir die Werthe dieser Functionen für $x = o$ durch A, A_1, A_2, A_3, u. s. f.; so ist

$$fi = A + A_1 i + A_2 i^2 + A_3 i^3 + \ldots;$$

also auch für $fx = y$:

$$y = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

Bezeichnet man nun die Binomialcoefficienten der nten Potenz durch $(n_1), (n_2), (n_3), \ldots (n_n)$; so ergiebt sich leicht:

$$y' = A + A_1 (x+i) + A_2 (x^2 + 2xi + i^2) + A_3 (x^3 + 3x^2 i + 3xi^2 + i^3) + \ldots + A_n \{x^n + (n_1) x^{n-1} i + (n_2) x^{n-2} i^2 + \ldots + (n_n) i^n\} + \ldots$$

Die Differentiation giebt:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A_1 + A_2 . (2_1) x + A_3 (3_2) x^2 + \ldots + A_n (n_{n-1}) x^{n-1} + \ldots$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = A_2 . 1 . (2_1) + A_3 . 2 . (3_2) x + A_4 . 3 . (4_3) x^2 + \ldots + A_n . (n-1) . (n_{n-1}) x^{n-2} + \ldots$$

$$= 2 . \{A_2 + A_3 . (3_1) x + A_4 . (4_2) x^2 + \ldots + A_n . (n_{n-2}) x^{n-2} + \ldots\}$$

weil überhaupt

$$m . (n_m) = (n - m + 1) . (n_{m-1})$$

(Binomial-Coefficienten. 8.)
Ferner ist auf ähnliche Art:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2 . \{A_3 . 1 . (3_1) + A_4 . 2 . (4_2) x + \ldots + A_n . (n-2) . (n_{n-2}) x^{n-3} + \ldots\}$$

$$= 2.3 \{A_3 + A_4 . (4_1) x + A_5 . (5_2) x^2 + \ldots + A_n . (n_{n-3}) x^{n-3} + \ldots\}$$

Folglich, wie leicht erhellet, allgemein:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} . \frac{1}{1.2\ldots n} = A_n + A_{n+1} . ((n+1)_1) . x + A_{n+2} . ((n+2)_2) . x^2 + \ldots$$

Der Coefficient von i^n in der Reihe für y' ist aber offenbar

$$= A_n . (n_n) + A^{n+1} ((n+1)_n) . x + A_{n+2} . ((n+2)_n) . x^2 + \ldots$$

$$= A_n + A_{n+1} ((n+1)_1) . x + A_{n+2} . ((n+2)_2) . x^2 + \ldots$$

da überhaupt $(m_n) = (m_k)$ ist, wenn $n + k = m$ ist. Hieraus ergiebt sich also, daß $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} . \frac{1}{1.2\ldots n}$ dem Coefficienten von i^n in der Entwickelung von y' nach Potenzen von i gleich ist. Also ist

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

6. Andere Beweise s. m. außer in den schon angeführten Schriften in Kästners Anal. des Unendl. §. 144—150. L'Huilier Principiorum calculi diff. et int. expositio elem. Tub. 1795. p. 48. J. F. Pfaff Programma inaugurale, in quo peculiarem differentialia investigandi rationem ex theoria functionum deducit. Helmst. 1788. §. XIII., wobei auch Bohnenbergers höhere Anal. Tüb. 1811. S. 36. zu vergleichen. Pfleiderer Dem. theorematis Tayl. Tub. 1789. Beck de theoremate Tayl. Halae, 1791. Kramp Élémens d'Arith. universelle. Cologne, 1808. p. 289. Scherk mathem. Abh. Berlin, 1825. S. 109. Zwei Beweise von Ampère in den Annales de Math. XVI. p. 348. XVII. p. 317., welche auf ganz eigenthümlichen Betrachtungen beruhen, und einer von Poisson in der Corresp. sur l'école polyt. Nr. 3. Ueber D'Alemberts und Cauchy's Beweise unten ein Mehreres. Noch s. m. Bouvier Critique des princip. dém. données jusqu'a ce jour du theorême de Taylor, et Essai d'une dém. rig. du dit theorême. Genève, 1824.

7. Sey nun $y = f(x, x')$ irgend eine Function zweier veränderlichen Größen. Wenn man zuerst x' als constant betrachtet, und die partiellen Differentialquotienten einklammert; so erhält man nach dem Obigen:

$$f(x+i, x') = y + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot \frac{i}{1} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \cdot \frac{i^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) \cdot \frac{i^3}{1.2.3} \cdot + \ldots$$

Nun setze man $x' + i$ für x', und entwickele die veränderten Werthe von y, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$ ꝛc. alle nach der Taylor'schen Reihe für eine veränderliche Größe; so ergiebt sich leicht:

$$\begin{aligned} f(x+i, x'+\mathfrak{i}) = {} & y + \left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right) \cdot \frac{\mathfrak{i}}{1} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x'^2}\right) \cdot \frac{\mathfrak{i}^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x'^3}\right) \cdot \frac{\mathfrak{i}^3}{1.2.3} + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x' \partial x} \cdot \frac{\mathfrak{i}i}{1.1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x'^2 \partial x} \cdot \frac{\mathfrak{i}^2 i}{1.2.1} + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x' \partial x^2} \cdot \frac{\mathfrak{i}i^2}{1.1.2} + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots \end{aligned}$$

Kehrt man nun die Ordnung, in welcher x und x' sich veränderten, um; so erhält man eben so leicht:

$$f(x+i,\, x'+i') =$$
$$y + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\cdot\frac{i}{1} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\cdot\frac{i^2}{1.2} + \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right)\cdot\frac{i'}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial x'}\cdot\frac{ii'}{1.1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^2\,\partial x'}\cdot\frac{i^2 i'}{1.2.1} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x'^2}\right)\cdot\frac{i'^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x\,\partial x'^2}\cdot\frac{ii'^2}{1.1.2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x'^3}\right)\cdot\frac{i'^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Bezeichnen wir nun die nte Classe der Combinationen mit Wiederholungen, wenn man jede Combination in ihre Permutationszahl multiplicirt, durch $[n]\,\underset{n}{C}$; so läßt sich $f(x+i,\, x'+i')$ so darstellen:

$$f(x+i,\, x'+i) =$$
$$y + \frac{\partial y}{1}[1]\,\underset{1}{C} + \frac{\partial^2 y}{1.2}[2]\,\underset{2}{C} + \ldots + \frac{\partial^n y}{1\ldots n}[n]\,\underset{n}{C} + \ldots$$
$$\text{Zeiger}\left[\frac{i}{\partial x},\, \frac{i'}{\partial x'}\right].$$

oder auch, wenn die nte Variationsclasse mit Wiederholungen $= \underset{n}{V}$ gesetzt wird:

$$f(x+i,\, x'+i') =$$
$$y + \frac{\partial y}{1}\underset{1}{V} + \frac{\partial^2 y}{1.2}\underset{2}{V} + \ldots + \frac{\partial^n y}{1\ldots n}\underset{n}{V} + \ldots$$
$$\text{Zeiger}\left[\frac{i}{\partial x},\, \frac{i'}{\partial x}\right].$$

8. Da die beiden obigen Entwickelungen von $f(x+i, x'+i')$ für alle i, i' gelten, und demnach identisch seyn müssen; so erhält man durch Vergleichung der zu einerlei Dimensionen der Größen i, i' gehörenden Gliedern leicht:

$$\frac{\partial^{n+n'} y}{\partial x'^n\, \partial x^{n'}} = \frac{\partial^{n+n'} y}{\partial x^{n'}\, \partial x'^n},$$

d. h. man erhält einerlei Resultat, wenn man eine Function von x, x' zuerst n'mal nach x als veränderlich, und dann nmal nach x', oder zuerst nmal nach x', und dann n'mal nach x differentiirt. Eben so kann man auch bei Functionen mit mehrern veränderlichen Größen die Ordnung der Differentiation nach den einzelnen veränderlichen Größen willkührlich ändern, ohne dadurch eine Aenderung des Resultats zu bewirken. Der Satz gelte für Functionen mit n veränderlichen Größen, und y sey eine Function

mit n + 1 Veränderlichen, deren zwei willkührliche wir durch z, u bezeichnen wollen. Haben die beiden Differentialquotienten die Form $\frac{\partial^m y}{\partial z^p P}$, $\frac{\partial^m y}{\partial z^p P'}$, wo P, P', die Differentiale derselben n veränderlichen Größen, nur in veränderter Ordnung enthalten; so ist nach der Annahme: $\frac{\partial^{m-p} y}{P} = \frac{\partial^{m-p} y}{P'}$, und folglich, wenn man pmal nach z differentiirt, natürlich auch: $\frac{\partial^m y}{\partial z^p P} = \frac{\partial^m y}{\partial z^p P'}$.

Sind die Differentialquotienten aber von der Form: $\frac{\partial^m y}{\partial z^p P}$, $\frac{\partial^m y}{\partial u^q Q}$, wo P, Q nur die Differentiale von n veränderlichen Größen enthalten; so kann man, da der Satz für n veränderliche Größen gilt, setzen:

$$\frac{\partial^m y}{\partial z^p P} = \frac{\partial^m y}{\partial z^p\, du^q P'}, \quad \frac{\partial^m y}{\partial u^q Q} = \frac{\partial^m y}{\partial u^q\, \partial z^p Q'},$$

und folglich, da der Satz für zwei veränderliche Größen gilt, auch $\frac{\partial^m y}{\partial u^q Q} = \frac{\partial^m y}{\partial z^p\, \partial u^q Q'}$, wodurch die beiden gegebenen Differentialquotienten offenbar auf einerlei Form gebracht, und demnach einander gleich sind, der Satz also für Functionen mit n + 1, also einer beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen gilt.

9. Um nun die Gültigkeit der Reihe in 7. für jede Function y, deren n+1 veränderliche Größen $x, \overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots \overset{n}{x}$, sind, zu beweisen, bezeichne man die Function

$$\partial^\alpha y\ [\alpha] \underset{\alpha}{C} \left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial \overset{2}{x}}, \ldots \frac{\overset{n-1}{i}}{\partial \overset{n-1}{x}}\right],$$

wo nur $x, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n-1}{x}$ als veränderlich betrachtet werden, durch $\varphi\alpha$, die Function

$$\partial^\alpha y\ [\alpha]\ \underset{\alpha}{C} \left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial}, \ldots \frac{\overset{n}{i}}{\partial \overset{n}{x}}\right]$$

wo $x, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n}{x}$ als veränderlich betrachtet werden, durch $\varphi'\alpha$; so ist immer

$$\varphi'\alpha = \varphi\alpha + \frac{\partial\varphi\,(\alpha-1)}{\partial \overset{n}{x}} \cdot \frac{\overset{n}{i}.\alpha}{1} + \frac{\partial^2\varphi\,(\alpha-2)}{\partial \overset{n}{x}{}^2} \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^2\alpha\,(\alpha-1)}{1.2} + \ldots \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial^{\alpha-1}\varphi 1}{\partial_x^{n\,\alpha-1}} \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^{\alpha-1}\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1.2\ldots(\alpha-1)} + \frac{\partial^\alpha y}{\partial_x^{n\,\alpha}} \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^{\alpha}.\alpha(\alpha-1)\ldots 1}{1.2\ldots\alpha}.$$

Man denke sich $\varphi'\alpha$ nach Potenzen von $\frac{\overset{n}{i}}{\partial_x^n}$ geordnet. Jedes Glied enthält offenbar $\partial^\alpha y$, und überhaupt ist $\left(\frac{\overset{n}{i}}{\partial_x^n}\right)^{\alpha-k}$ noch in die kte Classe der Combinationen mit Wiederholungen für den Zeiger

$$\left[\frac{i}{\partial x}\ \frac{\overset{1}{i}}{\partial_x^1}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial_x^2}, \ldots \frac{\overset{n-1}{i}}{\partial_x^{n-1}}\right]$$

multiplicirt, wenn nur jedes Glied noch durch seine Permutationszahl vervielfältigt wird. In der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist

$$\frac{\partial^{\alpha-k}\varphi k}{\partial_x^{n\,\alpha-k}} \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^{\alpha-k}.\alpha(\alpha-1)\ldots(k+1)}{1.2\,3\ldots(\alpha-k)}$$

das derselben Potenz von $\frac{\overset{n}{i}}{\partial_x^n}$ entsprechende Glied. Nach der eingeführten Bezeichnung ist

$$\varphi k = \frac{\partial^k y\,[k]\,\underset{k}{C}}{\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial_x^1}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial_x^2}, \ldots \frac{\overset{n-1}{i}}{\partial_x^{n-1}}\right]}$$

und das vorhergehende Glied enthält also, weil φk in demselben $(\alpha-k)$ mal nach $\overset{n}{x}$ differentiirt ist, in allen Theilen auch $\partial^\alpha y$, und die Combinationen der kten Classe ohne Wiederholungen für den obigen Zeiger, jede in eine gewisse bestimmte Zahl multiplicirt. In φk ist jedes Glied in seine Permutationszahl [k] multiplicirt. In dem Gliede

$$\frac{\partial^{\alpha-k}\varphi k}{\partial_x^{n\,\alpha-k}} \cdot \frac{\overset{n}{i}{}^{\alpha-k}\alpha(\alpha-1)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots(\alpha-k)}$$

kommt nun überall noch $\left(\frac{\overset{n}{i}}{\partial_x^n}\right)^{\alpha-k}$ hinzu, so daß also jetzt jeder einzelne Theil dieses Gliedes α Elemente enthält, unter denen immer $\alpha-k$ vorkommen, welche $= \frac{\overset{n}{i}}{\partial_x^n}$ sind. Folglich ist (Versetzungen. 4.) die Permutationszahl überall:

$$[k] \cdot \frac{(k+1)(k+2)\ldots\alpha}{1.2.3\ldots(\alpha-k)} = [k] \cdot \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(k+1)}{1.2.3\ldots(\alpha-k)},$$

woraus sich also ergiebt, daß in

$$\frac{\partial^{\alpha-k}\varphi k}{\partial_{\overset{n}{x}}^{\alpha-k}} \cdot \frac{\overset{n}{i}^{\alpha-k} \cdot \alpha(\alpha-1)\,..\,(k+1)}{1.2.3\,..\,(\alpha-k)}$$

jedes Glied in seine Permutationszahl multiplicirt ist, welches auch bei allen Gliedern von $\varphi'\alpha$ der Fall ist. Aus allem Bisherigen erhellet nun deutlich die Gleichheit der beiden obigen Ausdrücke.

10. Die Reihe in 7. gelte nun für jede Function mit n Veränderlichen; so ist nach der gebrauchten Bezeichnung:

$$f(x+i,\ \overset{1}{x}+\overset{1}{i},\ldots\overset{n-1}{x}+\overset{n-1}{i},\ \overset{n}{x}) = y + \frac{\varphi 1}{1} + \frac{\varphi 2}{1.2} + \frac{\varphi 3}{1.2.3} + \ldots.$$

Hierin setze man überall $\overset{n}{x}+\overset{n}{i}$ für $\overset{n}{x}$, und entwickele die Werthe, welche dadurch y, $\varphi 1$, $\varphi 2$, $\varphi 3$, 2c. erhalten, nach dem Taylorschen Satze für Functionen mit einer veränderlichen Größe in Reihen; so erhält man leicht nach einigen ganz leichten Verwandlungen:

$$f(x+i,\ \overset{1}{x}+\overset{1}{i},\ldots\overset{n}{x}+\overset{n}{i}) =$$

$$y + \frac{1}{1}\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial \overset{n}{x}}\right)\cdot\frac{\overset{n}{i}}{1} + \varphi 1\right\}$$

$$+ \frac{1}{1.2}\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial \overset{n}{x}^2}\right)\cdot\frac{\overset{n}{i}^2.2.1}{1.2} + \left(\frac{\partial \varphi 1}{\partial \overset{n}{x}}\right)\cdot\frac{\overset{n}{i}.2}{1} + \varphi 2\right\}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\left\{\left(\frac{\partial^3 y}{\partial \overset{n}{x}^3}\right)\cdot\frac{\overset{n}{i}^3.3.2.1}{1.2.3} + \left(\frac{\partial^2 \varphi 1}{\partial \overset{n}{x}^2}\right)\cdot\frac{\overset{n}{i}^2.3.2}{1.2} + \left(\frac{\partial \varphi 2}{\partial \overset{n}{x}}\right)\frac{\overset{n}{i}^3.3}{1} + \varphi 3\right\} + \ldots.$$

d. i. nach dem vorher bewiesenen Satze (9.)

$$f(x+i,\ \overset{1}{x}+\overset{1}{i},\ldots\overset{n}{x}+\overset{n}{i}) = y + \frac{\varphi' 1}{1} + \frac{\varphi' 2}{1.2} + \frac{\varphi' 3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$= y + \frac{\partial y}{1}\,[1]\underset{1}{C} + \frac{\partial^2 y}{1.2}\,[2]\underset{2}{C} + \ldots.$$

$$= y + \frac{\partial y}{1}\cdot\underset{1}{V} + \frac{\partial^2 y}{1.2}\underset{2}{V} + \frac{\partial 3 y}{1.2.3}\underset{3}{V} + \ldots$$

$$\left[\frac{i}{\partial x},\ \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}},\ \frac{\overset{2}{i}}{\partial \overset{2}{x}},\ldots\ \frac{\overset{n}{i}}{\partial \overset{n}{x}}\right].$$

Die Reihe gilt also für Functionen mit n + 1 Veränderlichen, wenn sie für Functionen mit n gilt, und ist folglich allgemein, da sie schon für n = 2 bewiesen.

11. Unter dem Differential einer Function mit mehrern veränderlichen Größen versteht man aber bekanntlich das nur die ersten Potenzen der Incremente der veränderlichen Größen enthaltende Glied der Entwickelung von y' nach positiven ganzen Potenzen dieser Incremente, welche nach dem Vorhergehenden immer möglich ist. Es ist also

$$\partial y = \frac{\partial y \,.\, \underset{1}{V}}{\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial \overset{2}{x}}, \ldots \frac{\overset{n}{i}}{\partial \overset{n}{x}}\right]}$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) i + \left(\frac{\partial y}{\partial \overset{1}{x}}\right) \overset{1}{i} + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial \overset{n}{x}}\right) \overset{n}{i}.$$

Differentiirt man, alle Incremente als constant betrachtend, ∂y hiernach von Neuem; so ergiebt sich leicht, daß

$$\partial^2 y = \frac{\partial^2 y \,.\, \underset{2}{V}}{\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial \overset{2}{x}}, \ldots \frac{\overset{n}{i}}{\partial \overset{n}{x}}\right]}$$

Für Variationen mit Wiederholungen ist aber offenbar immer

$$\underset{m+1}{V} = a \underset{m}{V} + b \underset{m}{V} + c \underset{m}{V} + \ldots + n \underset{m}{V},$$

wenn sie sich auf die Elemente a, b, c, ... n beziehen. Sey nun überhaupt

$$\partial^m y = \frac{\partial^m y \,.\, \underset{m}{V}}{\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial \overset{2}{x}}, \ldots \frac{\overset{n}{i}}{\partial \overset{n}{x}}\right]};$$

so geschieht, wenn man nach dem Obigen das erste Differential von $\partial^m y$ nimmt, im Grunde weiter nichts, als daß man alle einzelnen Glieder desselben successive mit

$\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial \overset{2}{x}}, \ldots \frac{\overset{n}{i}}{\partial \overset{n}{x}}$ verbindet, und den Exponenten von ∂ um eins erhöhet, woraus sich also nach obigem Satze von den Variationen ergiebt, daß

$$\partial^{m+1} y = \frac{\partial^{m+1} y \,.\, \underset{m+1}{V}}{\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\partial \overset{1}{x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\partial \overset{2}{x}}, \ldots \frac{\overset{n}{i}}{\partial \overset{n}{x}}\right]}$$

und diese Formel also allgemein gültig ist. Hieraus, in Verbindung mit (10), folgt nun, daß

$$f(x+i, \overset{1}{x}+\overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{x}+\overset{n}{i}) = y + \frac{\partial y}{1} + \frac{\partial^2 y}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3} + \ldots,$$

oder, wenn man, wie dies in der That gewöhnlich geschieht, ∂x, $\partial \overset{1}{x}$, ... $\partial \overset{n}{x}$ überall für i, $\overset{1}{i}$, ... $\overset{n}{i}$ setzt:

$$f(x+\partial x, \overset{1}{x}+\partial \overset{1}{x}, \ldots \overset{n}{x}+\partial \overset{n}{x}) = y + \frac{\partial y}{1} + \frac{\partial^2 y}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3} + \ldots$$

Die Taylorsche Reihe für Functionen mit einer veränderlichen Größe geht für $i = \partial x$ sogleich in diese Form über, und gilt also unter dieser Gestalt für jede Function mit einer willkührlichen Anzahl veränderlicher Größen.

Anwendung auf die Entwickelung der Functionen in Reihen.

12. Setzt man in der Entwickelung von $f(x+i, \overset{1}{x}+\overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{x}+\overset{n}{i})$ überall $x = \overset{1}{x} = \ldots = \overset{n}{x} = 0$; so erhält man $f(i, \overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{i})$ in eine Reihe nach positiven ganzen Potenzen von $i, \overset{1}{i}, \ldots \overset{n}{i}$ entwickelt. Setzt man nun überall x für i; so erhält man $f(x, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n}{x})$ nach eben solchen Potenzen von $x, \overset{1}{x}, \ldots \overset{n}{x}$ entwickelt. Bezeichnet man in Bezug auf eine Function y mit einer veränderlichen Größe die Werthe von y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ... für $x = 0$, durch Y, Y', Y'' rc.; so erhält man auf diese Art:

$$y = Y + Y' . \frac{x}{1} + Y'' . \frac{x^2}{1.2} + Y''' . \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

die sogenannte Maclaurin'sche Reihe, welche bei der Entwickelung der Functionen in Reihen sehr wichtige Dienste leistet.

13. Sey $y = x^n$, und also

$$y' = (x+i)^n = A + Bi + Ci^2 + \ldots,$$
$$(x+i)^{2n} = A^2 + 2ABi + \ldots,$$
$$(x+i)^{n+1} = Ax + (A+Bx)\,i + \ldots$$

Da $(x+i)^n = x^n$ für $i = 0$; so ergiebt sich sogleich $A = x^n$. Setzt man nun B, welches bloß x und n enthalten kann, $= \varphi n$; so ist

$$(x+i)^n = x^n + \varphi n \cdot i + \ldots,$$
$$(x+i)^{2n} = x^{2n} + \varphi 2n \cdot i + \ldots,$$
$$(x+i)^{n+1} = x^{n+1} + \varphi(n+1) \cdot i + \ldots,$$

und folglich nach dem Obigen

$$\varphi 2n = 2x^n \cdot \varphi n, \; \varphi(n+1) = x^n + x \cdot \varphi n.$$

Der Werth von φn für $x = 1$ sey

$$\varphi' n = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \ldots,$$

so daß also

$$\varphi' 2n = \alpha + 2\beta n + 4\gamma n^2 + 8\delta n^3 + \ldots$$

Aber nach dem Obigen $\varphi' 2n = 2\varphi' n$. Also

$$\alpha + 2\beta n + 4\gamma n^2 + 8\delta n^3 + \ldots = 2\alpha + 2\beta n + 2\gamma n^2 + 2\delta n^3 + \ldots$$

für jedes n, woraus sich leicht $\alpha = 0$, $\beta = \beta$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ 2c. ergiebt. Also ist $\varphi' n = \beta n$, $\varphi'(n+1) = \beta(n+1)$. Aber nach dem Obigen $\varphi'(n+1) = 1 + \varphi' n$. Also $\beta(n+1) = 1 + \beta n$, woraus $\beta = 1$, und folglich $\varphi' n = n$. Demnach ist

$$(1+i)^n = 1 + ni + \ldots,$$
$$(x+i)^n = x^n \left\{1+\frac{i}{x}\right\}^n = x^n\left(1 + n\frac{i}{x} + \ldots\right)$$
$$= x^n + nx^{n-1}\, i + \ldots$$

Folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = nx^{n-1}$, und für $y = (1+x)^n$ auch $\frac{\partial y}{\partial x} = n(1+x)^{n-1}$. Entwickelt man nun hieraus nach den ersten Regeln der Differentialrechnung die folgenden Differentialquotienten, und setzt überall $x = 0$; so giebt die Maclaurin'sche Reihe:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots$$

Die Entwickelung des Differentials, unabhängig vom binomischen Lehrsatze, war hier die Hauptsache.

14. Für $y = a^x$ sey

$$y' = a^{x+i} = a^x + \varphi x \cdot i + \ldots,$$
$$a^{2x+i} = a^x(a^{x+i}) = a^{2x} + a^x \varphi x \cdot i + \ldots = a^{2x} + \varphi 2x \cdot i + \ldots.$$

Hieraus erhält man $\varphi 2x = a^x \varphi x$, $\frac{\varphi 2x}{\varphi x} = a^x$. Es fällt aber leicht in die Augen, daß, für irgend eine

Constante k', wenn $\varphi x = k'a^x$ wäre, wirklich immer $\frac{\varphi 2x}{\varphi x} = \frac{k'a^{2x}}{k'a^x} = a^x$ seyn würde. Wäre dies nun nicht der Fall; so sey $\varphi x = k'a^x + \varphi' x$, wo $\varphi' x$ irgend eine Function von x bezeichnet. Dann ist also

$$\frac{k'a^{2x} + \varphi' 2x}{k'a^x + \varphi' x} = a^x,$$

woraus man, wenn mit dem Nenner multiplicirt wird, leicht schließt, daß auch immer $\varphi' 2x = a^x \varphi' x$, $\frac{\varphi' 2x}{\varphi' x} = a^x$, die Function $\varphi' x$ also ganz von derselben Natur wie φx seyn müßte. Man erhielte also:

$$\varphi x - \varphi' x = k'a^x,\ \varphi' x - \varphi'' x = k''a^x,\ \varphi'' x - \varphi''' x = k'''a^x, \text{ u. s. f.}$$

woraus durch Addition

$$(\varphi x + \varphi' x + \varphi'' x + \varphi''' x + \ldots) - (\varphi' x + \varphi'' x + \varphi''' x + \ldots)$$
$$= (k' + k'' + k''' + k'''' + \ldots)\, a^x,$$

d. i. für $k = k' + k'' + k''' + k'''' + \ldots$, wirklich $\varphi x = ka^x$ folgt. Also ist $y' = a^{x+i} = a^x + ka^x . i + \ldots$, und folglich $\frac{\partial a^x}{\partial x} = ka^x$. Hieraus erhält man durch successive Differentiation, und weiter wie oben wie oben nach der Maclaurin'schen Reihe:

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1} + \frac{k^2x^2}{1.2} + \frac{k^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

15. Wird y als Function von x betrachtet; so sey $\frac{\partial y}{\partial x} = p$. Betrachtet man aber x als Function von y; so ist nun $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{p}$. Denn sey

$$\Delta y = pi + p'i^2 + p''i^3 + \ldots,\ \Delta x = qi' + q'i'^2 + q''i'^3 + \ldots,$$

oder für $i = \Delta x$, $i' = \Delta y$:

$$\Delta y = p\Delta x + p'\Delta x^2 + p''\Delta x^3 + \ldots\ \Delta x = q\Delta y + q'\Delta y^2 + q''\Delta y^3 + \ldots$$

Substituirt man nun die zweite Reihe für Δx in der ersten; so erhält man: $\Delta y = pq\Delta y + \ldots$ für jedes Δy. Also $pq = 1$, d. i. $\frac{\partial y}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial y} = 1$, $p\frac{\partial x}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{p}$.

16. Sey nun $a^y = x$; so ist $\partial x = ka^y \partial y$ (14.), $\partial y = \frac{\partial x}{ka^y} = \frac{\partial x}{kx}$. Aber $y = \log x$ für die Basis a. Also $\partial \log x = \frac{\partial x}{kx}$, und demnach $\partial \log (1 + x) = \frac{\partial x}{k(1+x)}$, woraus sich wie vorher

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots)$$

ergiebt. $\frac{1}{k} = M$ heißt der Modulus des Systems, dessen Basis $= a$. Für $M = 1$ heißen die Logarithmen natürliche oder hyperbolische. Also

$$\text{lognat}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots$$

Bezeichnet man ihre Basis durch e; so ist nach (14.) für $k = 1$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$$

Hieraus ferner:

$$e^k = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots,$$

und nach (14.) für $x = 1$:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

Also $a = e^k$, $k = \text{lognat}\, a$;

$$a = 1 + \frac{\text{logn}\, a}{1} + \frac{(\text{logn}\, a)^2}{1.2} + \frac{(\text{logn}\, a)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$x = 1 + \frac{\text{logn}\, x}{1} + \frac{(\text{logn}\, x)^2}{1.2} + \frac{(\text{logn}\, x)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Folglich auch, nach dem Vorhergehenden,

$$\partial a^x = a^x \,\text{logn}\, a . \partial x,\ \partial e^x = e^x \partial x,\ \partial \log x = \frac{\partial x}{x \log na}\ \partial\, \text{logn}\, x = \frac{\partial x}{x}.$$

Man vergleiche den Artikel Logarithmus.

17. Es ist $\sin(x+i) - \sin(x-i) = 2\cos x \sin i$. Da nun $\cos i$ für $i = o$ der Einheit gleich wird, und $\sin i$ verschwindet; so sey

$$\cos i = 1 + Ai + Bi^2 + \ldots,\quad \sin i = ai + bi^2 + \ldots.$$

Hieraus folgt leicht:

$$\sin(x+i) = \sin x + (A \sin x + a \cos x)\, i + \ldots,$$
$$\sin(x-i) = \sin x - (A \sin x + a \cos x)\, i + \ldots,$$
$$\sin(x+i) - \sin(x-i) = 2(A \sin x + a \cos x)\, i + \ldots$$
$$= 2\cos x \sin i = 2a \cos x . i + \ldots$$

Folglich $2(A \sin x + a \cos x) = 2a \cos x$,

$$\sin(x+i) = \sin x + a \cos x . i + \ldots,\ \partial \sin x = a \cos x\, \partial x,$$

wo a eine Constante, die noch einer Bestimmung bedarf.

Aus $\cos x = (1 - \sin x^2)^{\frac{1}{2}}$ folgt mittelst (13.) leicht: $\partial \cos x = - a \sin x\, \partial x$.

Durch successive Differentiation und die Maclaurin'sche Reihe erhält man nun:

$$\sin x = ax - \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \frac{a^5x^5}{1\ldots5} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^4x^4}{1\ldots4} - \ldots,$$

wo nun bloß noch a zu bestimmen. Man nehme zu dem Ende $x < \frac{1}{a}$, d. i. $ax < 1$, und lasse x positiv seyn. Auch a ist positiv; denn, wäre a negativ, $= -\alpha$, so wäre für $\alpha x < 1$, d. i. für jedes positive x, das $< \frac{1}{\alpha}$, augenscheinlich

$$\sin x = -\left(\alpha x - \frac{\alpha^3x^3}{1.2.3}\right) - \left(\frac{\alpha^5x^5}{1\ldots5} - \frac{\alpha^7x^7}{1\ldots7}\right) - \ldots$$

eine negative Größe, welches ungereimt ist. Für $ax < 1$ sind nun offenbar

$$-\frac{a^3x^3}{1.2.3} + \frac{a^5x^5}{1\ldots5}, \; -\frac{a^7x^7}{1\ldots7} + \frac{a^9x^9}{1\ldots9},$$
$$-\frac{a^{11}x^{11}}{1\ldots11} + \frac{a^{13}x^{13}}{1\ldots13}, \text{ u. s. f.}$$

lauter negative, dagegen

$$\frac{a^5x^5}{1\ldots5} - \frac{a^7x^7}{1\ldots7}, \; \frac{a^9x^9}{1\ldots9} - \frac{a^{11}x^{11}}{1\ldots11},$$
$$\frac{a^{13}x^{13}}{1\ldots13} - \frac{a^{15}x^{15}}{1\ldots15}, \text{ u. s. f.}$$

lauter positive Größen. Also immer $\sin x < ax$, $\sin x > ax - \frac{a^3x^3}{1.2.3}$, für alle Werthe von x, für welche $ax < 1$. Da man aber x immer zugleich $< \frac{1}{2}\pi$ nehmen kann; so ist (Archimedes über Kugel und Cylinder, Axiom 1.)

$$\sin x < x, \; \tang x > x; \; \sin x < x, \; \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin x^2}} > x;$$

$$\sin x < x, \; \sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Folglich nach dem Obigen um so mehr:

$$ax > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \; ax - \frac{a^3x^3}{1.2.3} < x;$$

$$a > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \; a - \frac{a^3x^2}{6} < 1.$$

Wäre nun $a < 1$; so könnte man x immer so klein nehmen, daß $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > a$ wäre, weil man zu diesem Behufe, wie aus dieser Vergleichung folgt, bloß $x < \frac{1}{a}\sqrt{1-a}$ zu nehmen brauchte. Nimmt man nun, welches offenbar immer möglich, x so klein, daß den Bedingungen

$$x < \tfrac{1}{2}\pi,\ x < \frac{1}{a},\ x < \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2}$$

zugleich genügt wird; so ist $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > a$, da doch nach dem Obigen dann immer $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < a$ ist. Also kann a nicht < 1 seyn. Wäre $a > 1$; so nehme man x so, daß $a - \frac{a^3x^2}{6} > 1$, welches immer möglich, da zu dem Ende nur $x < \frac{1}{a}\sqrt{\frac{6(a-1)}{a}}$ genommen zu werden braucht. Erfüllt man nun die drey Bedingungen

$$x < \tfrac{1}{2}\pi,\ x < \frac{1}{a},\ x < \frac{1}{a}\sqrt{\frac{6(a-1)}{a}}$$

zugleich, welches offenbar immer möglich ist; so hat man zugleich

$$a - \frac{a^3x^2}{6} < 1,\ a - \frac{a^3x^2}{6} > 1,$$

welches sich widerspricht. Also kann auch a nicht > 1 seyn. Folglich ist $a = 1$, und demnach

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \ldots,$$

für positive x. Für ein negatives x ist $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, woraus leicht erhellet, daß obige Reihen auch für negative Bögen gelten. Also hat man nun auch $\partial \sin x = \cos x \partial x$, $\partial \cos x = -\sin x \partial x$.

18. Da $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist; so erhält man leicht nach einer bekannten Regel $\partial \tan x = \frac{\partial x}{\cos x^2}$. Sey nun $y = \text{Arc.}\tan x$, d. i. $\tan y = x$; so ist

$$\partial \tan y = \partial x = \frac{\partial y}{\cos y^2} = (1 + \tan y^2)\,\partial y,$$

$$\partial x = (1 + x^2)\,\partial \operatorname{Arc.tang} x.$$

Folglich nach (15.)

$$\partial \operatorname{Arc.tang} x = \frac{\partial x}{1 + x^2}.$$

Entwickelt man nun der Leichtigkeit wegen $\frac{\partial x}{1 + x^2}$ in eine Reihe, und sucht die höheren Differentiale; so giebt die Maclaurinsche Reihe, nachdem man in den Differentialquotienten $x = 0$ gesetzt hat:

$$\operatorname{Arc.tang} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$

Man wird aus diesen einfachen Beispielen schon sehen, wie fruchtbar die Maclaurinsche Reihe an Folgerungen, und wie leicht ihre Anwendung auf die Entwickelung der Functionen in Reihen ist.

Anwendung auf die Entwickelung der Differenzen und Summen.

19. Die in (10.) gefundene Reihe läßt sich auch, da $y' - y = \Delta y$ ist, so schreiben:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{1} \cdot \underset{1}{v} + \frac{\partial^2 y}{1.2} \underset{2}{v} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3} \underset{3}{v} + \ldots$$

oder, wenn man y gewissermaßen als Factor absondert, und bei der Multiplication sich nur genau an die Verbindung erinnert, in welcher es mit dem Differentialzeichen steht, auch so:

$$\Delta y = \left\{ \frac{\partial}{1} \underset{1}{v} + \frac{\partial^2}{1.2} \underset{2}{v} + \frac{\partial^3}{1.2.3} \underset{3}{v} + \ldots \right\} y,$$

immer für den Zeiger:

$$\left[\frac{i}{\partial x}, \frac{\overset{1}{i}}{\overset{1}{\partial x}}, \frac{\overset{2}{i}}{\overset{2}{\partial x}}, \ldots \frac{\overset{n}{i}}{\overset{n}{\partial x}} \right].$$

Nun erhellet aber augenblicklich ohne weitere Erläuterung, daß immer

$$\underset{k}{v} = \left(\frac{i}{\partial x} + \frac{\overset{1}{i}}{\overset{1}{\partial x}} + \ldots + \frac{\overset{n}{i}}{\overset{n}{\partial x}} \right)^k = \mathfrak{B}^k,$$

und folglich

$$\Delta y = \left\{ \frac{\mathfrak{B}\partial}{1} + \frac{\mathfrak{B}^2\partial^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}^3\partial^3}{1.2.3} + \ldots \right\} y,$$

d. i. nach 16.

$$\Delta y = \left\{ e^{\mathfrak{B}\partial} - 1 \right\} y,$$

$$\Delta y = \left\{ e^{i\frac{\partial}{\partial x} + \overset{1}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{x}} + \overset{2}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}} + \ldots} - 1 \right\} y$$

ist, wobei man sich bei der Entwickelung an die Bedeutung der Verbindung zwischen y und den scheinbaren Potenzen von ∂ zu erinnern hat.

Für Functionen mit einer veränderlichen Größe, wenn man zugleich $i = \Delta x$ setzt, erhält man hieraus

$$\Delta y = \left\{ e^{\Delta x \frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right\} y = e^{\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x} - 1 .$$

20. Wir wollen nun einmal setzen, daß $\Delta^m y$ durch eine Reihe von der Form

$$A\partial^m y + B\partial^{m+1} y + C\partial^{m+2} y + \ldots$$

dargestellt werden könne, wo A, B, C, D ꝛc. bloß von m abhängige Größen sind; so folgt aus

$$\Delta^{m+1} y = \Delta(\Delta^m y) = \frac{\partial\Delta^m y}{1} + \frac{\partial^2\Delta^m y}{1.2} + \frac{\partial^3\Delta^m y}{1.2.3} + \ldots \quad (11.)$$

mittelst obiger Voraussetzung leicht:

$$\begin{aligned} \Delta^{m+1} y = & \frac{1}{1}\left\{ A\partial^{m+1} y + B\partial^{m+2} y + C\partial^{m+3} y + \ldots \right\} \\ & + \frac{1}{1.2}\left\{ A\partial^{m+2} y + B\partial^{m+3} y + C\partial^{m+4} y + \ldots \right\} \\ & + \frac{1}{1.2.3}\left\{ A\partial^{m+3} y + B\partial^{m+4} y + C\partial^{m+5} y + \ldots \right\} + \ldots\ldots \\ = & \; A'\partial^{m+1} y + B'\partial^{m+2} y + C'\partial^{m+3} y + \ldots \end{aligned}$$

eine Reihe von ganz ähnlicher Form. Da nun Δy diese Form immer wirklich hat (11.); so hat sie auch $\Delta^m y$. Die Reihe für $\Delta^{m+1} y$ läßt sich aber auch so darstellen:

$$\Delta^{m+1} y = \left(\begin{aligned} & \left\{ A\partial^m + B\partial^{m+1} + C\partial^{m+2} + \ldots \right\} \frac{\partial}{1} \\ + & \left\{ A\partial^m + B\partial^{m+1} + C\partial^{m+2} + \ldots \right\} \frac{\partial^2}{1.2} \\ + & \left\{ A\partial^m + B\partial^{m+1} + C\partial^{m+2} + \ldots \right\} \frac{\partial^3}{1.2.3} \\ + & \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right) y$$

nach ähnlichen Principien wie vorher; dieß giebt:

$$\Delta^{m+1}y = \left\{A\partial^m + B\partial^{m+1} + C\partial^{m+2} + ..\right\} \times \left\{\frac{\partial}{1} + \frac{\partial^2}{1.2} + \frac{\partial^3}{1.2.3} + \ldots\right\} y$$

woraus leicht:

$$\Delta^{m+1}y = \frac{\Delta^m y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y$$

folgt. Nun war aber (19.), wenn wir

$$i\frac{\partial}{\partial x} + \overset{1}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{x}} + \ldots + \overset{n}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{n}{x}} = N$$

setzen:

$$\Delta y = (e^N - 1)\, y. \text{ Also}$$

$$\Delta^2 y = \frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y = \left(e^N - 1\right)^2 y,$$

$$\Delta^3 y = \frac{\Delta^2 y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y = \left(e^N - 1\right)^3 y,$$

$$\Delta^4 y = \frac{\Delta^3 y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y = \left(e^N - 1\right)^4 y, \text{ u. s. f.}$$

und folglich allgemein:

$$\Delta^m y = \left\{e^{i\frac{\partial}{\partial x}} + e^{\overset{1}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{x}}} + e^{\overset{2}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}} + \ldots - 1\right\}^m y.$$

21. Die partiellen Differenzen von y, in Bezug auf x, $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$, ꝛc. allein als veränderlich, bezeichne man durch $\Delta_x y$, $\Delta_{\overset{1}{x}} y$, $\Delta_{\overset{2}{x}} y$, ꝛc. und die Werthe von y, wenn n+1, n, n—1, n—2, n—3, ꝛc., veränderliche Größen dieser Function eine Veränderung erlitten haben, durch y', y'', y''', y'''', ꝛc. Läßt man nun y'' sich nach $\overset{n}{x}$ verändern; so ist offenbar

$$y' = y'' + \Delta_{\overset{n}{x}} y'',$$

oder, wenn man sich y'' abgesondert denkt, da diese Betrachtung offenbar auch auf die übrigen Werthe von y anwendbar ist:

$$y' = \left(1 + \Delta_{\overset{n}{x}}\right) y'',\ y'' = \left(1 + \Delta_{\overset{n-1}{x}}\right) y''',\ y''' = \left(1 + \Delta_{\overset{n-2}{x}}\right) y'''',$$

$$\ldots\ldots,\ y^{(n+1)} = \left(1 + \Delta_x\right) y,$$

da $y^{(n+1)}$ der Werth von y ist, wenn sich nur x verändert. Durch successive Substitution erhält man hieraus:

$$y' = \left(1 + \Delta_{\frac{n}{x}}\right)\left(1 + \Delta_{\frac{n-1}{x}}\right) \cdots \left(1 + \Delta_x\right) y,$$

oder, da die Ordnung, in welcher man die veränderlichen Größen sich verändern läßt, offenbar ganz willkührlich ist, auch

$$y' = \left(1 + \Delta_x\right)\left(1 + \Delta_{\frac{1}{x}}\right) \cdots \left(1 + \Delta_{\frac{n}{x}}\right) y = y + \Delta y,$$

$$\Delta y = \left\{\left(1 + \Delta_x\right)\left(1 + \Delta_{\frac{1}{x}}\right)\left(1 + \Delta_{\frac{2}{x}}\right) \cdots - 1\right\} y = Py.$$

Folglich erhält man nach (20.)

$$\Delta^2 y = \frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y = P^2 y,$$

$$\Delta^3 y = \frac{\Delta^2 y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y = P^3 y,$$

$$\Delta^4 y = \frac{\Delta^3 y}{y} \cdot \frac{\Delta y}{y} \cdot y = P^4 y, \text{ ꝛc.}$$

Also überhaupt;

$$\Delta^m y = \left\{\left(1 + \Delta_x\right)\left(1 + \Delta_{\frac{1}{x}}\right)\left(1 + \Delta_{\frac{2}{x}}\right) \cdots - 1\right\}^m y$$

22. Setzt man in $y = fx$ nach und nach immer $x + i$ für x; so erhält man, successive, Ausdrücke für $f(x+i)$, $f(x+2i)$, $f(x+3i)$ ꝛc. durch die Differenzen von y. Das leicht zu bemerkende allgemeine Gesetz ist;

$$f(x+ni) = y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 y + \ldots$$

Nach dem Taylor'schen Satze ist aber:

$$f(x+ni) = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{ni}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{n^2 i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{n^3 i^3}{1.2.3} + \ldots$$

Beide Entwickelungen müssen identisch, die zu einerlei Potenzen von n gehörenden Glieder also einander gleich seyn. Dies giebt, wenn man die der ersten Potenz entsprechenden Glieder nimmt:

$$i \frac{\partial y}{\partial x} = \Delta y - \tfrac{1}{2} \Delta^2 y + \tfrac{1}{3} \Delta^3 y - \tfrac{1}{4} \Delta^4 y + \ldots$$
$$= \left\{\Delta - \tfrac{1}{2} \Delta^2 + \tfrac{1}{3} \Delta^3 - \tfrac{1}{4} \Delta^4 + \ldots\right\} y,$$

d. i. nach (16.)

$$i \frac{\partial y}{\partial x} = \left\{\log\text{nat}\,(1 + \Delta)\right\} y.$$

Sey nun überhaupt

$$i^m \frac{\partial^m y}{\partial x^m} = p;$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$i^{m+1}\frac{\partial^{m+1}y}{\partial x^{m+1}} = i\frac{\partial p}{\partial x} = \{\log nat(1+\Delta)\}\, p.$$

Folglich erhält man nach und nach:

$$i\frac{\partial y}{\partial x} = \{\log nat(1+\Delta)\}\, y = p,$$

$$i^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \{\log nat(1+\Delta)\}\, p = \{\log nat(1+\Delta)\}^2 y = p',$$

$$i^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \{\log nat(1+\Delta)\}\, p' = \{\log nat(1+\Delta)\}^3 y = p'', \quad \text{rc.}$$

woraus sich leicht ergiebt, daß überhaupt:

$$i^m\frac{\partial^m y}{\partial x^m} = \{\log nat(1+\Delta)\}^m y.$$

Ist nun y eine Function mehrerer veränderlichen Größen; so ist:

$$i^m\frac{\partial^m y}{\partial x^m} = \left\{\log nat\left(1+\Delta_{x}\right)\right\}^m y$$

$$\overset{1}{i}{}^m\frac{\partial^m y}{\partial \overset{1}{x}{}^m} = \left\{\log nat\left(1+\Delta_{\overset{1}{x}}\right)\right\}^m y$$

$$\overset{2}{i}{}^m\frac{\partial^m y}{\partial \overset{2}{x}{}^m} = \left\{\log nat\left(1+\Delta_{\overset{2}{x}}\right)\right\}^m y \quad \text{rc. rc.}$$

Also für $m = 1$, wenn man zugleich auf beiden Seiten addirt:

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial x}+\overset{1}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{x}}+\overset{2}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}+\ldots\right\} y$$

$$= \left\{\log nat\left[\left(1+\Delta_{x}\right)\left(1+\Delta_{\overset{1}{x}}\right)\left(1+\Delta_{\overset{2}{x}}\right)\cdots\right]\right\} y.$$

Aber nach (11.) und (21.)

$$\left\{i\frac{\partial}{\partial x}+\overset{1}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{1}{x}}+\overset{2}{i}\frac{\partial}{\partial \overset{2}{x}}+\ldots\right\} y = \partial y,$$

$$\left(1+\Delta_{x}\right)\left(1+\Delta_{\overset{1}{x}}\right)\left(1+\Delta_{\overset{2}{x}}\right)\ldots = 1+\Delta.$$

Also

$$\partial y = \{\log nat(1+\Delta)\}\, y.$$

Ist nun wieder überhaupt $\partial^m y = p$ so ist $\partial^{m+1}y = \partial p$; also nach der vorigen Formel:

$$\partial^{m+1}y = \{\log nat(1+\Delta)\}\, p,$$

und folglich successive:

$$\partial y = \{\log \text{nat.} (1 + \Delta)\} \, y = p,$$

$$\partial^2 y = \{\log \text{nat} (1 + \Delta)\} \, p = \{\log \text{nat} (1 + \Delta)\}^2 y = p',$$

$$\partial^3 y = \{\log \text{nat} (1 + \Delta)\} \, p' = \{\log \text{nat} (1 + \Delta)\}^3 y = p'',$$

u. s. f. u. s. f.

woraus man schließt, daß allgemein für Functionen mehrerer veränderlichen Größen:

$$\partial^m y = \{\log \text{nat} (1 + \Delta)\}^m y.$$

23. Es giebt ähnliche Formeln für die Summen (Differenzenrechnung. 70. 71.), deren Grundformel bekanntlich

$$\Sigma^m \Delta^m z = z$$

ist. Nach (20.) ist:

$$\Delta^m z = A\partial^m z + B\partial^{m+1} z + C\partial^{m+2} z + \ldots$$

wo A, B, C, 2c nur von m abhängen. Folglich, wenn man Σ^m nimmt:

$$z = A\Sigma^m \partial^m z + B\Sigma^m \partial^{m+1} z + C\Sigma^m \partial^{m+2} z + \ldots$$

Man setze nun:

$$\frac{\partial^m z}{\partial x^m} = y, \; \partial^m z = y\partial x^m, \; z = \int^m y\partial x^m.$$

Bezeichnet man ∂x durch i, so ist

$$\partial^m z = i^m \frac{\partial^m z}{\partial x^m} = i^m y,$$

$$\partial^{m+1} z = i^{m+1} \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m+1}} = i^{m+1} \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\partial^{m+2} z = i^{m+2} \frac{\partial^{m+2} z}{\partial x^{m+2}} = i^{m+2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ 2c. 2c.}$$

Folglich

$$\int^m y\partial x^m = Ai^m \Sigma^m y + Bi^{m+1} \Sigma^m \frac{\partial y}{\partial x} + Ci^{m+2} \Sigma^m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots$$

$$\Sigma^m y = \frac{1}{Ai^m} \int^m y\partial x^m - \frac{B}{A} i\Sigma^m \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{C}{A} i^2 \Sigma^m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \ldots$$

$$= \frac{\mathfrak{A}}{i^m} \int^m y\partial x^m + \mathfrak{B} i\Sigma^m \frac{\partial y}{\partial x} + \mathfrak{C} i^2 \Sigma^m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots,$$

Setzt man nun für y nach und nach $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, 2c.; so erhält man hieraus:

$$\Sigma^m \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{i^m} \int^{m-1} y \partial x^{m-1} + \overset{1}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots$$

$$\Sigma^m \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\overset{2}{\mathfrak{A}}}{i^m} \int^{m-2} y \partial x^{m-2} + \overset{2}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma^m \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} = \frac{\overset{m-1}{\mathfrak{A}}}{i^m} \int y \partial x + \overset{m-1}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^m y}{\partial x^m} + \ldots$$

$$\Sigma^m \frac{\partial^m y}{\partial x^m} = \frac{\overset{m}{\mathfrak{A}}}{i^m} y + \overset{m}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^{m+1} y}{\partial x^{m+1}} + \ldots$$

$$\Sigma^m \frac{\partial^{m+1} y}{\partial x^{m+1}} = \frac{\overset{m+1}{\mathfrak{A}}}{i^m} \frac{\partial y}{\partial x} + \overset{m+1}{\mathfrak{B}} i \Sigma^m \frac{\partial^{m+2} y}{\partial x^{m+2}} + \ldots \quad \text{etc. etc.}$$

Nach gehöriger Substitution dieser Ausdrücke in die obige Reihe für $\Sigma^m y$ erhält man eine Reihe von folgender Form:

$$\Sigma^m y = \frac{A_1}{i^m} \int^m y \partial x^m + \frac{A_2}{i^{m-1}} \int^{m-1} y \partial x^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_m}{i} \int y \partial x + A_{m+1} y + A_{m+2} i \frac{\partial y}{\partial x} + \ldots$$

Setzt man nun $y = e^x$; so erhält man nach (16.) leicht $\partial^m y = y \partial x^m$. Also $y = e^x = \int^m y \partial x^m$. Auch ist

$$\Delta e^x = e^{x+i} - e^x = e^x (e^i - 1),$$

$$e^x = \frac{\Delta e^x}{e^i - 1}, \quad \Sigma e^x = \frac{e^x}{e^i - 1}, \quad \Sigma^m e^x = \frac{e^x}{(e^i - 1)^m}.$$

Substituirt man nun diese Ausdrücke in die obige Reihe für $\Sigma^m y$, und hebt durch e^x auf; so wird

$$\frac{1}{(e^i - 1)^m} = \frac{A_1}{i^m} + \frac{A_2}{i^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{i}$$
$$+ A_{m+1} + A_{m+2} i + A_{m+3} i^2 + \ldots$$

Folglich auch nach ähnlichen Betrachtungen wie früher:

$$\left\{ e^{i \frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right\}^{-m} y =$$

$$\frac{A_1}{i^m \frac{\partial^m y}{\partial x^m}} + \frac{A_2}{i^{m-1} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}}} + \ldots + \frac{A_m}{i \frac{\partial y}{\partial x}}$$
$$+ A_{m+1} y + A_{m+2} i \frac{\partial y}{\partial x} + A_{m+3} i^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots$$
$$= \frac{A_1}{i^m} \frac{\partial^{-m} y}{\partial x^{-m}} + \frac{A_2}{i^{m-1}} \frac{\partial^{-(m-1)} y}{\partial x^{-(m-1)}} + \ldots + \frac{A_m}{i} \frac{\partial^{-1} y}{\partial x^{-1}}$$
$$+ A_{m+1} y + A_{m+2} i \frac{\partial y}{\partial x} + A_{m+3} i^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \ldots$$

Vergleicht man Dies mit der Reihe für $\Sigma^m y$; so schließt man leicht, daß

$$\Sigma^m y = \left\{ e^{i\frac{\partial}{\partial x}} - 1 \right\}^{-m} y,$$

wenn man nur überhaupt für $\frac{\partial^{-p} y}{\partial x^{-p}}$, d. h. wenn negative Exponenten vorkommen, $\int^p y \partial x^p$ setzt, oder bloß ∂^{-p} in $\int^p$ verwandelt.

24. Aus der für $\Sigma^m y$ vorher gefundenen Formel erhält man leicht

$$\frac{1}{i^m} \int^m y \partial x^m = \mathfrak{A}_1 \Sigma^m y + \frac{\mathfrak{A}_2}{i^{m-1}} \int^{m-1} y \partial x^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\mathfrak{A}_m}{i} \int y \partial x + \mathfrak{A}_{m+1} y + \mathfrak{A}_{m+2}\, i \frac{\partial y}{\partial x} + \ldots$$

woraus unmittelbar ähnliche Reihen für $\frac{1}{i^{m-1}} \int^{m-1} y \partial x^{m-1}$ bis $\frac{1}{i} \int y \partial x$ folgen. Ferner erhält man aus (22.)

$$i \frac{\partial y}{\partial x} = \mathfrak{P}_1 \Delta y + \mathfrak{P}_2 \Delta^2 y + \mathfrak{P}_3 \Delta^3 y + \ldots$$
$$i^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mathfrak{Q}_1 \Delta^2 y + \mathfrak{Q}_2 \Delta^3 y + \mathfrak{Q}_3 \Delta^4 y + \ldots \text{ 2c. 2c.}$$

Nach gehöriger Substitution erhält man für $\frac{1}{i^m} \int^m y \partial x^m$ eine Reihe von folgender Form:

$$A' \Sigma^m y + B' \Sigma^{m-1} y + \ldots + M' \Sigma y + N' y + O' \Delta y + P' \Delta^2 y + \ldots.$$

Setzt man nun wieder $y = e^x$; so ergiebt sich, da

$$\Delta^m e^x = e^x (e^i - 1)^m$$

ist, ganz wie vorher:

$$\frac{1}{i^m} = \frac{A'}{(e^i-1)^m} + \frac{B'}{(e^i-1)^{m-1}} + \ldots + \frac{M'}{e^i-1}$$
$$+ N' + O'(e^i-1) + P'(e^i-1)^2 + \ldots$$

Da nun $i = \text{lognat}\, e^i = \text{lognat}\,(1 + e^i - 1)$ ist; so ist für $e^i - 1 = \Delta$:

$$\frac{1}{i^m} = \left\{ \text{lognat}\,(1+\Delta) \right\}^{-m}$$
$$= A' \Delta^{-m} + B' \Delta^{-(m-1)} + \ldots + M' \Delta^{-1} + N' + O' \Delta + P' \Delta^2 + \ldots$$

Dies, mit $\frac{1}{i^m} \int^m y \partial x^m$ verglichen, giebt:

$$\frac{1}{i^m} \int^m y \partial x^m = \left\{ \text{lognat}\,(1+\Delta) \right\}^{-m} y,$$

wenn nur für Δ^{-p} immer Σ^p gesetzt wird.

25. Die Ausdehnung der hier für die Summen entwickelten Formeln auf Functionen mit mehrern Veränderlichen gestattet der Raum nicht. Schon Leibnitz hat die Bemerkung gemacht, daß das nte Differential des Productes xyz ... der Potenz $(\partial x + \partial y + \partial z + \ldots)^n$ gleich sey, wenn man nur in der Entwickelung dieses Polynoms die Exponenten der Potenzen von ∂x, ∂y, ∂z, ꝛc. dem Zeichen ∂ beifügt, und x, y, z, ꝛc. statt $\partial^0 x$, $\partial^0 y$, $\partial^0 z$, ꝛc. schreibt. Diese Idee hat sodann Lagrange weiter verfolgt, in einer schönen Abhandlung in den Mém. de Berlin 1772., und den größten Theil der hier entwickelten merkwürdigen Formeln verdankt man seinem Scharfsinne. Später hat Laplace diese Untersuchung noch mehr erweitert, und alles aus einer gemeinschaftlichen Quelle, der Theorie seiner fonctions génératrices, abgeleitet, worüber vorzüglich seine Théorie analytique des probabilités. 3. éd. Paris 1820. Chap. I. II. Part. I. nachzusehen ist. Von den Arbeiten anderer Geometer über diesen Gegenstand heben wir nur noch eine Abhandlung von Brinkley (Philos. Trans. 1807.) heraus. Auch s. m. Lacroix Traité du calc. diff. et int. T. III. p. 60. ff. p. 100. ff.

Gränzen der Taylor'schen Reihe.

26. Sey $y = fx$, $y' = f(x+i)$. Man differentiire, x als constant betrachtend, y' nach i, und setze

$$\frac{\partial^n y'}{\partial i^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + P;$$

so ist, da $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ kein i enthält:

$$\frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} = \frac{\partial P}{\partial i}, \; \partial P = \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i; \; P = \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i + \text{Const};$$

$$\frac{\partial^n y'}{\partial i^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i + \text{Const}.$$

Es ist aber, weil x als constant betrachtet wird:

$$\frac{\partial^n y'}{\partial i^n} = \frac{\partial^n f(x+i)}{(\partial(x+i))^n} = \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)',$$

so daß also $\frac{\partial^n y'}{\partial i^n}$ für $i = 0$ in $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ übergeht. Bestimmt

man also das Integral so, daß es für $i = 0$ verschwindet; so wird $Const = 0$, und man erhält:

$$\frac{\partial^n y'}{\partial i^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i.$$

Hieraus erhält man nach und nach:

$$\int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i = -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \frac{\partial^n y'}{\partial i^n}$$

$$\int \partial i \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i = -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i}{1} + \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

$$\int \partial i \int \partial i \int \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i = -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \int \partial i \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{r+1}{\int} \partial i \overset{r}{\int} \cdots \overset{1}{\int} \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i = -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^r}{1 \ldots r} + \overset{r}{\int} \partial i \overset{r-1}{\int} \cdots \overset{1}{\int} \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i \text{ etc.}$$

alle Integrale so bestimmt, daß sie für $i = 0$ verschwinden. Betrachtet man nun in $\int^r \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r$, wo der Exponent am Integralzeichen die Anzahl der aufeinander folgenden Integrationen bezeichnet, bei der 1ten, 2ten, 3ten, ... (r—1)ten, rten Integration, r—1, r—2, r—3, ... 1, kein ∂i als constant, und bestimmt jedes Integral so, daß es für $i = 0$ verschwindet; so ist

$$\int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r = \partial i^{r-1} \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

$$\int^2 \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r = \partial i^{r-2} \int \partial i \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

$$\int^3 \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r = \partial i^{r-3} \int \partial i \int \partial i \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int^r \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r = \overset{r}{\int} \partial i \overset{r-1}{\int} \cdots \overset{1}{\int} \partial i \int \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i$$

so daß also

$$\int^{r+1} \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i \overset{r+1}{=} -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^r}{1..r} + \int^r \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^r.$$

Für $r = n$ ist also:

$$\int^{n+1} \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i \overset{n+1}{=} -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1..n} + \int^n \frac{\partial^n y'}{\partial i^n} \partial i^n$$

$$= -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1..n} - \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} \cdot \frac{i^{n-1}}{1..(n-1)} + \int^{n-1} \frac{\partial^{n-1} y'}{\partial i^{n-1}} \partial i^{n-1}$$

$$= -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1..n} - \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} \cdot \frac{i^{n-1}}{1..(n-1)} + \cdots - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \int \frac{\partial y'}{\partial i} \partial i$$

$$= -\frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1..n} - \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} \cdot \frac{i^{n-1}}{1..(n-1)} \cdots - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} - y + y'$$

weil $-y + y'$ wirklich der Werth von $\int \frac{\partial y'}{\partial i} \partial i = \int \partial y' = y'$ ist, welcher für $i = 0$ verschwindet. Es ist also

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1 \cdot 2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1 \ldots n} + \int^{n+1} \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} \partial i^{n+1}$$

Dieses Verfahren hat zuerst D'Alembert (Récherches sur différens points importans du systême du monde. T. I. p. 50. Auch s. m. in diesem Wörterbuche D'Alemberts Lehrsatz.) gebraucht, den Taylor'schen Lehrsatz zu beweisen, ohne jedoch Taylors als Erfinder zu gedenken. Auch Cauchy (Résumé des leçons données à l'école polyt. sur le calcul infinitesimal. T. I. Paris. 1823. p. 145.) trägt den Satz erst spät in der Integralrechnung vor, seinen Ansichten über die Analysis des Unendlichen gemäß. Die wichtigste Anwendung von D'Alemberts Idee hat aber Lagrange gemacht.

27. Es ist nämlich (Thl. II. S. 783.) überhaupt: $\int PQ\partial x = P\int Q\partial x - \int \partial P \int Q\partial x$. Folglich, wenn X irgend eine Function von x ist:

$$\int X\partial x = \int X\partial x;\ \int^2 X\partial x^2 = \int \partial x \int X\partial x = x\int X\partial x - \int xX\partial x,$$
$$\int^3 X\partial x^3 = \int \partial x \int^2 X\partial x^2 = \int x\partial x \int X\partial x - \int \partial x \int xX\partial x$$
$$= \tfrac{1}{2} x^2 \int X\partial x - \tfrac{1}{2}\int Xx^2\partial x - x\int xX\partial x + \int Xx^2\partial x$$
$$= \frac{1}{1 \cdot 2} \left\{ x^2 \int X\partial x - 2x\int Xx\partial x + \int Xx^2\partial x \right\}$$

Geht man auf diese Art weiter; so ergiebt sich leicht allgemein:

$$\int^{n+1} X\partial x^{n+1} = \frac{1}{1 \ldots n} \left\{ x^n \int X\partial x - \frac{n}{1} x^{n-1} \int Xx\partial x \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \int Xx^2\partial x + \ldots\ldots \mp \frac{n}{1} x\int Xx^{n-1}\partial x \pm \int Xx^n\partial x \right\}$$

Nimmt man alle Integrale auf der rechten Seite so, daß sie für $x = 0$ verschwinden; so ist das vielfache Integral auf der linken Seite auf gleiche Art bestimmt.

28. Für $\int^{n+1} \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial i^{n+1}} = A$ erhält man hieraus:

$$\int^{n+1} A\partial i^{n+1} = \frac{1}{1 \ldots n} \left\{ i^n \int A\partial i - \frac{n}{1} i^{n-1} \int Ai\partial i \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} i^{n-2} \int Ai^2\partial i + \ldots\ldots \mp \frac{n}{1} i\int Ai^{n-1}\partial i \pm \int Ai^n\partial i \right\}$$

Bedeutet aber Θ eine constante Größe, so ergiebt sich mittelst Entwickelung der Potenz nach dem binomischen Lehrsatze leicht:

$$\int A(\Theta - i)^n \partial i = \Theta^n \int A\partial i - \frac{n}{1}\Theta^{n-1} \pm \int Ai\partial i$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\Theta^{n-2}\int Ai^2\partial i + \ldots\ldots\ldots \mp \frac{n}{1}\Theta\int Ai^{n-1}\partial i \int Ai^n\partial i$$

Also $\int^{n+1} A\partial i^{n+1} = \frac{1}{1\ldots n}\int A(\Theta - i)^n\partial i$, vorausgesetzt, daß man das Integral auf der rechten Seite so bestimmt, daß es für $i = o$ verschwindet, und nach der Integration überall i für Θ setzt.

Jenachdem man aber x oder i als constant betrachtet, ist immer:

$$\frac{\partial^{n+1}y'}{\partial i^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1}f(x+i)}{(\partial(x+i))^{n+1}},\ \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1}f(x+i)}{(\partial(x+i))^{n+1}},$$

d. i. $\frac{\partial^{n+1}y'}{\partial i^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}$, und folglich

$$\int^{n+1} A\partial i^{n+1} = \frac{1.}{1..n}\int \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}(\Theta - i)^n\partial i,$$

das Integral wie oben genommen.

Ferner setze man $\Theta - i = z\Theta$, $i = \Theta(1 - z)$, $\partial i = -\Theta\partial z$; so ist

$$\int^{n+1} A\partial i^{n+1} = -\frac{1}{1\ldots n}\Theta^{n+1}\int \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}} z^n\partial z,$$

das Integral so genommen, daß es für $i = o$, d. i. $z = 1$, verschwindet, und dann überall i für Θ, d. i. $z = \frac{i-i}{i} = o$, gesetzt, d. h. das Integral von $z = 1$ bis $z = o$ genommen. Sind nun $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ zwey Werthe unsers Integrals, so beschaffen, daß $\varphi(1) = o$, $\varphi(o) = B$; $\psi(o) = o$, $\psi(1) = B'$; so ist $\psi(z) = \varphi(z) + C$, $\psi(o) = \varphi(o) + C$, $\psi(1) = \varphi(1) + C$; und folglich, wenn man subtrahirt: $\psi(o) - \psi(1) = \varphi(o) - \varphi(1)$, $-\psi(1) = \varphi(o)$, $-B' = B$, $-B = B'$. Folglich nach der bei den neuesten französischen Schriftstellern gewöhnlichen Bezeichnung der bestimmten Integrale:

$$-\int_1^o \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}} z^n\partial z = \int_o^1 \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}} z^n\partial z$$

Folglich hat man:

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \cdot \frac{i^n}{1..n} + \frac{i^{n+1}}{1...n} \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial z.$$

Für das in dem Differentialquotienten vorkommende i muß man vor der Integration überall $\Theta(1-z)$, und nach der Integration für Θ überall i setzen. Bei der Integration ist x als constant zu betrachten.

Aus der Vergleichung mit der unbegränzten Taylor'schen Reihe folgt leicht:

$$\frac{i^{n+1}}{1...n} \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial z = \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} \cdot \frac{i^{n+1}}{1..(n+1)}$$
$$+ \frac{\partial^{n+2} y}{\partial x^{n+2}} \cdot \frac{i^{n+2}}{1..(n+2)} + \frac{\partial^{n+3} y}{\partial x^{n+3}} \cdot \frac{i^{n+3}}{1..(n+3)} + \ldots$$

wodurch wir also zugleich zur Summirung einzelner Theile der Taylor'schen Reihe gelangt sind; das Integral ist immer wie vorher zu nehmen.

29. Für die Anwendung der Taylor'schen Reihe auf Geometrie und Mechanik sind die vorigen Untersuchungen sehr wichtig, weil sie zugleich zu dem wichtigen Satze führen, daß die Summe aller Glieder dieser Reihe von irgend einem Gliede an bis in's Unendliche durch Verkleinerung des Increments i kleiner gemacht werden kann als jede gegebene Größe. Um den Beweis völlig deutlich und streng führen zu können, halten wir folgende einleitende Betrachtung für nöthig.

30. In irgend einer Function X von x gebe man dem x zwei Werthe a und b, und suche die Summe aller in diesem Intervalle von a bis b liegenden Werthe von X zu bestimmen. Zu dem Ende theile man b — a in n gleiche Theile, deren jeder $= i$; so sind die den Endpuncten dieser einzelnen Theile von b bis a entsprechenden Werthe von X:

$$X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} - \ldots,$$
$$X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{2i}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{2^2 . i^2}{1.2} - \ldots,$$
$$X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{3i}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{3^2 . i^2}{1.2} - \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{ni}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{n^2 . i^2}{1.2} - \ldots;$$

wenn man überall b für x setzt. Die Summen der Werthe von X in den einzelnen kleinen Intervallen sind, mit desto mehr Genauigkeit, je kleiner i ist:

$$i \left\{ X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} - \ldots \right\},$$

$$i \left\{ X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{2i}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{2^2 . i^2}{1.2} - \ldots \right\},$$

$$i \left\{ X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{3i}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{3^2 . i^2}{1.2} - \ldots \right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$i \left\{ X - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{ni}{1} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{n^2 . i^2}{1.2} - \ldots \right\};$$

für $x = b$.

Folglich nach der bekannten Form der Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen (Potenz. 29. ff.), wenn die Zeichen (.) überhaupt bestimmte von n unabhängige Coefficienten bezeichnen, nach einigen leichten Verwandlungen, die Summe aller Werthe von X in dem Intervall von $x = a$ bis $x = b$:

$$X . ni - \frac{\partial X}{\partial x} \left\{ \frac{1}{1.2} (ni)^2 + (.)(ni) i \right\}$$

$$+ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{1.2.3} (ni)^3 + (.)(ni)^2 . i + (.)(ni) i^2 \right\}$$

$$- \ldots\ldots\ldots$$

$$= X . \frac{b-a}{1} - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{(b-a)^2}{1.2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{(b-a)^3}{1.2.3} - \ldots + Pi$$

wo Pi irgend eine für $i = 0$ verschwindende Function von i bezeichnet. Ueberall muß $x = b$ gesetzt werden, und die Summation gilt mit desto mehr Genauigkeit, je kleiner i ist. Um zu völliger Genauigkeit überzugehen, muß man $i = 0$ setzen. Dies giebt die Summe aller Werthe vou X von $x = a$ bis $X = b$:

$$X . \frac{b-a}{1} - \frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{(b-a)^2}{1.2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot \frac{(b-a)^3}{1.2.3} - \ldots$$

für $x = b$.

Für $\int X \partial x = y$ ist:

$$X = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \text{ etc.}$$

Die Werthe von y für $x = a$ und $x = b$ bezeichne man

durch y_a, y_b; so ist, wenn man $x - (x - a) = a$ für x, nach der Taylor'schen Reihe setzt:

$$y_a = y - X.\frac{x-a}{1} + \frac{\partial X}{\partial x}.\frac{(x-a)^2}{1.2} - \ldots$$

und folglich. wenn man $x = b$ setzt:

$$y_b - y_a = X.\frac{b-a}{1} - \frac{\partial X}{\partial x}.\frac{(b-a)^2}{1.2} + \ldots$$

Also ist die Summe aller Werthe von X, in dem Intervall von $x = a$ bis $x = b$, $= y_b - y_a = \int_a^b X\partial x$, da $y_b - y_a$ offenbar diesem bestimmten Integral gleich ist.

31. Nehmen wir nun im Folgenden immer bloß auf die absoluten Werthe der Größen Rücksicht, und seyen M', m' der größte und kleinste Werth von X in dem Intervall von $x = a$ bis $x = b$; so ist gewiß immer

$$\int_a^b X\partial x < (b-a)\,M',$$

und, wenn X in dem angegebenen Intervall sein Zeichen nicht ändert:

$$\int_a^b X\partial x > (b-a)\,m'.$$

Aendere nun in dem Intervall $z = o$ bis $z = 1$, d. i. wegen $i = \Theta(1 - z)$, und weil i für Θ gesetzt wird, von $i = i$ bis $i = o$, $\frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}$ wegen der Kleinheit von i sein Zeichen nicht, und seyen M', m' der größte und kleinste Werth dieses Differentialquotienten im angegebenen Intervall; so ist klar, daß

$$\int_0^1 \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}\,z^n\partial z < \int_0^1 M'z^n\partial z, < \frac{M'}{n+1};$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}\,z^n\partial z > \int_0^1 m'z^n\partial z, > \frac{m'}{n+1};$$

wo natürlich M', m' als constante Größen zu betrachten sind.

Folglich sind nach dem Obigen

$$y + \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{i}{1} + \ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}.\frac{i^n}{1\ldots n} \pm \frac{M'i^{n+1}}{1\ldots(n+1)},$$

$$y + \frac{\partial y}{\partial x}.\frac{i}{1} + \ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}.\frac{i^n}{1\ldots n} \pm \frac{m'i^{n+1}}{1\ldots(n+1)},$$

zwei Gränzen von y', die desto näher an einander fallen, je kleiner i ist. Sind, jetzt mit Berücksichtigung der Vorzeichen, M, m der größte und kleinste Werth von

$\frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}$ in dem Intervall von i = i bis i = o; so ergiebt sich hieraus unmittelbar, daß

$$y' < y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\cdot\frac{i^n}{1..n} + \frac{Mi^{n+1}}{1..(n+1)}$$

$$y' > y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \ldots + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\cdot\frac{i^n}{1..n} + \frac{mi^{n+1}}{1..(n+1)}$$

32. Berücksichtigt man nun wieder bloß die positiven Werthe; so folgt hieraus auch, daß

$$\frac{M'i^{n+1}}{1..(n+1)} > \frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}}\cdot\frac{i^{n+1}}{1..(n+1)} + \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\cdot\frac{i^n}{1..n} + \ldots$$

Nun nehme man, welches, wegen der Stetigkeit der Function in kleinen Intervallen, offenbar immer möglich ist, i so klein, daß $\frac{\partial^{n+1}y'}{\partial x^{n+1}}$ zwischen i und o entweder immer zu- oder abnimmt, oder sich immer gleich bleibt, und bezeichne den größten Werth dieses Differentialquotienten in diesem Intervall durch M″, und den entsprechenden Werth von i durch i′, irgend eine noch so kleine Größe aber durch ν; so kann man offenbar zu gleicher Zeit

$$i < i',\ i < \sqrt[n+1]{\frac{1\ldots(n+1).\nu}{M''}};$$

$$\text{d. i. } i < i',\ \frac{i^{n+1}M''}{1\ldots(n+1)} < \nu$$

nehmen. Da nun in dem Intervall zwischen i′ und o obiger Differentialquotient immer zu- oder abnimmt, oder sich immer gleich bleibt, und i, welchem M′ entspricht, < i′ ist; so ist offenbar immer M′ < M″.

$$\text{Also } \frac{M'i^{n+1}}{1\ldots(n+1)} < \frac{M''i^{n+1}}{1\ldots(n+1)}$$

und man kann folglich um so mehr i immer so klein nehmen, daß $\frac{M'i^{n+1}}{1\ldots(n+1)}$, also auch

$$\frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}}\cdot\frac{i^{n+1}}{1..(n+1)} + \frac{\partial^{n+2}y}{\partial x^{n+2}}\cdot\frac{i^{n+2}}{1..(n+2)} + \ldots$$

kleiner als jede gegebene Größe ν wird.

Setzt man $\nu = \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, wo man $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ als eine gegebene Größe annimmt; so erhellet, daß i, welches immer ein echter Bruch seyn kann, jederzeit so klein angenommen werden kann, daß

$$\frac{\partial^{n+1}y}{\partial x^{n+1}}\cdot\frac{i^{n+1}}{1..(n+1)} + \ldots < \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\cdot\frac{i^n}{1..n},$$

d. h. man kann i immer so klein annehmen, daß die Summe aller Glieder der Taylorschen Reihe von einem gewissen Gliede an bis in's Unendliche kleiner ist, als das diesem Gliede voraufgehende Glied. M. s. Lagrange Théorie des fonctions. p. 54., und Léçons sur le calcul des fonctions. p. 88 Lacroix Traité du calc. diff. etc. I. p. 380. III. p. 396., und Traité élém. du calc. diff. etc. éd. 2. p. 596.; zwei Abhandlungen von Ampère im Journal de l'école polyt. Cah. XIII., und den Annales de Math. XVII. p. 317.; Récherche sur la sommation des termes de la série de Taylor par Hippolyte Vernier. Annales de Math. XV. p. 165., wo das bestimmte Integral noch weiter entwickelt ist; die schon oben (26.) angeführte Schrift von Cauchy, und Bohnenbergers höhere Analysis. Tüb. 1811. S. 38.

33. Um ein Beispiel zu geben, sey $y = a^x$; also $y' = a^{x+i}$; so ergiebt sich leicht

$$\frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} = a^{x+i} (\log n\, a)^{n+1}$$

Der größte und kleinste Werth in dem Intervall $i = i$ bis $i = o$ sind offenbar

$$a^{x+i} (\log n\, a)^{n+1},\ a^x (\log n\, a)^{n+1},$$

und folglich die Gränzen der Glieder vom $(n+2)$ten an in der Reihe für a^{x+i}:

$$\frac{a^{x+i} (i \log n\, a)^{n+1}}{1 \ldots (n+1)},\ \frac{a^x (i \log n\, a)^{n+1}}{1 \ldots (n+1)}$$

Wollte man den Werth der Summe dieser Glieder selbst finden; so müßte man

$$\int_0^1 \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial z$$

nach den Vorschriften in (28.) bestimmen. Es ist aber

$$\frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial z = a^x k^{n+1} . a^{\Theta(1-z)} z^n \partial z$$

für $\log n\, a = k$. Nun erhält man leicht nach der Formel

$$\int PQ\partial x = P\int Q\partial x - \int \partial P \int Q \partial x:$$

$$\int a^{\Theta(1-z)} z^n \partial z = \frac{1}{n+1} a^{\Theta(1-z)} z^{n+1} + \frac{k\Theta}{n+1} \int a^{\Theta(1-z)} z^{n+1} \partial z$$

woraus sich leicht ergiebt, wenn man zugleich n für n+1 setzt:

$$\int a^{\Theta(1-z)} z^n \partial z = -\frac{1}{k\Theta} a^{\Theta(1-z)} z^n + \frac{n}{k\Theta} \int a^{\Theta(1-z)} z^{n-1} \partial z$$

$$= -a^{\Theta(1-z)} \left\{ \frac{z^n}{k\Theta} + \frac{nz^{n-1}}{(k\Theta)^2} + \frac{n(n-1)z^{n-2}}{(k\Theta)^3} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.z}{(k\Theta)^n} + \frac{n(n-1)\ldots 1}{(k\Theta)^{n+1}} \right\}$$

Nimmt man nun dieses Integral von $z = 0$ bis $z = 1$, und setzt i für Θ; so erhält man:

$$\frac{i^{n+1}}{1\ldots n} \int_0^1 \frac{\partial^{n+1} y'}{\partial x^{n+1}} z^n \partial z$$

$$= \frac{a^x (ki)^{n+1}}{1\ldots .n} \left\{ \frac{n(n-1)\ldots 1.(a^i - 1)}{(ki)^{n+1}} - \frac{1}{ki} - \frac{n}{(ki)^2} - \frac{n(n-1)}{(ki)^3} - \ldots \right.$$

$$\left. \ldots - \frac{n(n-1)\ldots 2}{(ki)^n} \right\}$$

$$= a^x \left\{ a^i - 1 - \frac{ki}{1} - \frac{(ki)^2}{1.2} - \frac{(ki)^3}{1.2.3} - \ldots\ldots - \frac{(ki)^n}{1\ldots .n} \right\}$$

welches auch aus der bekannten Reihe für a^{x+i} unmittelbar folgt.

Für $y = x^m$ sind die Gränzen:

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)} (x+i)^{m-n-1} i^{n+1}, \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)} x^{m-n-1} i^{n+1},$$

und eben so in andern Fällen.

Anomalien der Taylor'schen Reihe.

34 So lange x eine völlig unbestimmte Größe bleibt, kann $f(x+i)$ immer in einer Reihe nach den positiven ganzen Potenzen von i entwickelt werden (3). Legt man aber dem x bestimmte Werthe bei, so können hiervon Abweichungen statt finden, wie z. B. in den Functionen $\cot(x+i)$ und $\log(x+i)$ für $x = 0$ (Cyclometrie. 15. Logarithmus. 23.). Ist nämlich x unter Wurzelzeichen in der gegebenen Function enthalten; so kann es kommen, daß, indem man $a+i$ für x setzt, die Constanten der Function das a aufheben, und so i unter den Wurzelzeichen bleibt, wodurch gebrochene Potenzen von i entstehen. Eben so können negative Potenzen von i entstehen, wenn x sich in einem Nenner befindet, und die Constanten der Function

den bestimmten Werth a destruiren. Ist z. B. $y = \sqrt{x} + \sqrt{(x-a)^4}$; so erhält man für $x = a + i$:

$$y' = \sqrt{a} + \frac{i}{2\sqrt{a}} + i^{\frac{4}{3}} - \frac{i^2}{8\sqrt{a^3}} \cdots$$

Für $y = b \pm \sqrt{x-a}$ ist:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \tfrac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp \tfrac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}},\ \text{rc.}$$

Also

$$y' = b + (x-a)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{i}{1} - \tfrac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \cdots$$

$$y' = b - (x-a)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{i}{1} + \tfrac{1}{4}(x-a)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{i^2}{1.2} - \cdots$$

Für $x = a$ reduciren sich diese beiden Werthe von y' auf b, so daß also $b \pm \sqrt{i} = b$ seyn müßte, wenn y' für $x = a$ die Form

$$y + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots.$$

beibehielte. Die französischen Schriftsteller bedienen sich in dergleichen Fällen gewöhnlich des Ausdrucks, die Taylor'sche Reihe sey en défaut. Indeß hat schon Lacroix auf die Unrichtigkeit dieses Ausdrucks aufmerksam gemacht, indem es vielmehr als ein Vorzug der Analysis zu betrachten ist, daß sie die Fälle, wo gewisse Formeln einer Ausnahme unterworfen sind, selbst anzeige, so wie denn hier in der That die Taylor'sche Reihe selbst andeutet, daß für den bestimmten Werth $x = a$ die Entwickelung von $f(x+i)$ nach den positiven ganzen Potenzen von i unmöglich ist. Eine vollständige Ausführung dieser Untersuchungen, wie sie bey Lagrange Théorie des fonctions. Chap. 5., und Lacroix Traité du calcul diff. etc. I. Chap. 3. zu finden ist, gestattet hier der Raum nicht, so daß wir uns auf folgende wenige Bemerkungen beschränken müssen.

35. Enthält $f(a+i) = y_1$ negative Potenzen von i; so ist fa, d. i. fx für $x = a$, $= \infty$, woraus umgekehrt sich schließen läßt, daß $f(a+i)$ negative Potenzen von i enthalten wird, wenn $fa = \infty$. Differentiirt man y_1 nach i; so werden auch offenbar alle Differentialquotienten negative Potenzen von i enthalten, und demnach für $i = 0$ unendlich werden. Nun ist aber

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots$$
$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots$$
$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots$$
ꝛc. ꝛc.
$$\frac{\partial y'}{\partial i} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots$$
$$\frac{\partial^2 y'}{\partial i^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots$$
ꝛc. ꝛc.

Also
$$\frac{\partial^n y'}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y'}{\partial i^n}.$$
Folglich $\frac{\partial^n y'}{\partial i^n}$ für $x = a$ und $i = o$, d. i. $\frac{\partial^n y_1}{\partial i^n}$ für $i = o$, $= \frac{\partial^n y'}{\partial x^n}$ für $x = a$ und $i = o$, d. i. $= \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ für $x = a$.

Also ist, wenn fx für $x = a$ unendlich wird, nach dem Obigen auch $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \infty$ für $x = a$, und die Taylor'sche Reihe liefert in diesem Falle für $f(a + i)$ gar kein brauchbares Resultat, wie u. A. die Entwickelung von $\cot(x + i)$ für $x = o$ zeigt, da $\cot x$ für $x = o$ unendlich ist.

36. Enthält die Reihe für $f(a + i)$ gebrochene Potenzen von i; so sey
$$f(a+i) = A + Bi + \ldots + Li^l + Mi^m + \ldots$$
und m der kleinste gebrochene Exponent, so daß $m > l$, aber $m < l + 1$ ist. Differentiirt man nach i; so ergiebt sich:
$$\frac{\partial y_1}{\partial i} = B + 2Ci + \ldots + lLi^{l-1} + mMi^{m-1} + \ldots$$
$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial i^2} = 2C + 2.3Di + \ldots + l(l-1)Li^{l-2} + m(m-1)Mi^{m-2} + \ldots$$
$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial i^3} = 2.3D + \ldots + l(l-1)(l-2)Li^{l-3} + m(m-1)(m-2)Mi^{m-3} + \ldots$$
ꝛc. ꝛc.

Also für $i = o$:
$$fa = A, \frac{\partial y_1}{\partial i} = B, \frac{\partial^2 y_1}{\partial i^2} = 2C,$$
$$\frac{\partial^3 y_1}{\partial i^3} = 2.3D, \text{ ꝛc. } \frac{\partial^l y_1}{\partial i^l} = 2.3 \ldots lL;$$
d. i. nach (35.) für $x = a$:

$$A = y,\ B = \frac{1}{1}\frac{\partial y}{\partial x},\ C = \frac{1}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$D = \frac{1}{1.2.3}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3},\ \text{u.s.w.}\ L = \frac{1}{1..l}\frac{\partial^l y}{\partial x^l};$$

so daß also A, B, C,...L mit den sich mittelst der Taylorschen Reihe ergebenden Coefficienten offenbar identisch, und letztere als völlig richtige Resultate zu betrachten sind. Leicht erhält man aber:

$$\frac{\partial^{l+1} y_1}{\partial i^{l+1}} = m(m-1)\ldots M i^{m-l-1} + \ldots$$

Folglich, da $m < l + 1$ ist, der Werth von $\frac{\partial^{l+1} y_1}{\partial i^{l+1}}$ für $i = o$, d. i. $\frac{\partial^{l+1} y}{\partial x^{l+1}}$ für $x = a$ unendlich, und M also mittelst der Taylorschen Reihe unbestimmbar.

Diese Betrachtungen zeigen, daß so lange die Differentialquotienten von y in Bezug auf x für x = a nicht $\pm\infty$ werden, die Taylorsche Reihe die Glieder von $f(a+i)$ richtig liefert, daß dies aber nicht mehr der Fall ist, sobald ein Differentialquotient unendlich wird, und daß nun i einen gebrochenen Exponenten erhält. Um den noch zu entwickelnden Theil der Reihe zu finden, ziehe man den schon entwickelten von $f(a+i)$ ab, und bezeichne den Rest durch R. Man setze nun $R = A' + Mi^m$, so daß nämlich A' den Werth von R für $i = o$ bezeichnet, und i^m die höchste Potenz von i ist, durch welche sich $R - A'$ dividiren läßt, so daß der Bruch $\frac{R - A'}{i^m} = M$ für $i = o$ weder $= o$, noch $= \infty$ wird, wodurch M, m bestimmt werden. Ganz eben so setze man $M = B' + Ni^n$, $N = C' + Ki^k$, u.s.w.; so erhält man:

$$R = A' + B'i^m + C'i^{m+n} + \ldots$$

die gesuchte Entwickelung von S.

Oft muß man sich in solchen Fällen besonderer Kunstgriffe bedienen, und zu Entwickelungen mittelst anders woher bekannter Reihen zurückkehren. Auch läßt sich in $f(x+i)$ dem x oft ein brauchbarer Werth geben, wie z. B. bei der Entwickelung von logn $(x+i)$, wenn man $x = 1$ setzt, wodurch man die bekannte Reihe für logn $(1+i)$ erhält.

Teliosadik, nennt J. F. C. Werneburg in seiner Teliosadik, oder das allein vollkommene unter allen Zahlensystemen, u. s. w. Verlagshandlung für die neueste Literatur. 1060. (dodecadisch), das Zahlensystem, dessen Grundzahl zwölf ist. s. Dodecadik.

Terminus, s. Glied.

Terminus generalis, s. Reihe. (25.)

Tertie, s. Minute.

Testudo quadrabilis hemisphaerica, s. Florentinische Aufgabe.

Tetradik, s. Tetraktik.

Tetraedralzahl, s. Polyedralzahlen in Polygonalzahlen. (13.)

Tetraëdrometria, würde dasselbe in Bezug auf die dreiseitige Pyramide zu leisten haben, was die Trigonometrie für das Dreieck leistet, d. h. sie müßte die Auflösung der folgenden allgemeinen Aufgabe geben: Wenn von den Stücken, die zur Construction einer dreiseitigeu Pyramide gehören, 6 zur Bestimmung der übrigen hinreichende gegeben sind, die übrigen Stücke zu finden. Beiträge dazu enthalten: De Gua propositions etc. sur le tetraèdre, ou essai de tetraèdrometria. Mém. de Paris. 1783. p. 363., und vorzüglich Carnots Abhandlung über das Verhältniß, welches zwischen den Entfernungen von 5, willkührlich im Raume angenommenen Puncten besteht. (Carnots Geom. d. Stellung v. Schumacher. II. Altona. 1810. S. 254.), und in gewisser Rücksicht auch die schöne analytische Abhandlungen von Lagrange über die dreiseitige Pyramide in den Mém. de Berlin. 1773. p. 149. L. W. Feuerbach Grundriß zur analyt. Untersf. der dreieckigen Pyramide. Nürnberg. 1827.

Tetraëdrum, Tetraeder, ein regulärer, von vier gleichseitigen Dreiecken eingeschlossener Körper. S. vieleckige Körper.

Tetragonalzahl, gleichbedeutend mit Quadratzahl in der Reihe der Polygonalzahlen.

Tetragonische Linie, s. Proportionalzirkel. (6).

Tetragonismus, s. Quadratur.

Tetragonometrie, in jetzt gewöhnlicher Bedeutung s. Trigonometrie. (V.) Jobi Ludolffi, Math. Prof. et Senat. Erffurtensis, Tetragonometria tabularia. Francof. et Lips. 1690. 4. ist der Titel seines Werks, welches die Quadrate aller Zahlen von 1 bis 100000 ziemlich richtig enthält.

Tetragonum, Viereck.

Tetraktik, **Tetraktys**, ist das Zahlensystem, dessen Grundzahl 4 ist. Aristoteles (Probl. Sect. XV. Probl. III.), in dem er die Ursache, daß fast alle Völker bis 10 zählen, in der Zahl unserer Finger findet, erwähnt zugleich eines thracischen Volkes, welches nur bis 4 zählt. Dadurch ward Erhard Weigel veranlaßt, die Regeln der tetraktischen Arithmetik in besondern Schriften (Aretologistica vel Logistica virtutum genitrix. Norimb. 1687. Tetractys, summum tum Arithmeticae, tum Philosophiae discursivae compendium; artis magnae sciendi gemina radix. Jenae. 1672.) zu entwickeln. Zugleich hielt er dieses Zahlensystem für einerlei mit der Tetraktys der Pythagoräer (Tetractys, Tetracty Pythagoraeorum correspondens. Jenae. 1672.), wogegen Weidler und Mannert dieser philosophischen Schule die Kenntniß des dekadischen Zahlensystems beilegen. M. s. über die Tetraktys der Pythagoräer Thl. I. S. 185. Telauges, des Pythagoras Sohn, schrieb, nach Suidas, darüber eine besondere Schrift in 4 Büchern, von denen Montucla (T. I. p. 125.) jedoch meint, daß sie die Musik betroffen hätten. V. Thl. I. S. 185. Barrow (Lect. math. II. p. 17.) bezieht die Tetraktys der Pythagoräer auf die vier damals bekannten Theile der Mathematik, und meint, daß die Eidesformel: „assevero per illum qui

„animae nostrae tradidit quaternarium" zu ergänzen sey: ich schwöre bei dem, welcher uns die vier Theile der Mathematik lehrte.

Von Weidler gehört noch hierher: Diss. de praestantia Arithm. decadicae, qua tetracticam et dyadicam antecellit. Vitemb. 1719.

Tetraktys, s. Tetraktik.

Theil, s. Theilung.

Theilbare Zahl, s. Theiler einer Zahl.

Theiler einer Zahl, heißt jede Zahl, durch welche sich jene ohne Rest dividiren läßt. A heißt ein Theiler, oder auch wohl ein Maaß von C, wenn C : A = B eine ganze Zahl ist. C heißt dann durch A theilbar, und ein Vielfaches oder Multiplum von A. Jeder Theiler einer Zahl, welcher eine Primzahl ist, heißt ein einfacher oder Primfactor derselben. Bei Euclid (VII. Def. 16) heißen die Theiler einer Zahl latera.

1. Jede Zahl läßt sich als ein Produkt von der Form $\alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots$, wo α, β, γ, u. s. f. Primzahlen sind, darstellen. Man dividire zu dem Ende in die gegebene Zahl mit den Primzahlen 2, 3, 5, u. s. f. nach der Reihe, und mit jeder so oft als es angeht. Immer muß man endlich auf einen Quotienten kommen, welcher selbst eine Primzahl ist, weil sich sonst die Division bis ins Unendliche fortsetzen ließe, welches wegen der Endlichkeit der gegebenen Zahl unmöglich ist. Das Product aller Divisoren und des letzten Quotienten ist dann der gegebenen Zahl gleich. Z. B.

	1260		360		210
2)	630	2)	180	2)	105
2)	315	2)	90	3)	35
3)	105	2)	45	5)	7
3)	35	3)	15		
5)	7	3)	5		

$1260 = 2.2.3.3.5.7 = 2^2.3^2.5.7$, $360 = 2.2.2.3.3.5 = 2^3.3^2.5$, $210 = 2.3.5.7$.

2. Hat man die Division der gegebenen Zahl N durch alle Primzahlen unter, oder bis, $\sqrt{N}$ vergeblich versucht; so kann man schließen, daß N selbst eine Primzahl ist. Denn sollte die Primzahl $p > \sqrt{N}$ in N aufgehen, so daß $N:p = P$ eine ganze Zahl wäre; so wäre $P < N:\sqrt{N}$, d. i. $P < \sqrt{N}$, und es würde folglich, da $N = pP$, eine Primzahl $< \sqrt{N}$ geben, welche in N aufginge, gegen die Voraussetzung.

3. Gute Dienste bei dieser Zerlegung in Primfactoren leisten die bekannten Kennzeichen der Theilbarkeit durch die ganzen Zahlen 2 bis 12, welche hier in Bezug auf das decadische Zahlensystem kurz erläutert werden sollen, aber auch leicht auf jedes andere System ausgedehnt werden können.

4. Eine Zahl ist durch 2, 4, 8 theilbar, wenn 2 in der letzten Ziffer, 4 in der durch die beiden, 8 in der durch die drei letzten Ziffern dargestellten Zahl aufgeht. Der wesentliche Grund dieser Kennzeichen ist, daß 2 immer in 10, 4 in 100, 8 in 1000 aufgeht, und ihre Richtigkeit erhellet augenblicklich, wenn man sich die gegebene Zahl auf die Formen $a.10 + b$, $a'.100 + b'$, $a''.1000 + b''$, wo b, b', b'' eine ein-, zwei-, dreiziffrige Zahl bezeichnet, gebracht denkt. Die Null wird immer als durch jede Zahl theilbar betrachtet.

5. Die 5 geht in jeder Zahl auf, deren letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist. Denn solche Zahlen lassen sich auf die Form $a.10 + 5$ oder $a.10$ bringen. Die 10 geht in jeder Zahl auf, deren letzte Ziffer 0 ist, da solche Zahlen immer $= a.10$ sind.

6. Eine Zahl ist durch 3 oder 9 theilbar, wenn 3 oder 9 in der Summe ihrer Ziffern, in der sogenannten Queersumme aufgehen. Es ist nämlich überhaupt

$$\begin{aligned} 10^m &= 10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^m \\ &\qquad - 1 - 10 - 10^2 - \ldots - 10^{m-1} + 1 \\ &= (10-1).1 + (10-1).10 + (10-1).10^2 + \ldots\ldots + (10-1)10^{m-1} + 1 \\ &= 9.(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{m-1}) + 1, \end{aligned}$$

woraus sogleich erhellet, daß bei der Division jeder Potenz von 10 durch 3 oder 9 immer 1 als Rest bleibt, und folg-

lich immer $10^m = 3q' + 1 = 9q'' + 1$ gesetzt werden kann. Also ist jede decadische Zahl

$$N = a + b.10 + c.10^2 + \ldots + n.10^\alpha$$
$$= a + b(3b' + 1) + c(3c' + 1) + \ldots\ldots + n(3n' + 1)$$
$$= a + b(9b'' + 1) + c(9c'' + 1) + \ldots\ldots + n(9n'' + 1)$$
$$= 3(bb' + cc' + \ldots + nn') + a + b + c + \ldots + n$$
$$= 9(bb'' + cc'' + \ldots + nn'') + a + b + c + \ldots + n$$

woraus augenblicklich erhellet, daß 3 und 9 in N aufgehen, wenn sie in der Ziffern- oder Queersumme $a + b + c + \ldots + n$ aufgehen. Läßt diese Summe durch 3 oder 9 dividirt einen Rest; so bleibt bei der Division von N durch 3 oder 9 offenbar derselbe Rest.

7. Die Rechenmeister haben sich viele Mühe gegeben, ein Kennzeichen für die Theilbarkeit durch 7 aufzufinden. Keines derselben ist leichter als die unmittelbare Division durch 7. Das Folgende ist indeß von einigem theoretischen Interesse. Wenn man mit 7 in 10^0, $10'$, ... 10^6 dividirt, erhält man die Reste 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1. Da man nun die Division der folgenden Potenzen von 10 durch 7 ausführen kann, indem man blos immer eine 0 mehr an den Dividendus anhängt; so ist klar, daß die Reste 1, 3, 2, 6, 4, 5 immer wiederkehren müssen. Uebrigens erhellet Dies auch auf folgende Art. Da $10^6 = 7q + 1$ ist; so folgt aus der Binomialformel unmittelbar, daß auch überhaupt $10^{6n} = (7q + 1)^n = 7q' + 1$ seyn muß. Ist nun α nicht > 6; so ist $10^{6n+\alpha} = 10^{6n}.10^\alpha = 10^{6n}.(7p + r) = 7p.10^{6n} + r.10^{6n} = 7p.10^{6n} + r(7q' + 1) = 7p' + r$, so daß also der Rest von 10^α durch 7 einerlei ist mit dem Reste von $10^{6n+\alpha}$ durch 7. Daher müssen die obigen Reste 1, 3, 2, 6, 4, 5 offenbar immer wieder kehren. Hierauf gründet sich nun folgendes Kennzeichen. Man schreibt diese Reste in umgekehrter Ordnung unter die Ziffern der gegebenen Zahl, von den Einern an, multiplicirt alle untereinander stehenden Zahlen wirft von den Producten die Vielfachen von 7 weg, und untersucht, ob die Summe der erhaltenen Zahlen ein Vielfaches von 7 ist, in welchem Falle 7 in der gegebenen Zahl aufgeht, wovon der Grund sogleich erhellet. Ist 13527542 die gegebene Zahl; so erhält die Rechnung folgende Form:

$$\begin{array}{l} 13527542;\,1.2 = 2,\ 4.2 = 1; \\ 31546231;\,3.4 = 5,\ 5.5 = 4; \\ \qquad 2.5 = 3,\ 1.3 = 3; \\ \qquad 6.7 = 0,\ 3.1 = 3; \\ 2+5+3+0+1+4+3+3=21=3.7. \end{array}$$

Also 13527542 durch 7 theilbar.

8. Eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn der Unterschied zwischen den Summen der Ziffern in den geraden und ungeraden Stellen durch 11 theilbar ist. Da nach (6.)

$$\begin{array}{l} 10^{2m-1} = 9 \,.\, 1 + 9 \,.\, 10 + \,.\,.\, + 9 \,.\, 10^{2m-2} + 1 \\ = 9 \,.\, 1 + 9 \,.\, 10 + 9 \,.\, 10^2 + \,.\,.\, + 9 \,.\, 10^{2m-2} + 1 \\ \qquad - 9 \,.\, 10 \qquad\qquad - \,.\,. \qquad\qquad - 9 \,.\, 10^{2m-1} \\ + 90 \,.\, 1 \qquad\qquad + 90 \,.\, 10^2 + \,.\,.\, + 90 \,.\, 10^{2m-2} \\ = 99 \,.\, 1 \qquad\qquad + 99 \,.\, 10^2 + \,.\,.\, + 99 \,.\, 10^{2m-2} - 9.10^{2m-1} + 1; \\ 10^{2m-1} + 9 \,.\, 10^{2m-1} = 10^{2m} = \\ 99 \,.\, 1 + 99 \,.\, 10^2 + \,.\,.\, + 99 \,.\, 10^{2m-2} + 1 \end{array}$$

ist; so erhellet, daß 10^{2m}, d. i. jede gerade Potenz von 10, durch 11 dividirt, die Einheit als Rest läßt, und demnach immer $10^{2m} = 11q + 1$. Also $10^{2m+1} = 10^{2m}.10 = 11.10q + 10 = 11q' + 10 = 11q' + 11 + 10 - 11 = 11(q' + 1) - 1 = 11p - 1$. Also ist

$$\begin{array}{l} N = a + b.10 + c.10^2 + d.10^3 + \ldots \\ = a + b(11b' - 1) + c(11c' + 1) + d(11d' - 1) + e(11e' + 1) + \ldots \\ = 11(bb' + cc' + dd' + ee' + \ldots) + (a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots), \end{array}$$

woraus sogleich erhellet, daß N und $(a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$, durch 11 dividirt, einerlei Rest lassen, und daß folglich 11 in N aufgeht, wenn es in der Differenz $(a + c + e + \ldots) - (b + d + f + \ldots)$ aufgeht. Wäre diese Differenz negativ, und der Rest nicht $= 0$; so wäre der Rest auch negativ, in welchem Falle man natürlich auch den negativen Rest von N zu berücksichtigen hätte.

9. Im Art. Zahl I. ist bewiesen, daß, wenn zwei relative Primzahlen in einer Zahl aufgehen, immer auch deren Product in dieser Zahl aufgehen muß. Hiernach lassen sich mehrere Kennzeichen bilden. Eine Zahl ist z. B. durch 6 oder 12 theilbar, wenn sie durch 2 und 3, oder 3 und 4 theilbar ist.

10. Tafeln, welche die ganzen Zahlen bis zu einer gewissen Gränze in ihre Primfactoren zerlegt enthalten, heißen **Factorentafeln**. Die immer sehr einfache Ein-

richtung ist aus der gewöhnlich vorausgeschickten Einleitung zu ersehen. Zu verbinden mit ihnen sind die Tafeln der Primzahlen. Beim Aufheben der Brüche leisten sie begreiflich gute Dienste. F. a Schooten Exercitat. math. Leid. 1657. enthalten die Primzahlen bis 9979: An Introduction to Algebra, translated out of Highdutch by T. Branker, augmented by Dr. J. P. London. 1668., eine von Joh. Pell vermehrte Uebersetzung von Rahns deutscher Algebra. (Zürch, 1659.), enthält die Zerlegung der Zahlen bis 100000 nebst den Primzahlen. J. M. Poetii Anleitung zu der arithm. Wissenschaft vermittelst einer parallelen Algebra. Frkft. u. Lpzg. 1728. enthält als Anhang die Zerfällung der Zahlen (Anatomia numerorum) von 1 bis 10000. Eben so in dem Vollst. math. Lexicon. Thl. 2. Leipzig, 1742. S. 530. und in Willichs gründlicher Vorstellung der Reesischen Regel. Bremen und Gött. 2 Bde. 1759. 60. S. 831. J. G. Krügers Gedanken von der Algebra. Halle. 1746. enthalten die Primzahlen von 1 bis 100000 von Peter Jäger, Roßschreiber und Quartiermeister zu Nürnberg, berechnet. Krüger sagt S. 123., daß Jäger auch eine vollständige Anatomia numerorum verfertigt habe. Verzeichniß der Theiler aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000, durch H. Anjema. Leiden. 1767. 4. Lambert (Beiträge zur Math. Thl. 2.) giebt eine Factorentafel bis 10200 mit Ausschluß der durch 2, 3, 5 theilbaren Zahlen. Mehrere hierher gehörende, sehr brauchbare Tafeln in den Zusätzen zu den log. und trig. Tabellen. Berlin. 1770. Tabellen der Primzahlen und der Factoren der Zahlen, welche unter 100100 durch 2, 3, 5 nicht theilbar sind, von J. Neumann. Dessau. 1785. Nach einem mechanischen Verfahren, welches Kästner (Fortsetzung der Rechenkunst. S. 567.) beschreibt, beschäftigte sich mit der Berechnung sehr großer Factorentafeln Anton Felkel, ehemals Professor an der Normalschule zu Wien, dann Director der Schul- und Armenanstalten auf den Gräfl. Thurnischen Herrschaften in Böhmen, später sich in Lissabon aufhaltend. In Hoberts und Idelers neuen trigon. Tafeln. Berlin. 1799. finde ich S. XLIII. ange-

führt: Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 336000. Wien. 1776. Fol. Kästner sagt a. a. O. S. 565., daß Felkel Factorentafeln bis 10000000 (Wien. 1776.) angekündigt habe. Sie sollen auf Kosten des K. K. Acrarium schon bis 408000 gedruckt gewesen seyn, die ganze Auflage aber, weil sich keine Abnehmer fanden, zu Patronen-Papier verbraucht, und nur wenige Exemplare verschont worden seyn. M. s. über die Felkelschen Tafeln auch Monatl. Corresp. Aug. 1800. S. 222., wo sich auch einige Nachrichten über den Verfasser finden. Allgemeine deutsche Bibliothek. XXXIII. St. 2. S. 495. Zu gewöhnlichem Gebrauche sehr dienlich ist die Tafel in Vega's logarithmisch-trig. Tafeln. II. Lpzg. 1814. S. 1—128., welche die Zerlegung der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 102000 nebst den Primzahlen von 102000 bis 400000 enthält. Die Primzahlen und die Factoren der andern Zahlen von 1 bis über eine Million enthält: Cribrum arithmeticum, sive tabula, continens numeros primos etc. Confecit Lad. Chernac. Daventriae. 1811. Fol. Als eine Fortsetzung hiervon ist zu betrachten: Tables des diviseurs pour tous les nombres de 1020000 à 2028000 par J. B. Burckhardt. Paris. 1814. Nach Legendre (Supplément à l'essai snr la théorie des nombres. 1816. p. 61.) hat der nunmehr verstorbene Burckhardt die Tafel bis zur vierten Million ausgedehnt, und die dritte Million sey auch schon gedruckt. Angekündigt finde ich: J. P. Kulik Tafel der einfachen Factoren aller Zahlen unter einer Mill., nebst Hülfstafeln zur Bestimmung der Factoren jeder größern Zahl. 1825. 8. Ueber die Construction der Factorentafeln s. m. auch Abhandlungen von Euler, Kraft und Schubert über die Theiler der Zahlen in den Nov. Comm. Petrop. T. I. XIII. III. Nov. Act. T. XI. Lambert über Theilung und Theilbarkeit der Zahlen. Beiträge. II. Klügel über die Zerfällung einer zusammengesetzten Zahl. Lpzgr. Magazin für Math. 1787. Stück 2. Segner von der Aufsuchung der zusammengesetzten Zahlen. Das. Tessaneck Methode die Theiler

einer Zahl zu finden. Abhandlungen einer Böhm. Privatgesellschaft. I. S. 1. 1775. Hindenburg Beschreibung einer neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen zu finden. Lpzg. 1776. F. W. D. Snell neue und bequeme Art, die Factorentafeln einzurichten. Gießen. 1800. Zu vergl. sind die Art. Primzahl und Eratosthenes Sieb.

11. Die Aufgabe, aus den einfachen Factoren einer gegebenen Zahl auch alle zusammengesetzten Factoren derselben zu finden, ist eine rein combinatorische. Man betrachtet nämlich die verschiedenen Primfactoren als einzelne combinatorische Elemente, und bildet die Combinationen mit Wiederholungen, läßt aber alle die Combinationen weg, wo ein Element öfter vorkommt, als unter den Primfactoren der gegebenen Zahl; nach Hindenburg Combinationen mit eingeschränkten Wiederholungen. Sind alle Primfactoren verschieden; so bildet man die Combinationen ohne Wiederholungen.

360 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5.

2 =	2
3 =	3
5 =	5
2 . 2 =	4
2 . 3 =	6
2 . 5 =	10
3 . 3 =	9
3 . 5 =	15
2 . 2 . 2 =	8
2 . 2 . 3 =	12
2 . 2 . 5 =	20
2 . 3 . 3 =	18
2 . 3 . 5 =	30
3 . 3 . 5 =	45
2 . 2 . 2 . 3 =	24
2 . 2 . 2 . 5 =	40
2 . 2 . 3 . 3 =	36
2 . 2 . 3 . 5 =	60
2 . 3 . 3 . 5 =	90
2 . 2 . 2 . 3 . 3 =	72
2 . 2 . 2 . 3 . 5 =	125
2 . 2 . 3 . 3 . 5 =	180
2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5 =	360

12. Ist $N = \alpha^m \beta^n \gamma^p \ldots$, wo α, β, $\gamma \ldots$, Primzahlen sind; so erhellet auch leicht, daß alle Theiler von N, die Einheit und die Zahl selbst mit eingeschlossen, durch die Glieder des Products

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^m)(1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n)(1+\gamma+\ldots+\gamma^p)\ldots.$$

dargestellt werden. Die Anzahl der Glieder dieses Products, d. i. die Anzahl aller Theiler von N, ist offenbar $= (m+1)(n+1)(p+1)\ldots\ldots$ Für das obige Beispiel $= 4.3.2 = 24$, wo die Einheit mit eingeschlossen ist.

In der aus der Entwickelung von

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}+\ldots$$

entspringenden Reihe:

$$x+2x^2+2x^3+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+\ldots$$

welche Lambert in seiner Architektonik S. 507. mittheilt, enthält jeder Coefficient so viele Einheiten, als der Exponent der entsprechendenden Potenz von x Theiler hat.

13. Will man eine Zahl finden, welche eine bestimmte Anzahl, z. B. 24, Theiler hat; so zerlege man 24 auf irgend eine Art in Factoren. Z. B. $24 = 3.4.2$, so ist, wenn α, β, γ irgend drei ungleiche Primzahlen sind, $\alpha^2\beta^3\gamma$ die Form einer Zahl mit 24 Theilern.

14. Ist $N = \alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots$ wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Primzahlen sind; so ist

$$N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots.$$

die Anzahl der Primzahlen zu N, welche $< N$ sind.

Für $N = \alpha N'$ sind die durch α theilbaren Zahlen in der Reihe 1, 2, 3, 4, ... N keine andern als: α, 2α, 3α, 4α, ... $N'\alpha$, deren Anzahl also $= N'$ ist. Folglich ist die Anzahl der durch α nicht theilbaren Zahlen in obiger Reihe

$$= N - N' = N - \frac{1}{\alpha}N = N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right).$$

Wenn $N = \alpha\beta N'$ ist; so sind alle Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, ... N entweder weder durch α noch durch β theilbar, oder durch α, ohne es durch β, oder durch β, ohne es durch α zu seyn, oder durch α und β, d. i., da α, β Primzahlen sind, durch $\alpha\beta$ (Zahl. I.). Ganz wie vorher erhellet, daß die Anzahl der durch $\alpha\beta$ theilbaren Zahlen $= N'$ ist; die Anzahl der durch α theilbaren $= \beta N'$, also die Anzahl der nur durch α theilbaren $\beta N' - N' = (\beta - 1)N'$. Eben so ist die Anzahl der nur durch β theilbaren Zahlen in obiger Reihe $= (\alpha - 1)N'$. Die An-

zahl der weder durch α, noch durch β theilbaren Zahlen ist also

$$= N - (\alpha-1)N' - (\beta-1)N' - N'$$
$$= N - \frac{\alpha-1}{\alpha\beta} N - \frac{\beta-1}{\alpha\beta} N - \frac{1}{\alpha\beta} N$$
$$= \frac{\alpha\beta-\alpha-\beta+1}{\alpha\beta} N = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha\beta} N$$
$$= N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right).$$

Für $N = \alpha\beta\gamma N'$ kommen in der Reihe 1, 2, 3, 4,....N Zahlen vor, welche durch α, β, γ, d. i. durch $\alpha\beta\gamma$ (a. a. O.), theilbar sind, oder solche, welche bloß durch zwei, oder endlich solche, welche nur durch eine dieser Zahlen theilbar sind. Die Anzahl der durch $\alpha\beta\gamma$ theilbaren ist wie vorher $= N'$; die Anzahl der nur durch $\alpha\beta$, aber nicht durch γ, theilbaren $= (\gamma-1)N'$; die Anzahl der nur durch $\alpha\gamma$, aber nicht durch β theilbaren $= (\beta-1)N'$; die Anzahl der nur durch $\beta\gamma$, aber nicht durch α, theilbaren $= (\alpha-1)N'$. Die Anzahl der durch α theilbaren Zahlen überhaupt ist, wie vorher, $= \beta\gamma N'$. Folglich die Anzahl der nur durch α theilbaren Zahlen

$$= \beta\gamma N' - (\beta-1)N' - (\gamma-1)N' - N'$$
$$= (\beta-1)(\gamma-1)N'.$$

Eben so ist die Anzahl der nur durch β oder γ theilbaren Zahlen $= (\alpha-1)(\gamma-1)N'$ und $= (\alpha-1)(\beta-1)N'$. Folglich die Anzahl der weder durch α, noch durch β oder γ theilbaren Zahlen in obiger Reihe

$$= N - (\alpha-1)(\beta-1)N' - (\alpha-1)N' - N'$$
$$- (\alpha-1)(\gamma-1)N' - (\beta-1)N'$$
$$- (\beta-1)(\gamma-1)N' - (\gamma-1)N'$$

woraus, wenn man N' durch N ausdrückt, wie vorher leicht erhalten wird:

$$\frac{(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)}{\alpha\beta\gamma} N = N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right).$$

Wie man weiter gehen kann, erhellet leicht. Den Beweis ganz allgemein zu machen, fehlt hier der Raum.

Ist nun überhaupt $N = \alpha^m\beta^n\gamma^p \ldots = \alpha\beta\gamma \ldots \times \alpha^{m-1}\beta^{n-1}\gamma^{p-1} \ldots$; so ist nach dem Vorhergehenden die Anzahl der durch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nicht theilbaren Zahlen

unter N, d. i., da $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Primzahlen sind, die Anzahl der Primzahlen zu N unter N

$$= N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots.$$

Für $N = 24 = 2^3.3$ ist diese Anzahl $= 24.(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = 8$, und die kleinern Primzahlen zu 24 sind auch wirklich: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

Ist $N = \alpha\beta\gamma\ldots$; so ergiebt sich aus obiger Formel die Anzahl der Primzahlen zu N leicht

$$= (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)\ldots.$$

15. Die Summe aller Theiler einer Zahl $N = \alpha^m\beta^n\gamma^p\ldots$ ist (12.)

$$= (1+\alpha+\ldots\alpha^m)(1+\beta+\ldots+\beta^n)(1+\gamma+\ldots+\gamma^p)\ldots$$

$$= \frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}\cdot\frac{\gamma^{p+1}-1}{\gamma-1}\ldots,$$

und für $m = n = p = \ldots = 1$,

$$= \frac{\alpha^2-1}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta^2-1}{\beta-1}\cdot\frac{\gamma^2-1}{\gamma-1}\ldots$$

$$= (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots.$$

Für $12 = 2^2.3$ ist die Summe der Theiler $= 1+2+3+4+6+12 = 28 = \frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1} = \frac{7}{1}\cdot\frac{8}{2} = 7.4.$

In Eulers Abhandlung de numeris amicabilibus (Opuscula varii argumenti. T. II. Berol. 1750. p. 27.) findet man eine Tafel der Summen der Theiler der Primzahlen von 1 bis 1000, und ihrer Potenzen, wo die Summen zugleich in ihre Primfactoren zerlegt sind.

16. Die Thl. I. S. 247. ohne Beweis mitgetheilten Regeln von Descartes und Kraft zur Auffindung befreundeter Zahlen lassen sich hier beweisen. Ist nämlich $A = 2^m$ eine Potenz der 2 von solcher Beschaffenheit, daß $3A-1 = P$, $6A-1 = Q$, $18AA-1 = R$ Primzahlen sind; so sind 2AR und 2APQ befreundete Zahlen. Denn $2AR = 2^{m+1}.R$, $2APQ = 2^{m+1}.PQ$. Folglich, da P, Q Primzahlen sind, die Summen der Theiler dieser Producte nach (15.) $=(2^{m+2}-1)(R+1)$, und $= (2^{m+2}-1)(P+1)(Q+1)$. Also, da hierunter die Zahlen selbst mitbegriffen sind, die Summen der aliquoten Theile $=(2^{m+2}-1)(R+1) - 2^{m+1}.R$, und

$= (2^{m+2} - 1)\ (P+1)\ (Q+1) - 2^{m+1} \,.\, PQ.$
Aber $R = 18\,AA - 1 = 18 \,.\, 2^{2m} - 1$. Also die erste Summe =

$$2^{m+1} \,.\, \{18 \,.\, (2 \,.\, 2^{2m} - 2^{2m}) - 9 \,.\, 2^{m} + 1\}$$
$$= 2^{m+1} \,.\, (18 \,.\, 2^{2m} - 9 \,.\, 2^{m} + 1)$$
$$= 2^{m+1} \,.\, (3 \,.\, 2^{m} \,.\, 6 \,.\, 2^{m} - 6 \,.\, 2^{m} - 3 \,.\, 2^{m} + 1)$$
$$= 2^{m+1} \,.\, (3 \,.\, 2^{m} - 1)\ (6 \,.\, 2^{m} - 1)$$
$$= 2^{m+1} \,.\, (3A - 1)\ (6A - 1) = 2^{m+1} \,.\, PQ,$$

wie es seyn muß. Die zweite Summe ist =

$$18 \,.\, 2^{3m+2} - 18 \,.\, 2^{2m} - 18 \,.\, 2^{3m+1} + 9 \,.\, 2^{2m+1} - 2^{m+1}$$
$$= 18 \,.\, 2^{3m+2} - 18 \,.\, 2^{3m+1} - 2^{m+1}$$
$$= 18 \,.\, 2^{3m+1} - 2^{m+1} = 2^{m+1} \,.\, (18 \,.\, 2^{2m} - 1)$$
$$= 2^{m+} \,.\, R,$$ wie es seyn muß.

Um auch die a. a O. mitgetheilte Regel von **Kraft** zu beweisen, sey $A = \alpha^{m}\,\beta^{n}\,\gamma^{p} \ldots$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Primzahlen sind; so ist die Summe der Theiler von A =

$$\frac{(\alpha^{m+1} - 1)(\beta^{n+1} - 1)(\gamma^{p+1} - 1)\ldots}{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\ldots} = a.$$

Eben so sind, da P, Q, R (a. a. O.) Primzahlen sind, die Summen der Theiler von PQA und RA =

$$\frac{(P^2 - 1)(Q^2 - 1)(\alpha^{m+1} - 1)(\beta^{n+1} - 1)\ldots\ldots}{(P-1)(Q-1)(\alpha - 1)(\beta - 1)\ldots\ldots}$$

$= a\ (P+1)\ (Q+1)$, und

$$\frac{(R^2 - 1)(\alpha^{m+1} - 1)\beta^{n+1} - 1)\ldots\ldots}{(R-1)(\alpha - 1)(\beta - 1)\ldots\ldots}$$

$= a\ (R+1)$.

Also die Summe der aliquoten Theile dieser Producte

$a\,(P+1)(Q+1) - PQA$, und $a\,(R+1) - RA$.

Nach der Bedingung ist aber

$(P+1)(Q+1) = R+1$, und $A\,(PQ+R) = a\,(R+1)$.

Also die erste Summe

$= a\,(R+1) - (aR + a - AR) = RA$,

die zweyte $= a\,(R+1) - (aR + a - APQ) = PQA$.

Folglich sind RA und PQA amicable Zahlen.

17. Um zu finden, wie oft eine Zahl p in der Reihe 1, 2, 3, ... N als Theiler vorkommt, kann man auf folgende Art verfahren. Bezeichnet man überhaupt das

größte in dem Bruche $\frac{A}{B}$ enthaltene Ganze durch $G\left(\frac{A}{B}\right)$; so ist die Anzahl der durch B theilbaren Glieder obiger Reihe $= G\left(\frac{N}{B}\right)$, weil diese Glieder offenbar

$$B, 2B, 3B, \ldots G\left(\frac{N}{B}\right) . B$$

sind, indem $\left\{G\left(\frac{N}{B}\right) + 1\right\} . B > N$ seyn muß, nach der Bedeutung des Zeichens $G\left(\frac{N}{B}\right)$. Die Anzahl der durch p theilbaren Glieder ist also $= G\left(\frac{N}{p}\right)$, und es kommt folglich, wenn $p^2 > N$, $G\left(\frac{N}{p^2}\right) = 0$ ist, p in obiger Reihe so oft als Factor vor, als $G\left(\frac{N}{p}\right)$ anzeigt. Ist aber erst $p^3 > N$, $G\left(\frac{N}{p^3}\right) = 0$; so ist die Anzahl der durch p^2 theilbaren Glieder $= G\left(\frac{N}{p^2}\right)$, und folglich kommt in diesem Falle p so oft vor, als

$$G\left(\frac{N}{p}\right) + G\left(\frac{N}{p^2}\right)$$

anzeigt. Wäre erst $p^4 > N$, $G\left(\frac{N}{p^4}\right) = 0$; so würde auf ähnliche Art p in obiger Reihe so oft als Theiler vorkommen, als $G\left(\frac{N}{p}\right) + G\left(\frac{N}{p^2}\right) + G\left(\frac{N}{p^3}\right)$ anzeigt. Ueberhaupt kommt p in der Reihe $1, 2, 3, \ldots N$ so oft als Theiler vor, als

$$G\left(\frac{N}{p}\right) + G\left(\frac{N}{p^2}\right) + G\left(\frac{N}{p^3}\right) + G\left(\frac{N}{p^4}\right) + \ldots$$

anzeigt, wenn man diese Reihe so weit fortsetzt, bis sie von selbst abbricht. Für $N = 10000$, $p = 7$ ist:

$$G\left(\frac{10000}{7}\right) = 1428,\ G\left(\frac{10000}{49}\right) = 204,\ G\left(\frac{10000}{343}\right) = 29,$$
$$G\left(\frac{10000}{2401}\right) = 4,\ G\left(\frac{10000}{16807}\right) = 0.$$

Also kommt 7 in den ersten 10000 Zahlen 1665 Mal als Theiler vor. Für $N = 38$, $p = 6$ ist.

$$G\left(\frac{38}{6}\right) = 6,\ G\left(\frac{38}{36}\right) = 1,\ G\left(\frac{38}{216}\right) = 0.$$

Also kommt 6 in den ersten 38 Zahlen 7 Mal als Theiler vor.

18. Ist p eine Primzahl, und α die Zahl, welche anzeigt, wie oft p von 1 bis N als Theiler vorkommt; so ist offenbar p^α die höchste Potenz von p, durch welche das Product 1 . 2 . 3 ... N theilbar ist. Für N = 10000, p = 7 ist $p^\alpha = 7^{1665}$.

Theiler, gemeinschaftlicher, mehrerer ganzen Zahlen, heißt jede Zahl, welche in allen gegebenen Zahlen aufgeht. Gegebene Zahlen haben oft mehrere gemeinschaftliche Theiler. Der größte unter allen heißt ihr größter gemeinschaftlicher Theiler, ihr größtes gemeinschaftliches Maaß. Ist der größte gemeinschaftliche Theiler die Einheit; so sind die Zahlen relative Primzahlen.

1. Mit Hülfe der Factorentafeln findet man den größten gemeinschaftlichen Theiler leicht, wenn man die Primfactoren, welche sie alle mit einander gemein haben, in einander multiplicirt.

2. Eine andere Methode lehrt Euclides VII. 2. 3. für Zahlen, und X. 3. 4. für Größen überhaupt, wo nur Dividiren wiederholtes Abziehen ist. Die Methode ist bekannt. Man dividirt nämlich, wenn bloß zwei Zahlen gegeben sind, mit der kleinern in die größere, und mit dem bleibenden Reste immer in den vorhergehenden Divisor, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor, wo dies geschieht, ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maaß. Für 189 und 301 z. B. ist 7 der größte gemeinschaftliche Theiler. Denn

```
189|301|1
    189
    ---
    112|189|1
        112
        ---
         77|112|1
             77
            ---
             35|77|2
                70
                --
                 7|35|5
                   35
                   --
                    0
```

3. Bezeichnen alle Buchstaben ganze Zahlen; so ist für $\frac{A}{a} = p$, $\frac{B}{a} = q$, auch $\frac{A}{a} \pm \frac{B}{a} = \frac{A \pm B}{a} = p \pm q$ eine ganze Zahl. Auch ist $A = ap$. Also $AB = aBp$, $\frac{AB}{p} = aB$. D. h. eine Zahl, welche in zwei Zahlen aufgeht, geht auch in ihrer Summe und Differenz auf, und eine Zahl, welche in dem einen Factor eines Products aufgeht, geht in dem Product auf. Bezeichnet nun d den Divisor, D den Dividendus, q den Quotienten, r den Rest; so schließt man aus den beiden, sich leicht aus der Natur der Division ergebenden, Gleichungen: $D = dq + r$, $r = D - dq$ mit Hülfe der beiden obigen Sätze leicht, daß eine im Divisor und Rest aufgehende Zahl immer auch im Dividendus, und eine im Divisor und Dividendus aufgehende Zahl immer auch im Rest aufgehen muß.

4. Sind die beiden gegebenen Zahlen A, B, und $B < A$, die Quotienten und Reste aber a, b, c, d, ... und C, D, E, F, ..., wo, bei Größen überhaupt, Dividiren nur wiederholtes Abziehen ist; so wird das beschriebene Verfahren durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$A = aB + C,$$
$$B = bC + D,$$
$$C = cD + E,$$
$$D = dE + F,$$
u. s. f.

5. Bei ganzen Zahlen muß man immer auf einen Rest $= 0$ kommen. Denn wäre dies nicht der Fall; so würden A, B, C, D, E, ... eine immer um einige ganze Einheiten in's Unendliche abnehmende Reihe bilden, welches wegen der Endlichkeit von A, B ungereimt ist. Sey nun für diesen Fall S der Divisor, bei welchem die Division aufgeht; so reichen obige Gleichungen bis

$$P = pQ + R,$$
$$Q = qR + S,$$
$$R = rS.$$

Da also hiernach S in R, aber natürlich auch in S aufgeht; so geht S auch in Q auf (3.). Also in R und Q. Folglich auch in P (3.). Durch Fortsetzung dieser Schlüsse bis zum Anfange überzeugt man sich leicht, daß S ein gemeinschaftlicher Theiler von A, B seyn muß. Wäre nun S′ ein Theiler von A, B, welcher $> S$; so müßte S′ auch in C auf-

gehen (3.). Also in B und C. Also in D (3.). Also in C und D. Folglich auch in E (3.). Setzt man diese Schlüsse bis an's Ende fort; so erhellet, daß S' auch in S aufgehen müßte, welches ungereimt ist, da S' > S. Folglich giebt es keinen größern gemeinschaftlichen Theiler als S, und S ist also der größte.

Ganz wie in des Beweises letzterm Theile zeigt man, daß eine in zwei Zahlen aufgehende Zahl immer auch in ihrem größten gemeinschaftlichen Maaße aufgehen muß.

6. Alles dieses läßt sich auch leicht auf jede zwei gleichartige Größen A, B anwenden. Nur ist zu bemerken, daß man in diesem Fall nicht immer auf einen Rest = o kommen wird. Sind die beiden Größen commensurabel; so lassen sie sich offenbar in Bezug auf ihr gemeinschaftliches Maaß als Einheit wie ganze Zahlen betrachten, so daß man also in diesem Fall immer auf einen Rest = o kommen muß (5.). Sind sie aber incommensurabel; so kann dies nie geschehen, weil sonst, nach einem ganz ähnlichen Beweise wie vorher, der letzte Divisor, d. h. hier die möglichst oft abgezogene Größe ihr gemeinschaftliches Maaß seyn würde. Umgekehrt wird es also als ein Criterium der Incommensurabilität zu betrachten seyn, wenn bei der Anwendung des obigen Verfahrens man nie auf einen Rest = o kommt.

7. Euclides (X. 117.) beweiset z. B., daß die Seite und Diagonale eines Quadrats incommensurabel sind. Barrow bemerkt: Celebratissimum est hoc theorema apud ceteres philosophos, adeo ut qui hoc nesciret, eum Plato non hominem esse, sed pecudem diceret. Wir wollen daher den strengen Beweis hier einschalten. Ueber die Incommensurabilität des Durchmessers und der Peripherie siehe Quadratur (58.) Die Digonale AC (Fig. 1[a].) sey = a, die Seite BC = b. Also a > b. Mit b als Halbmesser beschreibe man um C als Mittelpunkt einen Kreis; so ist (Kreis 37.) AE : AB = AB : AF, a − b : b = b : a + b. Nach Verhältniß (28. 24.) erhält man hieraus leicht:

$$a : b = a + 2b : a + b,\ a > b,\ a - b > o,\ a - b = r;$$
$$a - b : b = r : b = b : a + b,\ b > r,\ b - r > o,\ b - r = \varrho;$$
$$b - r : r = \varrho : r = a : b = a + 2b : a + b,\ \varrho > r,\ \varrho - r > o,\ \varrho - r = r';$$
$$\varrho - r : r = r' : r = b : a + b,\ r > r',\ r - r' > o,\ r - r' = \varrho';$$
$$r - r' : r' = \varrho' : r' = a : b = a + 2b : a + b,\ \varrho' > r',\ \varrho' - r' > o,\ \varrho' - r' = r'';$$
$$\varrho' - r' : r' = r'' : r' = b : a + b,\ r' > r'',\ r' - r'' > o,\ r' - r'' = \varrho'';$$
$$r' - r'' : r'' = \varrho'' : r'' = a : b = a + 2b : a + b,\ \varrho'' > r'',\ \varrho'' - r'' > o,\ \varrho'' - r'' = r''';$$
$$\varrho'' - r'' : r'' = r''' : r'' = b : a + b,\ r'' > r''',\ r'' - r''' > o,\ r'' - r''' = \varrho''';$$

u. s. f.

Daß sich dieses Verfahren in's Unendliche fortsetzen läßt, und man nie auf ein $r = o$ kommen wird, liegt klar vor Augen. Man hat nun

$$\begin{array}{lll} a - b = r, & \varrho - r = r', & a = b + r, \\ b - r = \varrho, & \varrho' - r' = r'', & b = r + \varrho, \\ r - r' = \varrho', & \varrho'' - r'' = r''', & r = r' + \varrho', \\ r' - r'' = \varrho'', & \varrho''' - r''' = r'''', & r' = r'' + \varrho'', \\ r'' - r''' = \varrho''', & \varrho'''' - r'''' = r''''', & r'' = r''' + \varrho''', \\ \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \varrho = r + r', & a = 1 . b + r. \\ \varrho' = r' + r'', & b = 2 . r + r'. \\ \varrho'' = r'' + r''', & r = 2 . r' + r''. \\ \varrho''' = r''' + r'''', & r' = 2 . r'' + r'''. \\ \varrho'''' = r'''' + r''''', & r'' = 2 . r''' + r''''. \\ \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} \end{array}$$

Die letztern Gleichungen, in welchen a, b, r, r', r'', r''', u. s. f. eine in's Unendliche abnehmende Reihe bilden, haben mit den Gleichungen in (4.) ganz einerlei Form. Da man nun nie auf ein $r = o$ kommt; so sind a, b incommensurabel (6.)

7. Um den Exponenten des Verhältnisses der Diagonale und Seite zu finden, bemerke man, daß

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{r}{b},$$

$$\frac{b}{r} = 2 + \frac{r'}{r},\ \frac{r}{b} = \frac{1}{2 + \frac{r'}{r}};$$

$$\frac{r}{r'} = 2 + \frac{r''}{r'},\ \frac{r'}{r} = \frac{1}{2 + \frac{r''}{r'}};$$

$$\frac{r'}{r''} = 2 + \frac{r'''}{r''},\ \frac{r''}{r'} = \frac{1}{2 + \frac{r'''}{r''}};$$

u. s. f. u. s. f.

Also durch successive Substitution

$$\frac{a}{b} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

Da $a^2 = 2\,b^2$ ist; so ist $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, so daß also auch $\sqrt{2}$ durch obigen Kettenbruch ausgedrückt wird.

8. Den größten gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen A, B, C, D, E findet man, wenn man den größten gemeinschaftlichen Theiler a von A, B, dann von a, C, = b, dann von b, D, = c, und von c, E, = d sucht, indem nun d der größte gemeinschaftliche Theiler von A, B, C, D, E ist. Da nämlich d in c, E, aber c in b, D aufgeht; so muß offenbar auch d in b, D, E aufgehen. Nun geht aber b in a, C auf. Also auch d in a, C, D, E, und folglich auch in A, B, C, D, E, da a in A, B aufgeht. Folglich ist d ein gemeinschaftlicher Theiler. Gäbe es einen größern d′, so daß d′ > d; so geht d′ in A, B auf. Also auch in ihrem größten gemeinschaftlichen Theiler a (5.). Folglich in a, C. Also wieder in dem größten gemeinschaftlichen Theiler b (5.). So fortschließend findet man, daß d′ in d aufgehen müßte, welches ungereimt ist, da d′ > d. Also giebt es keinen größern gemeinschaftlichen Theiler als d.

9. Das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** oder der **kleinste gemeinschaftliche Dividuus** mehrerer Zahlen, beim Gleichnamigmachen der Brüche gewöhnlich **Generalnenner** genannt, heißt die kleinste Zahl, in welcher alle gegebenen Zahlen aufgehen.

10. Für zwei Zahlen A, B wird es gefunden, wenn man das größte gemeinschaftliche Maaß m von A und B sucht, und damit in beide Zahlen dividirt. Setzt man dann A : m = a, B : m = b; so ist mab das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B. Da nämlich $\frac{mab}{A} = \frac{mab}{ma} = b$, $\frac{mab}{B} = \frac{mab}{mb} = a$ ist; so gehen A und B in mab auf, und mab ist also ein gemeinschaftliches Vielfaches von A und B. Um nun zu beweisen, daß mab das kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist, muß man zuerst

zeigen, daß überhaupt jedes gemeinschaftliche Vielfache V' mehrerer Zahlen von ihrem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen V gemessen wird. Ginge nämlich V nicht in V' auf; so sey $V' = pV + v$, wo $v < V$. Also $V' - pV = v$. Da nun die gegebenen Zahlen alle in V und V' aufgehen; so gehen sie alle in pV und auch in $V' - pV$, d. i. in v auf (3.). Folglich wäre auch v ein gemeinschaftliches Vielfache der gegebenen Zahlen; also V nicht das kleinste, da $v < V$, gegen die Voraussetzung. Folglich muß $v = o$ seyn, oder V in V' aufgehen. Wäre nun mab nicht das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B; so sey es V. Dann ist $\frac{mab}{V} = g$, eine ganze Zahl, wie so eben bewiesen, und g ist > 1, da $V < mab$. Sey nun $V : A = \alpha$, $V : B = \beta$, wo α, β ganze Zahlen sind, da V ein gemeinschaftliches Vielfache von A, B ist; so ist $V = A\alpha = B\beta$. Da $Vg = mab = ma.b = mb.a = Ab = Ba = A\alpha g = B\beta g$ ist; so ist $b = \alpha g$, $a = \beta g$, und a, b haben demnach noch ein gemeinschaftliches Maaß $g > 1$, welches ungereimt ist, da a, b nothwendig relative Primzahlen seyn müssen, weil m das größte gemeinschaftliche Maaß von A, B seyn soll. Also ist mab das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B.

11. Soll das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Zahlen A, B, C, D, E gesucht werden; so suche man zuerst von A, B das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $= a$ (10.); dann das von a, C, $= b$; dann das von b, D, $= c$; dann das von c, E, $= d$; so ist d das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller gegebenen Zahlen. Daß alle gegebene Zahlen in d aufgehen müssen, und daß folglich d ein gemeinschaftliches Vielfaches derselben ist, erhellet ohne weitere Erläuterung sogleich. Wäre aber nicht d, sondern V das kleinste, so daß $V < d$; so wäre V auch ein gemeinschaftliches Vielfache von A, B, und es müßte also a in V aufgehen, da a das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von A, B ist (10.). Ganz auf ähnliche Art müßte nun auch b; also auch c, und ganz eben so auch d in V aufgehen, welches nicht möglich ist, da $V < d$. Also ist d

das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen.

Theilung einer Größe, bedeutet jede Zerlegung derselben in zwey oder mehrere andere gleichartige Größen auf eine solche Art, daß durch das Zusammennehmen der erhaltenen Größen die gegebene wieder erzeugt wird. Diese Größen nennt man dann Theile der gegebenen. Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammen genommen gleich, aber größer als einer oder einige seiner Theile, sind bekannte Grundsätze der allgemeinen Größenlehre. Steht A zu B in einer solchen Beziehung, daß B durch mehrmalige Wiederholung von A erhalten werden kann; so heißt A ein aliquoter Theil von B, und B wird dann ein Vielfaches von A genannt. Jedes Vielfache eines aliquoten Theils einer Größe heißt ein aliquanter Theil derselben. Alle Brüche sind aliquote oder aliquante Theile der Einheit. Die Theilung der Verhältnisse, s. Verhältniß (15.). Hier betrachten wir nur die Theilung der Zahlen und stetigen Größen. Daß jede Größe in's Unendliche theilbar sey, leidet in der Mathematik keinen Zweifel. Ueber die Theilung physischer Körper sind physikalische Werke nachzusehen.

1. Die Theilung der Zahlen in eine gegebene Anzahl gleicher Theile, oder überhaupt die Theilung nach gegebenen Verhältnissen lehren die Division und die sogenannte Gesellschaftsrechnung, worüber diese Artikel nachzusehen sind.

2. Von der Theilung der Zahlen (de partitione numerorum) ist die Ueberschrift eines wichtigen Kapitels der Introductio in Analysin infinitorum (T. I. Cap. 16.), worin Euler nach einer sehr feinen Methode die Anzahl der möglichen Arten aufzufinden sucht, auf welche eine gegebene ganze Zahl in andere ganze Zahlen getheilt oder zerlegt werden kann. Schon Leibnitz hat auf diese Aufgabe gedacht, denn in einem Briefe an Joh. Bernoulli (1669.) fragt er diesen, ob er wohl gesucht habe, auf wie viele Arten eine gegebene Zahl in

zwey, drey, und mehrere Theile zerlegt werden könne. Die Auflösung setzt er hinzu, scheine ihm schwer, aber werth zu seyn, daß man sie suche. Noch weiter ausgeführt hat Euler die Untersuchung in den Nov. Comm. Petrop. III. 1750. 51., und in der Abhandlung de partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas. Ib. XIV. 1759.

3. Die Aufgabe bietet zwey Fälle dar, jenachdem man die Ungleichheit aller einzelnen Theile zur Bedingung macht, oder das Vorkommen willkührlich vieler gleichen Theile gestattet. Euler geht von zwey sehr leicht durch Induction und den Schluß vom nten auf den $(n+1)$ten Fall zu beweisenden Sätzen aus.

Wenn man das Product

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)\ldots$$

nach Potenzen von z entwickelt; so ist jeder Coefficient einer Potenz von z eine Summe von Potenzen des x, deren Exponenten erhalten werden, wenn man die Combinationen ohne Wiederholungen der sovielten Klasse, als der Exponent der entsprechenden Potenz von z angiebt, für den Zeiger $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rc. entwickelt, und alle einzelnen Combinationen als Summen betrachtet.

Ganz dasselbe gilt von der Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)(1-x^{\delta}z)\ldots}$$

nach Potenzen von z, nur daß man statt der Combinationen ohne Wiederholungen, Combinationen mit Wiederholungen setzt.

In beiden Fällen kann der Zeiger als begränzt oder unbegränzt gedacht werden. Die Beweise übergehen wir, weil sie sich durch wirkliche Entwickelung der obigen Functionen in Reihen leicht ergeben, und dann durch die erwähnte Schlußart zur Allgemeinheit erhoben werden.

4. Nun setze man $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, $\delta=4$ rc., bezeichne die beiden obigen Functionen durch F und F′, und vereinige alle die Potenzen von x, deren Exponenten einander gleich sind, mit einander; so werden die allgemeinen

Glieder der Entwickelungen von F, F' von der Form $Nx^n z^p$, $N'x^n z^p$ seyn, und aus dem Obigen ergiebt sich nun unmittelbar, daß der Coefficient N angiebt, wie oft die Zahl n ohne Wiederholung eines Theils, N' dagegen, wie oft n mit willkührlicher Wiederholung eines Theils, aus p Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, ... zusammengesetzt werden kann, wo wieder diese Reihe als begränzt oder als unbegränzt angenommen werden kann.

5. Nimmt man nun diese Reihe als unbegränzt an; so läßt sich also die Zahl n auf N verschiedene Arten mit der Bedingung der Ungleichheit aller Theile in p Theile, mit verstatteter willkührlicher Wiederholung eines jeden Theiles dagegen auf N' verschiedene Arten in p Theile zerlegen. Es ist aber

$$\begin{aligned} F = \\ 1 + z\ & (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots) \\ + z^2 & (x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + \ldots) \\ + z^3 & (x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + \ldots) \\ + z^4 & (x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + \ldots) \\ + z^5 & (x^{15} + x^{16} + 2x^{17} + 3x^{18} + 5x^{19} + \ldots) \\ + & \ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F' = \\ 1 + z\ & (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots) \\ + z^2 & (x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + \ldots) \\ + z^3 & (x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + \ldots) \\ + z^4 & (x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + \ldots) \\ + z^5 & (x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + \ldots) \\ + & \ldots\ldots; \end{aligned}$$

weiter fortgesetzt in Introd. in A. inf. §§. 300. 304. Es kann also z. B. 10 auf 4 verschiedene Arten in 3 ungleiche Theile (1 + 2 + 7, 1 + 3 + 6, 1 + 4 + 5, 2 + 3 + 5), dagegen z. B. 7 auf 4 verschiedene Arten mit verstatteter Wiederholung in 3 Theile (1 + 1 + 5, 1 + 2 + 4, 1 + 3 + 3, 2 + 2 + 3) zerlegt werden.

Ist der Zeiger die bestimmte Reihe 1, 2, 3 .... α; so beziehen sich die Zerlegungen auch bloß auf Zerlegungen in Glieder dieser bestimmten Reihe, ohne oder mit Wiederholungen, welches immer zu bemerken ist.

6. Setzt man $z = 1$; so werden die allgemeinen Glieder der Entwickelungen von F, F' offenbar Mx,

$M'x^n$, und nun zeigen die Coefficienten M, M' an, auf wie viele verschiedene Arten die Zahl n überhaupt in Theile ohne oder mit Wiederholungen zerlegt werden kann, ohne Rücksicht auf die Anzahl der Theile. Man erhält

$$F = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \dots$$
$$F' = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + \dots$$

so daß also z. B. 5 auf 3 Arten in ungleiche, auf 7 Arten dagegen in Theile überhaupt zerlegt werden kann. Denn es ist $5 = 5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

7. Sey

$$F = (1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z) \dots$$
$$= 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + \dots$$
$$\frac{F}{1 + xz} = (1 + x^2z)(1 + x^3z)(1 + x^4z) \dots$$
$$= 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + \dots$$

wenn man xz für z setzt. Also

$$F = 1 + \left.\begin{matrix} P \\ +1 \end{matrix}\right| xz + \left.\begin{matrix} Q \\ +P \end{matrix}\right| x^2z^2 + \left.\begin{matrix} R \\ +Q \end{matrix}\right| x^3z^3 + \dots$$

woraus sich, wenn man beide Ausdrücke von F mit einander vergleicht, leicht ergiebt:

$$P = \frac{x}{1-x},\ Q = \frac{Px^2}{1-x^2},\ R = \frac{Qx^3}{1-x^3},\ \text{ꝛc.}$$

Also

$$P = \frac{x}{1-x},$$
$$Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)},$$
$$R = \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$
$$S = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},\ \text{ꝛc.}$$

und das allgemeine Glied dieser Coefficientenreihe, d. h. der Coefficient von z^α, offenbar:

$$\frac{x^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots(1-x^\alpha)}.$$

Dieser Bruch in eine Reihe aufgelöset, giebt als allgemeines Glied von F:

$$Nx^{n+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}} \cdot z^\alpha$$

wo also N anzeigt, wie oft $n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ in α ungleiche Theile zerlegt werden kann. Da aber Nx^n offenbar das allgemeine Glied der Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^\alpha)}$$

ist; so zeigt N auch an, wie oft n durch Addition aus Gliedern der Reihe 1, 2, 3 .... α zusammengesetzt werden kann. Dies giebt folgenden merkwürdigen Satz:

Auf eben so viele Arten als eine Zahl n aus Gliedern der Reihe 1, 2, 3 ... α durch Addition erzeugt werden kann, läßt sich die Zahl $n + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ in α ungleiche Theile zerlegen.

8. Sey ferner

$$F' = 1 + P'z + Q'z^2 + R'z^3 + \ldots$$

$$F'(1-xz) = \frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)\ldots}$$

$$= 1 + P'xz + Q'x^2z^2 + R'x^3z^3 + \ldots$$

$$= 1 + \left.\begin{matrix}P'\\-x\end{matrix}\right\} z + \left.\begin{matrix}Q'\\-P'x\end{matrix}\right\} z^2 + \left.\begin{matrix}R'\\-Q'x\end{matrix}\right\} z^3 + \ldots;$$

so führt, wenn man die beiden Ausdrücke von $F'(1-xz)$ mit einander vergleicht, eine ganz ähnliche Behandlung wie vorher zu dem Satze:

Auf eben so viele Arten als man eine Zahl n aus den Gliedern der Reihe 1, 2, 3, ... α durch Addition hervorbringen kann, auf eben so viele Arten läßt sich auch die Zahl $n + \alpha$ in α Theile zerlegen.

9. Das allgemeine Glied der Entwickelung von

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\alpha)}$$

sey $N'x^n$; so kann n auf N' verschiedene Arten aus den Zahlen 1, 2, 3, ... α zusammengesetzt werden. Das allgemeine Glied der Entwickelung von

$$\frac{x^\alpha}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\alpha)}$$

sey $M'x^n = M'x^{n-\alpha} \cdot x^\alpha$; so kann $n-\alpha$ auf M' verschiedene Arten aus den Zahlen 1, 2, 3, ... α zusam=

mengesetzt werden. Zieht man die obigen Brüche und Reihen von einander ab; so erhält man, wenn der Bruch durch $1 - x^{\alpha}$ aufgehoben wird, das allgemeine Glied von

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{\alpha-1})}$$

$= (N' - M')x^n$, so daß also n auf $N' - M'$ verschiedene Arten aus den Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots \alpha - 1$ zusammengesetzt werden kann. Bezeichnet daher

L' die Menge der Arten, auf welche n aus $1, 2, 3, \ldots \alpha - 1$ entstehen kann;

M' die Menge der Arten, auf welche $n - \alpha$ aus $1, 2, 3, \ldots \alpha$ entstehen kann;

N' die Menge der Arten, auf welche n aus $1, 2, 3, \ldots \alpha$ entstehen kann; so hat man die Relation $L' = N' - M'$, $N' = L' + M'$, oder, wenn man überhaupt die Anzahl der Zusammensetzungen einer Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots \alpha$ durch $n^{(\alpha)}$ bezeichnet: $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha-1)} + (n-\alpha)^{(\alpha)}$, wobey nur zu bemerken, daß, wenn $\alpha > n$ ist, offenbar $n^{(\alpha)} = n^{(n)}$, und daß immer $n^{(n)} = n^{(n-1)} + 1$ seyn muß, weil zu $n^{(n-1)}$ augenscheinlich nur noch die Zahl n als Zusammensetzung der n aus $1, 2, 3, \ldots n$ hinzukommt. Weil nun immer $n^{(n)} = n^{(n-1)} + o^{(n)}$; so ist überhaupt $o^{(n)} = 1$ zu setzen. Hiernach ist es nun leicht folgende Tafel zu construiren, wo in der ersten Vertikal- und Horizontalreihe die Werthe von n und α stehen, und in dem Durchschnitt der entsprechenden Vertikal- und Horizontalreihe der Werth von $n^{(\alpha)}$ sich findet:

n	Werthe von α.									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	2								
3	1	2	3							
4	1	3	4	5						
5	1	3	5	6	7					
6	1	4	7	9	10	11				
7	1	4	8	11	13	14	15			
8	1	5	10	15	18	20	21	22		
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97

Als Beispiel der Construction der Tafel mag $12^{(\alpha)}$ dienen. Es ist nämlich

$$12^{(1)} = 12^{(0)} + 11^{(1)} = 1,\quad 12^{(2)} = 12^{(1)} + 10^{(2)} = 7,$$
$$12^{(3)} = 12^{(2)} + 9^{(3)} = 19,\quad 12^{(4)} = 12^{(3)} + 8^{(4)} = 34,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$12^{(11)} = 12^{(10)} + 1^{(11)} = 76,\quad 12^{(12)} = 12^{(11)} + 0^{(12)} = 77.$$

Bey Euler ist die Tafel bis $69^{(11)}$ fortgesetzt.

Durch weitere Zerlegung erhält man

$$n^{(\alpha)} = (n-\alpha)^{(\alpha)} + n^{(\alpha-1)}$$
$$= (n-\alpha)^{(\alpha)} + (n-\alpha+1)^{(\alpha-1)} + n^{(\alpha-2)}$$
$$= (n-\alpha)^{(\alpha)} + (n-\alpha+1)^{(\alpha-1)} + (n-\alpha+2)^{(\alpha-2)} + n^{(\alpha-3)}$$

2c. 2c.

$$= (n-\alpha)^{(\alpha)} + (n-\alpha+1)^{(\alpha-1)} + \ldots + (n-1)^{(1)};$$

also für $\alpha = n$:

$$n^{(n)} = o^{(n)} + 1^{(n-1)} + 2^{(n-2)} + 3^{(n-3)} + \ldots + (n-1)^{(1)}$$

Obige Tafel dient nun auch, um zu bestimmen, in wieviel Theile eine Zahl zerlegt werden kann.

Die gegebene Zahl sey $= m$ und zunächst zu bestimmen, wie oft m in α ungleiche Theile zerlegt werden kann. Sey $m = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} + n$, also $n = m - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$; so läßt sich nach (7.) die Zahl m so oft in α ungleiche Theile zerlegen, als $n = m - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ aus Gliedern der Reihe 1, 2, 3, ... α zusammengesetzt werden kann. Für $m = 24$, $\alpha = 5$, ist $n = 24 - 15 = 9$. Also kann zufolge der Tafel 24 auf 23 verschiedene Arten in 5 ungleiche Theile zerlegt werden. Für $m < \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$ ist das Gesuchte nicht möglich. Es läßt sich z. B. 32 nicht in 8 ungleiche Theile zerlegen, da $1 + 2 + 3 + \ldots + 7 = 28$, $1 + 2 + 3 \ldots + 8 = 36$, jenes zu wenig, dieses zu viel ist. Ist $m = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$, $n = o$; so ist nach dem Obigen $o^{(\alpha)} = 1$ zu setzen. So ist z. B. 36 nur auf eine Art $(1 + 2 + \ldots + 8)$ in 8 ungleiche Theile zerlegbar.

Soll aber bestimmt werden, wie oft m in α Theile mit verstatteten Wiederholungen zerlegt werden kann; so

sey m|$= \alpha + n$, dann ist die gesuchte Zahl $= n^{(\alpha)}$ (8.) Für $m = 16$, $\alpha = 9$ ist $n = m - \alpha = 7$, und $7^{(9)} = 7^{(7)} = 15$, also 16 auf 15 verschiedene Arten in 9 Theile zerlegbar. Für $m = 32$, $\alpha = 5$, $n = 27$, ist, wenn die Tafel weiter fortgesetzt würde, $n^{(\alpha)} = 480$, so daß also 32 auf 480 Arten in 5 Theile zerlegt werden kann. Für $\alpha > m$ ist das Gesuchte natürlich unmöglich.

10. Der zweite Theil der Aufgabe über die Theilung der Zahlen, welchen Euler unberührt gelassen hat, besteht in der wirklichen Aufstellung der möglichen Zerfällungen. Um diesen Theil hat sich Hindenburg vorzügliche Verdienste erworben, indem er die Analysis mit bestimmten Regeln zur Aufstellung der von ihm sogenannten Combinationen zu bestimmten Summen bereicherte. Sollen also z. B. alle möglichen Zerlegungen der Zahl 12 in 5 Theile entwickelt werden; so entwickelt man die Combinationen der 5ten Klasse zur Summe 12, wozu im Art. Combination. IV. Anleitung ertheilt ist. Die Zerlegungen in ungleiche Theile lassen sich aus diesen leicht aussondern. Eulers Untersuchungen hat vorzüglich der berühmte Paoli weiter verfolgt, und sie auf die Integration gewisser Differenzengleichungen reducirt. Paoli Opuscula. Opusc. II. Memorie della Societa italiana. T. I. P. II. Auch zu vergleichen: Lacroix Traité du calc. diff. etc. III. p. 461. Euler bemerkt noch, daß um das Product

$$P = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \ldots$$
$$= 1 + px + qx^2 + rx^3 + sx^4 + \ldots$$

zu entwickeln, zu setzen sey:

$$\frac{P}{1+x} = 1 + px^2 + qx^4 + rx^6 + \ldots,$$
$$P = 1 + x + px^2 + px^3 + qx^4 + qx^5 + \ldots$$

woraus $p = 1$, $q = p$, $r = p$, $s = q$, $t = q$, u. s. w.

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

folgt. Hieraus ergiebt sich (3.), da die Exponenten die natürlichen Zahlen, die Coefficienten alle $= 1$ sind, daß jede Zahl aus den Gliedern der geometrischen Reihe 1, 2, 4, 8, ꝛc., aber jede nur auf einmal ohne Wiederholun-

gen zusammengesetzt werden kann. Also kann man mit Gewichten von 1, 2, 4, 8, ꝛc. ℔ jede Last von ganzen Pfunden abwägen. Mit 1 ℔, 2 ℔, 4 ℔, bis 512 ℔ z. B. jede Last bis 1024 ℔, welches die Summe dieser Gewichte ist.

11. Der Linientheilung hatten die Alten mehrere besondere Arten. Die Theilung einer geraden Linie in gleiche Theile, und nach gegebenen Verhältnissen lehrt Euclides VI. 9. 10., die Halbirung besonders I. 10.

12. Die Theilung einer Linie a nach dem äußern und mittlern Verhältniß (Sectio in extrema et media ratione. Sectio divina) verlangte a so in zwei Theile x, y zu theilen, daß, wenn $x > y$, $a:x = x:y$. S. Thl. I. S. 91. S. 109. Elem. II. 11. VI. 30.

13. Was man harmonische Theilung nannte s. Thl. II. S. 698. Um AB (Fig. 1.) harmonisch zu theilen, ziehe man nach dem willkührlichen Puncte P die Linien AP, BP, nehme in AB den Punkt C willkührlich an, ziehe CE mit AP parallel, mache $CF = CE$, und ziehe FP; so ist AB in C, D harmonisch getheilt. Denn es ist $AB:BC = AP:CE = AP:CF = AD:CD$. Die Linien AP, BP, CP, DP heißen Harmonikalen. P ist willkührlich.

14. Eine Haupteigenschaft der harmonischen Theilung ist, daß, wenn man (Fig. 2.) die Linie GK mit einer, AP, der Harmonikalen parallel zieht, zwischen zweien der andern Harmonikalen, diese Linie von PC in H halbirt wird. Zieht man nämlich DM mit AP parallel; so ist $AB:BD = AP:DM$, $CD:AC = DL:AP$. Also $AB.CD:BD.AC = DL:DM$. Aber wegen der harmonischen Theilung $AB.CD = AD.BC$. Folglich $BD.AC = (BC+CD)(AD+CD) = AD.BC+(BC+AD+CD).CD = AD.BC + AB.CD = AB.CD + AB.CD = 2AB.CD$. Also auch $DM = 2DL$, $DL = LM$, und folglich, weil GK mit DM parallel, auch $GH = HK$.

15. Zieht man umgekehrt durch die Endpunkte G, K und die Mitte H einer geraden Linie GK und durch einen willkührlichen Punkt P gerade Linien BP, CP, DP, und mit GK die Parallele AP; so sind diese vier Linien Harmonikalen, d. i. jede zwischen ihnen gezogene gerade Linie AB

wird von ihnen harmonisch geschnitten. Zieht man nämlich DM mit AP parallel; so ist, weil es auch parallel mit GK und GH = HK ist, auch DL = LM, DM = 2DL. Ganz wie vorher erhält man AB.CD : BD.AC = DL : DM. Also BD . AC = 2AB . CD = (BC + CD)(AD + CD) = BC . AD + AB . CD, AB . CD = BC . AD, AB : BC = AD : CD, d. i. AB in C, D harmonisch getheilt. Zugleich erhellet hieraus, daß jede zwischen Harmonikalen gezogene gerade Linie von ihnen harmonisch getheilt wird.

16. Sind AB, AB′ (Fig. 3.) zwei harmonisch getheilte Linien; so schneiden BB′, CC′, DD′ einander in einem Puncte, oder sind parallel. Schneiden CC′, DD′ einander in P; so ziehe man BP. Schnitte diese AB′ in B″; so wäre, da BP, CP, DP, AP Harmonikalen sind, auch AB″ harmonisch getheilt (15.). Also wäre

$$AB' . C'D' = B'C' . AD', \quad AB'' . C'D' = B''C' . AD',$$

woraus durch Subtraction:

$$B'B'' . C'D' = B'B'' . AD'.$$

Folglich C′D′ = AD′, und, wegen des Obigen, auch AB′ = B′C′, welches ungereimt ist. Also muß B″ mit B′ zusammenfallen.

17. Wenn von den Endpunkten E, F (Fig. 4.) einer Sehne nach einem dritten Punkte G gerade Linien EG, FG gezogen werden; so wird der auf der Sehne senkrechte Durchmesser von diesen Linien und dem Kreise harmonisch getheilt. Man ziehe AE, AF, GD; so ist, weil AEGD ein Viereck im Kreise, BGD = EAB = FAD = HGD. Also (Dreieck 9.) BD : HD = BG : GH, und BG : GD = AB : AE = AB : AF, GD : GH = AF : AH. Also auch BG : GH = AB : AH, woraus, verglichen mit der ersten Proportion, AB : AH = BD : HD.

18. Besonders gehört auch noch hierher die Sectio determinata (Thl. I. S. 293.) des Apollonius, und in gewisser Rücksicht auch die Sectio rationis (Thl. I. S. 114.) und Sectio spatii (Thl. I. S. 116.).

19. Für Geodäsie und praktische Astronomie sind Theilungen einer Linie oder eines Bogens in eine große Anzahl gleicher Theile sehr wichtig. Hülfsmittel dazu sind der ver-

jüngte Maaßstab, Transversalen, vorzüglich aber der Nonius oder Vernier. Ist nämlich eine Linie a in n gleiche Theile getheilt, so theile man diese Linie auch in n—1 gleiche Theile, so daß a = nx = (n—1)y. Dann ist

$$x = \frac{a}{n},\ y = \frac{a}{n-1},\ y - x = \frac{a}{n(n-1)}$$

und durch die Differenz y—x wird also a in n(n—1) gleiche Theile getheilt. Die in n—1 gleiche Theile getheilte Linie a heißt der Nonius oder Vernier, und wird bei Instrumenten zur Längenmessung als ein neben der Scala verschiebbares Stück Messing, bei Winkelmessern in Gestalt eines solchen Bogens, angebracht. Bey den trefflichen Pistor'schen Heberbarometern — wir wählen dieses Beispiel, um den Gebrauch des Nonius recht deutlich zu machen — ist die Scala unmittelbar in halbe Linien getheilt, und der Nonius ist ein an der Scala verschiebbares Stück Messing, durch welches die Barometerhöhe abgeschnitten wird, und auf welchem 26 halbe Linien in 25 gleiche Theile getheilt sind, so daß also hier a = 26.0‴,5, y — x = 0‴,02. Bey so kleinen Theilen, wird nun offenbar immer ein Theilstrich des Nonius mit einem Theilstriche der Scala sehr genau zusammenfallen. Bey diesem Theilstriche stehe auf dem Nonius die Zahl α; so ist der Theil des Nonius bis an das Quecksilberniveau = αy, und der entsprechende Theil der Scala = αx. Letztern giebt die Scala unmittelbar an. Da aber y > x, αy > αx ist; so ist noch das Theilchen αy — αx zu messen. Dieses ist = α(y—x) = α.0‴,02, und folglich auf diese Art durch den Nonius unmittelbar gefunden. Der Bequemlichkeit wegen tragen die Theile des Nonius die geraden Zahlen von 0 bis 50, so daß also statt α eigentlich 2α auf dem Nonius steht, welches das Ablesen erleichtert, indem α.0‴,02 = 2α.0‴01, so daß also die Zahlen des Nonius unmittelbar 0‴,01 angeben. Nach dieser Erläuterung wird man sich leicht in den Nonius eines jeden andern Instruments finden können. M. s. auch über die Geschichte des Nonius und seinen Erfinder Kästners G. d. M. III. S. 353., Geom. Abh. II. 38., Astron. Abh. II. S. 142., wo auch noch viele andere Nachrichten über feine Theilungen zu finden.

20. Ueber Winkel- und Bogentheilungen s. m. den Artikel Trisection des Winkels. Ueber die Theilung des ganzen Kreises den Artikel Vieleck. Manche für den Künstler brauchbare Theilungsmethode, welche nur den Gebrauch des Zirkels, nicht des Lineals erheischt, giebt Mascheroni Gebrauch des Zirkels, übers. v. Grüson. Berlin. 1825. Mascheroni sucht nämlich den Gebrauch des Lineals oder der geraden Linie bei geometrischen Constructionen auszuschließen, welches, wegen der größern Genauigkeit, die der bloße Gebrauch des Zirkels gewährt, für praktische Arbeiten nicht ohne Wichtigkeit ist.

21. Lagny's Methode (Mém. de Paris. 1724.) Winkel zu messen, oder auch kleine Theile von Linien mit gegebenen Linien zu vergleichen, besteht in Folgendem. Der gegebene Winkel oder Bogen sey $= \alpha$. Man ziehe α so oft es angeht von der halben Peripherie π ab, und finde $\pi = m\alpha + \beta$; eben so verfahre man mit β in Bezug auf α, und finde $\alpha = n\beta + \gamma$, $\beta = p\gamma + \delta$, $\gamma = q\delta + \varepsilon$, u. s. f. Dies giebt leicht

$$\frac{\pi}{\alpha} = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \ldots}}}$$

$$\alpha = \pi \cdot \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \ldots}}}}$$

das Verhältniß von α zu π, desto genauer, je weiter man obiges Verfahren fortgesetzt hat. Für die Bestimmung kleiner Theile gerader Linien kann man dasselbe Verfahren auf ähnliche Art anwenden. Vergl. Verhältniß. (5.)

22. Von der Theilung der Figuren durch Zeichnung und durch Rechnung ist schon in dem Artikel Figur (32.) ausführlich genug gehandelt. Zu der dort angeführten Literatur ist als das ausführlichste Werk über diesen Gegenstand jetzt noch zu erwähnen: Geodäsie von Grüson. Halle. 1811., wo das Wort Geodäsie in seiner eigentlichen etymologischen Bedeutung gebraucht ist. Außerdem noch Christiani Lehre von der geometrischen und ökonomischen

Vertheilung der Felder. Gött. 1793., und M. Hirsch geometrische Aufgaben. Erste Sammlung. Berl. 1805. Schon Euclides soll über die Theilung der Figuren geschrieben haben. (Proclus in Euclid. p. 20. 40.), *Διαιρέσεις* oder *τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον*. Johann Dee in England fand ein arabisches Manuscript de divisionibus superficierum von Mahometus Bagdedinus (etwa im 10. Jahrh. v. C.), glaubte wegen seiner Eleganz, daß es keinen Araber zum Verfasser haben könne, legte es dem Euclid bey, übersetzte es in's Latein, und überließ es an Fed. Commandinus, der es herausgab: Euclides de divisionibus, cura Federici Commandini. Pisauri. 1570. Dies erzählt Gregory in seinem Euclides. M. s. auch Kästner in der Vorrede zu dem angeführten Werke von Christiani. Die Schrift ist in Gregorys Ausgabe abgedruckt. Montucla (I. p. 216.) nennt sie un assez élégant traité. Schon Savilius zweifelte, daß die Schrift von Euclides herrühre. Indeß ist die Sache nicht als ausgemacht anzusehen. Auch Gartz (De interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis. Halae. 1823. p. 5.) führt unter den Schriften des Euclides aus arabischen Schriftstellern ebenfalls librum de divisionibus a Thabeto emendatum, und p. 38. unter den Schriften des Thabet Ben Corrah eine Schrift unter demselben Titel an.

23. Die Theilung eines Halbkreises und einer Ellipse nach einem gegebenen Verhältnisse aus einem gegebenen Punkte des Durchmessers lehrt Keplers Aufgabe. Eine Theilung der Kugelfläche s. Kugel. 51.

Theorem, s. Lehrsatz. Besonders merkwürdige und wichtige Theoreme werden oft durch besondere Benennungen ausgezeichnet, oder nach ihrem Erfinder benannt. Z. B. Theorema binomiale, der binomische Lehrsatz; Polynomialtheorem; der pythagoräische und cotesische Lehrsatz; Taylors und Lagranges Lehrsätze; Fermats und Wilsons Sätze in der Theorie der Zahlen, Harriots Lehrsatz.

Theoretisch, s. Theorie.

Theorie, nennt man in der Mathematik überhaupt die Verbindung aller sich auf einen bestimmten Gegenstand beziehenden Sätze zu einem streng systematischen Ganzen, wobey der Artikel System verglichen werden kann. Beispiele sind die Theorie der Binomial-Coefficienten, der Combinationen, der Facultäten, der Gleichungen, u. s. f. Théorie des fonctions ist der Titel eines wichtigen Werkes von Lagrange, worin die Gründe der sogenannten höheren oder Analysis des Unendlichen nach ganz eigenthümlichen Ansichten rein analytisch entwickelt sind. Bezout hat eine Théorie génerale des équations, welche vorzüglich der Lehre von der Elimination gewidmet ist, geschrieben, und Laplace in seiner Théorie analytique des probabilités eins der tiefsinnigsten Werke des menschlichen Geistes geliefert, worin die Lehre von der Wahrscheinlichkeit sehr ausführlich und höchst scharfsinnig entwickelt ist. Aus der angewandten Mathematik gehören u. A. hierher Eulers Theoria motus corporum solidorum s. rigidorum, Theoria motuum planetarum et cometarum, Theoria Musices, vorzüglich aber die Theoria motus corporum coelestium, in sectionibus conicis solem ambientium von Gauß.

Die theorische Astronomie lehrt uns die wahren Bewegungen der Weltkörper kennen, nachdem sie in der sphärischen betrachtet worden waren, wie sie dem Auge des an die Erde gebundenen Beobachters erscheinen.

Der Theorie entgegengesetzt ist die Praxis, welche die in der Theorie gewonnenen Sätze auf Vorfälle des gemeinen Lebens anzuwenden strebt, woraus z. B. der Begriff einer praktischen Geometrie oder Feldmeßkunst, praktischen Mechanik, u. s. f. entspringt. Die praktische Astronomie ertheilt nebst einer genauen Kenntniß der Instrumente, Anleitung zu astronomischen Beobachtungen und Rechnungen.

Theoretische Sätze nennt man solche, in welchen irgend eine Wahrheit ausgesprochen wird, die also irgend eine Behauptung aufstellen, einen wirklichen Inhalt haben. Jenachdem sie keines oder eines Beweises bedürfen, nennt

man sie Grund- oder Lehrsätze. Praktische Sätze verlangen immer etwas zu thun, und sind, auf ähnliche Art wie die vorigen unterschieden, entweder Forderungen oder Aufgaben. Zu allen diesen kommen dann im mathematischen Systeme noch Erklärungen, Zusätze, und Anmerkungen oder Scholien.

Theorisch, s. Theorie.

Thesis, nennt man den zweiten Theil in dem Ausdrucke eines Lehrsatzes, die Folgerung aus der Voraussetzung oder Hypothesis, die eigentliche Behauptung des Satzes, das was bewiesen werden soll. Es ist gut, vorzüglich bey dem Unterrichte der Anfänger, bey jedem Satze die Hypothesis und Thesis immer streng von einander zu sondern. Z. B. Hyp. Wenn in einem Dreieck zwei Seiten einander gleich sind; Thes. so sind auch die denselben gegenüberstehenden Winkel einander gleich. Der Beweis ist immer zunächst aus der Hypothesis herzuleiten.

Thurmförmige Zahl, s. Pyrgoidalzahl.

Tiefe, heißt in der Perspective die senkrechte Entfernung eines hinter der Tafel liegenden Punktes von derselben (Karstens Anfangsgründe. III. S. 97.) Schiefe Tiefe des Punktes S (Thl. III. Fig. 145.) nennt Karsten (Lehrbegriff VII. S. 147.) die Linie SA.

Tractio, s. Tractoria.

Tractoria, Tractrix, Tractio oder auch Zuglinie heißt jede Curve, bey welcher der zwischen dem Berührungspunkte und irgend einer andern gegebenen Curve, welche die Directrix genannt wird, liegende Theil der Berührenden eine constante Größe hat. Diese constante Größe soll der Parameter genannt und durch a bezeichnet werden.

1. Eine solche Curve entsteht, wenn das eine Ende eines völlig biegsamen Fadens, an dessen anderm Ende

sich ein schwerer Punkt befindet, auf einer gegebenen Curve in einer horizontalen Ebene fortbewegt wird. Der schwere Punkt beschreibt die Tractoria. Clairaut hat in den Mém. de Paris. 1736. gezeigt, daß zum Fortbewegen des Fadens nur so viel Kraft angewandt werden muß, als zur Ueberwindung der Friction erforderlich ist, damit die Berührende der beschriebenen Curve immer in die Richtung des Fadens fällt. Diese Entstehungsart hat zu dem Namen Veranlassung gegeben.

2. Die Gleichung der Directrix sey $\varphi(x', y') = o$, und x, y seyen in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem die Coordinaten der Tractoria. Die Länge der Berührenden ist

$$= y\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}},$$

wie sich leicht aus der Formel für die Subtangente (Berührende Linie 13.) ergiebt.

Sey nun $z = Au + B$ die Gleichung der Berührenden; so ist, wenn α den Winkel derselben mit der Abscissenaxe bezeichnet:

$$A = \tan g\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

(Linie, gerade 16. Berührende Linie 14.). Also

$$z = \frac{\partial y}{\partial x} u + B.$$

Weil aber die Berührende immer durch den Endpunkt der Ordinate geht; so ist

$$y = \frac{\partial y}{\partial x} x + B.$$

Also die Gleichung der Berührenden:

$$z - y = \frac{\partial y}{\partial x}(u - x).$$

Sind nun x', y' die Coordinaten des Punktes, in welchem die Berührende die Directrix trifft, und u' ist die Abscisse des Punktes, in welchem die Berührende die Abscissenaxe schneidet; so ist

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x), \; - y = \frac{\partial y}{\partial x}(u' - x), \; u' = x - \frac{y\partial x}{\partial y}.$$

Folglich ist das Stück der Berührenden zwischen der Directrix und der Abscissenaxe

$$= \sqrt{\left(x' - x + \frac{y\partial x}{\partial y}\right)^2 + y'^2}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{(y'-y)\,\partial x}{\partial y} + \frac{y\partial x}{\partial y}\right\}^2 + y'^2} = \sqrt{y'^2\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)}.$$

Liegt nun die Directrix mit der Tractoria auf einer Seite der Abscissenaxe; so muß man das so eben bestimmte Stück von der Länge der Berührenden subtrahiren. Liegen die beiden Curven aber auf entgegengesetzten Seiten der Abscissenaxe; so muß man dieses Stück zu der Länge der Berührenden addiren. Da aber, wenn man y als positiv ansieht, y' im ersten Falle positiv, im zweiten negativ ist; so erhält man:

$$a = y\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}} \mp \sqrt{y'^2\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)}$$

$$= y\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}} - y'\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}} = (y - y')\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}}.$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen:

$$\varphi(x', y') = 0,$$

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x),\ a = (y - y')\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}}$$

die Größen x', y'; so erhält man die Differentialgleichung der Tractoria.

3. Die merkwürdigste und am meisten untersuchte Tractoria ist die Hugenische (Hugenii Opp. varia. T. II. p. 517.), deren Directrix die gerade Linie ist. Nimmt man die Directrix als Axe der Abscissen an; so ist $y' = 0$, und folglich

$$a = y\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}},\ \partial x = \frac{\partial y\sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

die Differentialgleichung dieser Curve.

Um sie zu integriren, setze man $a^2 - y^2 = z^2$; so erhält man

$$\partial x = \partial z - \frac{a^2\partial z}{a^2 - z^2},$$

$$x = z - a^2\int\frac{\partial z}{a^2 - z^2} = z - a^2\int\frac{\partial z}{(a-z)(a+z)}$$

$$= z - a^2\int\left\{\frac{\partial z}{2a(a-z)} + \frac{\partial z}{2a(a+z)}\right\}$$

$$= z - \tfrac{1}{2} a \int \frac{\partial z}{a-z} - \tfrac{1}{2} a \int \frac{\partial z}{a+z}$$

$$= z - \tfrac{1}{2} a \operatorname{logn} \frac{a+z}{a-z} + C.$$

(Integralformel. 5.)

Hieraus erhält man leicht:

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a. \operatorname{logn} \sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-y^2})^2}{y^2}} + C$$

$$= \sqrt{a^2-y^2} - a. \operatorname{logn} \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} + C.$$

Die Constante ist durch irgend eine gegebene Bedingung, etwa daß die Tractoria durch einen gegebenen Punkt gehen soll, zu bestimmen.

4. Für $y = 0$ wird $x = \infty$. Also ist die Directrix die Asymptote der Tractoria.

Die Gleichung der Berührenden ist nach (2.):

$$z - y = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} (u-x).$$

Die Subtangente ist $= \sqrt{a^2-y^2}$. Auch ist tang $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$. Für $\alpha = 90^0$ ist tang $\alpha = \infty$. Also $a^2 - y^2 = 0$, $y = \pm a$. Für größere Ordinaten werden die Abscissen imaginär. Also ist $y = \pm a$ die größte Ordinate auf beiden Seiten der Abscissenaxe.

Nimmt man den Punkt, in welchem die Berührende auf der Axe der x senkrecht ist, als Anfang der Coordinaten an; so ist $y = a$ für $x = 0$. Also $0 = - a \operatorname{logn} \frac{a}{a} + C = C$ und folglich die Gleichung der Tractoria:

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a \operatorname{logn} \sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-y^2})^2}{y^2}}$$

Für ein negatives y bleibt x völlig ungeändert, so daß also die Tractoria auf beiden Seiten der Abscissenaxe auf völlig gleiche Art liegt. Um dies deutlich zu übersehen, ist die Quadratwurzel aus dem Bruche unter logn absichtlich nicht ausgezogen worden, so wie es denn überhaupt zuweilen vortheilhaft erscheint, die Gleichungen der Curven unverkürzt beizubehalten.

Eben so gehören, da man $\sqrt{a^2-y^2}$ positiv und negativ nehmen kann, zu jeder Ordinate zwei Abscissen, welche aber einander gleich und entgegengesetzt sind. Denn

$$x = -\sqrt{a^2-y^2} - a \log n \sqrt{\frac{(a-\sqrt{a^2-y^2})^2}{y^2}}$$
$$= -\sqrt{a^2-y^2} - a \log n \sqrt{\frac{y^2}{(a+\sqrt{a^2-y^2})^2}}$$
$$= -\left\{\sqrt{a^2-y^2} - a \log n \sqrt{\frac{(a+\sqrt{a^2-y^2})^2}{y^2}}\right\}$$

Also liegt die Curve auch auf beiden Seiten der Ordinatenaxe völlig auf einerley Art, und hat demnach in jedem Endpunkte der beiden größten Ordinaten $\pm$ a eine Spitze.

Zieht man die Quadratwurzel wirklich aus, nimmt $\sqrt{a^2-y^2}$ positiv und negativ, und multiplicirt im letztern Falle den Bruch unter logn im Zähler und im Nenner mit $a+\sqrt{a^2-y^2}$; so entspricht die Gleichung

$$x = \sqrt{a^2-y^2} - a. \log n \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

eigentlich dem Zweige BD (Fig. 5.), die Gleichung

$$x = -\sqrt{a^2-y^2} + a \log n \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

dagegen dem Zweige BC, da im ersten Falle von y = a bis y = o die Abscisse von o bis $-\infty$ abnehmen, im andern dagegen von o bis $+\infty$ zunehmen muß, übereinstimmend mit den obigen beiden Gleichungen. Im Folgenden werden wir, da alle vier Zweige dieselben Eigenschaften haben, immer nur den Zweig BC betrachten, und daher

$$x = a \log n \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$$

als Gleichung der Hugenischen Tractoria zum Grunde legen.

5. Der Bogen der Tractoria sey = s; so ist (Rectification. 5[a].)

$$\partial s = \partial y \sqrt{1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}} = \partial y \sqrt{\frac{a^2}{y^2}} = \pm \frac{a \partial y}{y},$$

wo das untere Zeichen genommen werden muß, da offenbar s zunimmt, wenn y abnimmt. Also $s = -a\int\frac{\partial y}{y}$ $= -a \log n\, y + C$. Für y = a ist s = o. Also $o = -a \log n\, a + C$, $C = a \log n\, a$, $s = a \log n \frac{a}{y}$.

Huygens giebt folgende Construction dieser Formel. (M. s. Karstens Lehrbegriff. II. 2. S. 390. Essay d'Analyse sur les jeux de hazard (par Montmort).

Paris. 1713. p. 357. 260.) Aus A (Fig. 6.) als Mittelpunkt beschreibe man, um die Länge des Bogens BP zu finden, mit AD = PQ als Radius, einen Kreis DF, errichte auf AB durch B das Perpendikel BE, und beschreibe einen zweiten Kreis, dessen Mittelpunkt in BE liegt, der durch B geht, und den ersten Kreis (in F) berührt. Dann ziehe man AFE, beschreibe aus A mit AB einen Kreis, welcher AFE in G schneidet; so ist die der Aa parallele GK dem Bogen BP gleich. Sey BE = r, AQ = x, PQ = y, AB = a; so folgt aus der Construction leicht:

$$(r + y)^2 = a^2 + r^2,\ r = \frac{a^2 - y^2}{2y},$$

$$AE : BE = AG : GH,\ r + y : r = a : GH,$$

$$GH = \frac{ar}{r + y} = \frac{a(a^2 - y^2)}{a^2 + y^2};$$

$$AE : AG = AB : AH,\ r + y : a = a : AH,$$

$$AH = \frac{a^2}{r + y} = \frac{2a^2 y}{a^2 + y^2}.$$

Da nun HK die zu der Ordinate AH gehörende Abscisse ist; so erhält man, wenn der gefundene Werth von AH für y in die Gleichung der Tractoria gesetzt wird:

$$HK = a \operatorname{logn} \frac{a}{y} - \frac{a(a^2 - y^2)}{a^2 + y^2}.$$

Also $GH + HK = GK = a \operatorname{logn} \frac{a}{y}$, d. i. $GK = s$.

6. Für den Zweig BC nimmt y ab, wenn x zunimmt. Also ist für diesen Zweig, wenn man die Quadratwurzel immer als positiv ansieht:

$$\partial x = -\frac{\partial y \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \quad (3.)$$

Folglich, wenn S die Area ABPQ bezeichnet (Quadratur. 8.):

$$S = -\int \partial y \sqrt{a^2 - y^2} = -\int \frac{(a^2 - y^2)\,\partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$= -a^2 \int \frac{\partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \int \frac{y^2 \partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$= -a^2 \int \frac{\partial . \frac{y}{a}}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}} + \int \frac{y^2 \partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$= - a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a} + \int \frac{y^2 \partial y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

(Differentialformeln. 29.).

Ferner ist

$$- 2\int \partial y \sqrt{a^2 - y^2} = - a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a} + \int \left(\frac{y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - y^2} \right) \partial y$$

$$= - a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a} - \int \left\{ \partial y \sqrt{a^2 - y^2} + y (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (- y \partial y) \right\}$$

$$= - a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a} - \int \left\{ \partial y \sqrt{a^2 - y^2} + y \cdot \tfrac{1}{2} (a^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial (a^2 - y^2) \right\}$$

$$= - a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a} - \int (\partial y \sqrt{a^2 - y^2} + y \partial \sqrt{a^2 - y^2})$$

$$= - a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a} - \int \partial . y \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$= - a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a} - y \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$S = - \tfrac{1}{2} a^2 \text{ Arc sin } \frac{y}{a} - \tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2} + C$$

Für $y = a$ wird $S = 0$. Also $C = \frac{1}{4} a^2 \pi$, und folglich

$$S = \tfrac{1}{2} a^2 \left(\tfrac{1}{2} \pi - \text{Arc sin } \frac{y}{a} \right) - \tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} a^2 \text{ Arc cos } \frac{y}{a} - \tfrac{1}{2} y \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Für $y = 0$ wird $S = \frac{1}{4} a^2 \pi$, so daß also der ganze Raum CBAa dem Quadranten eines Kreises gleich ist, dessen Halbmesser $= a$.

7. V sey der Inhalt des durch die Umdrehung von BAPQ (Fig. 6.) um AB entstandenen Körpers; so ist (Cubirung.)

$$V = - \pi \int y \partial y \sqrt{a^2 - y^2},$$

woraus sich, für $a^2 - y^2 = z^2$, leicht ergiebt:

$$V = \pi \int z^2 \partial z = \tfrac{1}{3} \pi z^3 = \tfrac{1}{3} \pi \sqrt{(a^2 - y^2)^3} + C.$$

Aber $V = 0$ für $y = a$. Also

$$V = \tfrac{1}{3} \pi \sqrt{(a^2 - y^2)^3}.$$

Für $y = 0$ wird $V = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} a^3 \pi$, so daß also der Inhalt des durch die Umdrehung von CBAa um AB entstandenen Körpers dem vierten Theile einer Kugel mit dem Halbmesser a gleich ist.

8. Die Oberfläche des mit V bezeichneten Körpers sey $= v$; so ist (Complanation): $v = 2\pi \int y \partial s = -2\pi \int a \partial y = -2\pi a y + C$, $o = -2a^2\pi + C$, $v = 2a\pi(a-y)$, und, für $y = o$, $v = 2a^2\pi$. Also ist die von der Tractoria beschriebene krumme Oberfläche des durch die Umdrehung von CBAa um AB entstandenen Körpers der krummen Seitenfläche eines geraden Cylinders gleich, dessen Höhe und Halbmesser $= a$ sind.

9. Denkt man sich durch B (Fig. 7.) eine gleichseitige Hyperbel beschrieben, deren Halbaxe $= AB = a$ ist, und durch irgend einen Punkt G derselben die Berührende GE gezogen; so ist, wenn FE mit Aa parallel ist, der hyperbolische Raum EBG dem Dreyeck ABF gleich. Sey $AE = FH = y$, $AH = FE = x$; so ist (4.)

$$EF = a \,\text{logn} \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

$\triangle ABF = \frac{1}{2} ax = \frac{1}{2} a^2 . \text{logn} \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \frac{1}{2} a \sqrt{a^2 - y^2}$.
Ist nun $KB = u$, $KG = z$; so ist (Hyperbel. 32.) $z^2 = 2au + u^2$. Die Subtangente $KE = \frac{z \partial u}{\partial z} = \frac{2au + u^2}{a + u} = KB + BA - AE = u + a - y$. Also $u = \frac{a(a-y)}{y}$. Da nun $a + u = \frac{a^2}{y}$, $2au + u^2 = \frac{a^2(a^2 - y^2)}{y^2}$ ist; so giebt die Formel (Quadratur. 91.) den hyperbolischen Raum BKG =

$$\frac{a^3}{2y^2} \sqrt{a^2 - y^2} - \frac{1}{2} a^2 . \text{logn} \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

wenn in jener Formel nur $\frac{b}{2a}$ statt des falschen $\frac{b}{a}$ gesetzt wird. Setzt man in die Gleichung der Hyperbel für u den gefundenen Ausdruck; so erhält man:

$$z = \frac{a}{y} \sqrt{a^2 - y^2},$$

und auf gleiche Art $KE = \frac{a^2 - y^2}{y}$. Hieraus ergiebt sich

$$\triangle KEG = \tfrac{1}{2} KE . z = \frac{a^3}{2y^2} \sqrt{a^2 - y^2} - \tfrac{1}{2} a . \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Zieht man hiervon BKG ab, so erhält man für BEG denselben Ausdruck, welchen wir vorher für $\triangle$ ABF gefunden

haben. Also BEG = △ ABF. Wegen dieser Eigenschaft nennt Huygens (Act. Erud. 1693. p. 476.) seine Tractoria quadratricen hyperbolae. Indeß eignet auch Guido Grandi sich die Entdeckung derselben zu (Hugenii Opp. reliqua. V. I. p. 288.

10. Ueber BC (Fig. 7.) denke man sich, senkrecht auf der Ebene der Figur, eine cylindrische Fläche errichtet, und lege unter einem Winkel = α durch Aa eine Ebene, welche die Cylinderfläche in einer gewissen Linie durchschneidet. Nennt man die Coordinaten dieser Linie, wenn man sich die Cylinderfläche in eine Ebene abgewickelt denkt, x', y'; so ist klar, daß $x' = a \operatorname{logn} \frac{a}{y}$ (5.), $y' = y \operatorname{tang} \alpha$; $\frac{x'}{a} = \operatorname{logn} \frac{a}{y}$, $e^{\frac{x'}{a}} = \frac{a}{y}$. Folglich die Gleichung des Schnitts:

$$y' = a e^{-\frac{x'}{a}} \operatorname{tang} \alpha.$$

Die Subtangente dieser Curve ist = — a, also constant, und folglich die Curve eine Logistica. (Logarithmische Linie. 4.). Für $\alpha = 45^0$ ist die Gleichung $y = a e^{-\frac{x'}{a}}$.

Sind x', y' die Coordinaten des Durchschnitts in der durch Aa gelegten Ebene; so ist

$$x = x', \; y = \frac{y'}{\sec \alpha},$$

welches, in die Gleichung der Tractoria gesetzt, giebt:

$$x' = a \operatorname{logn} \frac{a + \sqrt{a^2 - y'^2 \cos \alpha^2}}{y' \cos \alpha} - \sqrt{a^2 - y'^2 \cos a^2}.$$

Die vorher bewiesene merkwürdige Eigenschaft der Tractoria rührt ebenfalls von Guido Grandi her. (A. a. O. p. 312.)

11. Sey jetzt die Directrix ein Kreis, dessen Halbmesser = r ist. Den Anfang der Coordinaten nehme man als Pol an, und bezeichne die polaren Coordinaten der Directrix und der gesuchten Tractoria, durch φ', z' und φ, z; so ist, wenn der Mittelpunkt des gegebenen Kreises als Anfang der Coordinaten angenommen wird:

$$z' = r,\ x' = z'\cos\varphi',\ y' = z'\sin\varphi';\ x = z\cos\varphi,\ y = z\sin\varphi.$$

$$\partial x = \cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi,\ \partial y = \sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi;$$

$$1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}{(\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi)^2}$$

Nach gehöriger Substitution geben die Gleichungen in (2.):

$$\frac{z'\sin\varphi' - z\sin\varphi}{\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi} = \frac{z'\cos\varphi' - z\cos\varphi}{\cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi},$$

$$\frac{z\sin\varphi - z'\sin\varphi'}{\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi} = -\frac{a}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}},$$

$$\frac{z\cos\varphi - z'\cos\varphi'}{\cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi} = -\frac{a}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}}.$$

Folglich da $z' = r$ ist:

$$r\cos\varphi' = z\cos\varphi - \frac{a(\cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi)}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}},$$

$$r\sin\varphi' = z\sin\varphi - \frac{a(\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}}.$$

Erhebt man auf beiden Seiten in's Quadrat und addirt; so erhält man:

$$r^2 = z^2 - \frac{2az\partial z}{\sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2}} + a^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\sqrt{-(a^2 - r^2)^2 + 2(a^2 + r^2)z^2 - z^4}}{z(z^2 + a^2 - r^2)}$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Tractoria ist. Die Integration derselben hat nach den Regeln der Integralrechnung keine Schwierigkeit, führt aber auf eine ziemlich verwickelte Gleichung, weshalb wir nicht länger dabei verweilen.

Die Rectification dieser Tractoria ist aber leicht zu bewerkstelligen. Da nämlich

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \sqrt{\partial z^2 + z^2\partial\varphi^2},$$

also nach dem Obigen

$$\partial s = \frac{2az\partial z}{z^2 + a^2 - r^2}$$

ist; so ist, für $z^2 + a^2 - r^2 = u^2$, $\partial s = \frac{2a\partial u}{u}$, $s = 2a.\text{logn}\, u = 2a\,\text{logn}\sqrt{z^2 + a^2 - r^2} + C$, wo die Constante aus einer gegebenen Bedingung bestimmt werden muß.

12. Sey jetzt ein System von Kreisen, deren Halbmesser alle einander gleich sind, so gezeichnet, daß ihre Mit-

telpunkte alle auf einer gegebenen Curve liegen; man sucht die orthogonale Trajectoria (S. diesen Artikel) dieser Kreise.

Der gemeinschaftliche Halbmesser sey $= r$, die Coordinaten der gegebenen Curve x', y', die Coordinaten der Kreise x'', y'', die Coordinaten der Trajectoria x, y; so ist offenbar

$$(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 = r^2$$

die Gleichung der gegebenen Kreise, wo x', und also auch y', welches Function von x' ist, als constant betrachtet werden muß (Trajectoria.). Also

$$2(x'' - x')\partial x'' + 2(y'' - y')\partial y'' = o,$$

$$\frac{\partial y''}{\partial x''} = -\frac{x''-x'}{y''-y'},\ p = -\frac{x - x'}{y - y'},$$

$$1 - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x - x'}{y - y'} = o$$

(Trajectoria. 3.).

Um nun die Differentialgleichung der gesuchten Trajectoria zu erhalten muß man aus den Gleichungen:

$$\varphi(x', y') = o,$$

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y - y'}{x - x'},$$

x' und y' eliminiren, welches sich nur in besondern Fällen bewerkstelligen läßt.

Das Stück der Tangente dieser Trajectoria zwischen dem Berührungspunkte und der gegebenen Curve ist (2.)

$$= (y - y')\sqrt{1 + \left(\frac{x - x'}{y - y'}\right)^2} = (y - y')\sqrt{\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{(y - y')^2}}$$

$$= (y - y') \cdot \frac{r}{y - y'} = r.$$

Also ist dieses Stück eine constante Größe, und folglich die orthogonale Trajectoria in dem vorliegenden Falle zugleich eine Tractoria, deren Directrix die Curve, auf welcher die Halbmesser der gegebenen Kreise liegen, und deren Parameter der Halbmesser dieser Kreise ist.

Die Hugenische Tractoria ist also die orthogonale Trajectoria aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einer geraden Linie liegen, und deren Halbmesser dem Parameter der Tractoria gleich ist.

Diesen Satz hat zuerst v. Münchow in der Schrift: De tractoriis geometricis, atque earum cum trajectoriis orthogonalibus congruentia observationes quaedam. Halae. 1810. 4. sehr einfach geometrisch bewiesen, und seine Anwendung gezeigt.

13. Das Problem von der Tractoria läßt sich aber auch umkehren, d. h. es kann die Frage nach einer Curve seyn, welche von allen Berührenden einer gegebenen Curve vom Berührungspunkte aus ein gegebenes Stück abschneidet. Ist $\varphi(x, y) = o$ die Gleichung der gegebenen Curve, und b das abzuschneidende Stück; so wird man offenbar aus den Gleichungen (2.)

$$\varphi(x, y) = o,$$

$$y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x' - x), \; b = (y - y')\sqrt{1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}}$$

x und y eliminiren, wodurch man die gesuchte Gleichung zwischen x' und y' erhält. Es ist klar, daß dieses Problem der Integralrechnung nicht bedarf. Ist die gegebene Gleichung z. B.

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} - a \operatorname{logn} \sqrt{\frac{(a + \sqrt{a^2 - y^2})^2}{y^2}} + C;$$

also (3.) $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$

$$(y' - y)\sqrt{a^2 - y^2} = y(x' - x), \; by = a(y - y'),$$

$$y = \frac{ay'}{a - b}, \; x = x' + \frac{b\sqrt{(a - b)^2 - y'^2}}{a - b}.$$

Substituirt man dies in obige Gleichung, so erhält man:

$$x' = \sqrt{(a - b)^2 - y'^2} - a \operatorname{logn} \sqrt{\frac{(a - b + \sqrt{(a - b)^2 - y'^2})^2}{y'^2}} + C.$$

Da diese Gleichung sich mit b ändert, so ist klar; daß die gegebene Curve auf unendlich viele Arten durch eine tractorische Bewegung erzeugt werden kann

Für $b = a$ giebt die Gleichung $by = a(y - y')$ unmittelbar $y = y - y'$, $y' = o$, die Gleichung einer geraden Linie, so daß also die Directrix der hugenischen Tractoria, dem Vorhergehenden ganz gemäß, auch eine gerade Linie seyn kann.

Geschichte.

14. Leibnitz erzählt in den Act. Erud. 1693. p. 387., daß ihm bei seinem Aufenthalte zu Paris der bekannte Herausgeber des Vitruvius und geschickte Arzt, Claude Perrault, das Problem von der Tractoria mit gerader Directrix vorgelegt habe, ohne sich indeß schon des Namens zu bedienen; Perrault habe ihm die Sache versinnlicht indem er eine bestimmte Stelle des Bandes seiner auf dem Tische liegenden Taschenuhr an einem Lineale fortgeführt habe. Nachdem Leibnitz die eigentliche Natur der Curve, daß der Theil der Berührenden zwischen dem Berührungspunkte und der Directrix eine constante Größe ist, gefunden, und auf die Verbindung, in welcher sie mit der Hyperbel steht, aufmerksam gemacht hat, fügt er hinzu, daß er sich bey weiterer Erklärung nicht aufhalte, da er Grund habe zu vermuthen, daß auch der berühmte Huygens sich mit diesen Untersuchungen beschäftigt habe. Dieser erwähnt auch schon im folgenden Monat desselben Jahrgangs (p. 476.) einer Linie, welche er nostra quadratrix hyperbolae, quae inter Tractorias (ita enim vocari possunt) simplicissima censenda est, nennt, woraus man sieht, daß Huygens den Begriff allgemeiner aufgefaßt hat, und daß von ihm auch der Name herrührt. Er ist also als der eigentliche Schöpfer dieser Klasse krummer Linien anzusehen. M. s. auch Hugenii Opp. varia. T. II. p. 617. Mehrere Eigenschaften der einfachsten Tractoria sind in der Schrift: Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum circa logisticam seu logarithmicam lineam, auct. Guidone Grando. Florentiae. 1701., die sich auch in Hugenii Opp. reliqua. T. I. Amst. 1728. p. 137 — 315. befindet, beiläufig erwähnt, z. B. was in (10.) bewiesen worden ist. Noch betreffen die Tractoria zwei Aufsätze von Bonné in den Mém. de Paris. 1711. 1712, welche nichts Neues enthalten. Ein Instrument zur organischen Construction ist beschrieben in Joannis Poleni ad virum cel. J. Herrmannum epistola, in qua agitur de organi-

ca curvarum Tractoriae et Logarithmicae constructione, etc. Patavii. 1743. p. 134. In den Miscell. Berolinens. T. V. 1737. untersucht Clairaut die Tractorien, welche entstehen, wenn sich das eine Ende des Fadens auf einer Curve bewegt, die in einer Ebene liegt, welche von der verschieden ist, in welcher sich der schwere Punkt befindet. Euler und Riccati haben die tractorische Bewegung zur Construction der Differentialgleichungen anzuwenden gelehrt. M. s. die Abhandlungen des Erstern: De curvis tractoriis. N. Act. Petrop. T. II. De curvis tractoriis compositis. Ibid. De constructione aequat. diff. ope motus tractorii, aliisque ad methodum tangentium in versam pertinentibus. Comm. Petrop. T. VIII. p. 66. und Vinc. Riccati de usu motus tractorii in constr. aequat. diff. Comment. Bonon. 1752. Auch gehört von Riccati hierher: De natura quarundam curvarum, quae simul cum tractoriis generantur, quaeque proinde syntractoriae nominabuntur. Comm. Bonon. T. III. Joh. Bernoulli zeigt (Opp. T. IV. p. 381.), daß die hugenische Tractoria, welche auch wohl die hugenische logarithmische Linie genannt wird (Karstens Lehrbegr. II. 2. S. 392.) die Tautochrone in einem nach dem Quadrat der Geschwindigkeit widerstehenden Medio ist. In unsern Werken über höhere Geometrie kommt nur sehr wenig über diese Linie vor. In den Act. Erud. 1743. p. 134. heißt es: Inter curvas transscendentes prima utique, quae a Geom. considerari coepit, haberi potest illa Hugenii, quam in plano hor. describit corpus alteri fili alicujus extremitati affixum, dum altera fili extremitas in recta quadam linea protrahitur. Ein von Joh. Bernoulli aufgegebenes, mit dem Problem von der Tractoria verwandtes, Problem s. m. Act. Erud. 1693. p. 235. Opp. T. I. p. 66. Die Auflösung giebt Jac. Bernoulli ibid. p. 257. Er sagt, daß zu dem Problem quaedam Hugeniana in Actis Roterodamensibus Veranlassung gegeben hätten. V. Münchows Schrift ist schon oben erwähnt worden.

Tractoria complicata Cotesii, ist eine krumme Linie, welche von der einen Spitze eines Winkelhakens beschrieben wird, wenn man denselben so bewegt, daß sein einer Schenkel immer eine reciproke Spirale berührt, der andere aber immer durch deren Mittelpunkt geht. Die Rectificationsformel dieser Linie ist der Rectificationsformel der hugenischen Tractoria (Tractoria 5.) völlig ähnlich. M. s. Cotesii Harmonia mensurarum p. 84., und einen Aufsatz von Varignon in den Mém. de Paris. 1704., wo aber der Name nicht vorkommt.

Tractrix, s. Tractoria.

Trajectoria, Gleichschnitt nach Burjas erleichtertem Unterricht der höhern Meßkunst. II. Berlin. 1788. S. 215., ist eine Curve, welche ein ganzes System gleichartiger Curven unter einem gegebenen Winkel schneidet, oder, nach einem allgemeinern Begriff, so schneidet, daß der Durchschnitt für alle Curven einer gegebenen Bedingung entspricht; z. B. die Curve, welche auf allen Ellipsen über einerley Hauptaxe vom Scheitel aus gleiche Bögen abschneidet. Unter gleichartigen Curven versteht man aber hier solche, welche man erhält, wenn in einer gegebenen Gleichung einer gewissen Constante alle mögliche Werthe beigelegt werden, die Gleichung aber sonst ungeändert bleibt. Die Erklärung der Trajectorien in der Mechanik und Astronomie gehört jetzt nicht hierher.

1. Wir wenden uns zuerst zu der Betrachtung der Trajectorien in der ersten speciellen Bedeutung, welche rechtwinklige oder orthogonale (trajectoriae orthogonales) genannt werden, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist.

2. Es seyen x', y' die veränderlichen Größen in der Gleichung der gegebenen Curven, x, y dagegen die Coordinaten der Trajectoria, für einen Coordinatenwinkel, der $= 90^0$; so sind

$$z = \frac{\partial y'}{\partial x'} u + \frac{y'\partial x' - x'\partial y'}{\partial x'}, \; z = \frac{\partial y}{\partial x} u + \frac{y\partial x - x\partial y}{\partial x}$$

die Gleichungen der Tangenten an einer der gegebenen Cur-

ven und der Trajectoria durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, wie leicht aus (Berührende Linie. 14.) und (Linie, gerade. 13.) geschlossen wird. Setzen wir nun die Tangente des gegebenen Winkels $= a$; so ist, da dieser Winkel von den Curven, d. h. von den durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt gezogenen Berührenden eingeschlossen werden soll, zu setzen:

$$a = \frac{\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial x'}}{1 + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}}$$

(Linie, gerade. 16.), woraus, wenn wir $\frac{\partial y'}{\partial x'}$, welches aus der Gleichung der gegebenen Curven immer gefunden werden kann, $= p'$ setzen, leicht erhalten wird:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a + p'}{1 - ap'}.$$

Da aber die Folge der gegebenen Curven nach dem Obigen als stetig gedacht werden muß; so muß diese Gleichung offenbar für jedes x' und y' gelten, weshalb man, da in der stetigen Folge der Durchschnittspunkte die x, y mit den x', y' einerley sind, in derselben x, y für x', y' setzen muß. Bezeichnet daher p den Werth, welchen p' nach dieser Substitution erhält; so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a + p}{1 - ap}.$$

Von der constanten Größe, durch welche die gegebenen Curven bestimmt werden, macht man diese Gleichung unabhängig, wenn man diese Größe, die wir durch α bezeichnen wollen, aus $p' = \frac{\partial y'}{\partial x'}$, und $\varphi(x', y') = o$, der Gleichung der gegebenen Curven, eliminirt, obgleich auch augenblicklich erhellet, daß diese Größe auch aus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a + p}{1 - ap}$$

und $\varphi(x, y) = o$ eliminirt werden kann. Hierdurch erhält man die gesuchte Differentialgleichung der Trajectoria, deren Integration die Gleichung selbst giebt. Die beizufügende Constante muß durch irgend eine gegebene Bedin=

gung, z. B. daß die Trajectoria durch einen gegebenen Punkt gehen soll u. dgl., bestimmt werden.

3. Für orthogonale Trajectorien ist $a = \infty = \frac{1}{0}$. Also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{1}{0} + p}{1.0 - \frac{1}{0}.p} = \frac{\frac{1}{0}.0 + p.0}{1 - \frac{1}{0}.0.p} = \frac{1}{-p},$$

oder $1 + p\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

4. Trajectoria aller durch den Anfang der Abscissen gehenden geraden Linien. Die gegebene Gleichung ist

$$y' = \alpha x'; \text{ also } p' = \alpha = \frac{y'}{x'}, \; p = \frac{y}{x}.$$

Folglich die Differentialgleichung der Trajectoria:

$$a(x\partial x + y\partial y) + y\partial x - x\partial x = 0$$

$$a\int\frac{x\partial x + y\partial y}{x^2 + y^2} + \int\frac{y\partial x - x\partial y}{x^2 + y^2} = C$$

woraus für $x^2 + y^2 = z^2$ in Bezug auf das erste, und $\frac{x}{y} = u$ in Bezug auf das zweite Integral, leicht erhalten wird:

$$a\int\frac{\partial z}{z} + \int\frac{\partial u}{1 + u^2} = C, \text{a logn } z + \text{Arc tang } u = C,$$

$$a \text{ logn } \sqrt{x^2 + y^2} + \text{Arc tang } \frac{x}{y} = C,$$

$$a \text{ logn } \sqrt{x^2 + y^2} + \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc tang } \frac{y}{x} = C.$$

Setzt man nun die willkührliche Constans $= \frac{1}{2}\pi$; so wird

$$a \text{ logn } \sqrt{x^2 + y^2} = \text{Arc tang } \frac{y}{x},$$

die gesuchte Gleichung der Trajectoria. Drückt man die willkührliche Constans überhaupt durch $a \text{ logn } c + \frac{1}{2}\pi$ aus; so erhält man

$$a \text{ logn } \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c} = \text{Arc tang } \frac{y}{x}.$$

In Beziehung auf Coordinaten z, φ aus einem Punkte ist $x^2 + y^2 = z^2$, $y = x \text{ tang } \varphi$.

Also $\quad \text{logn } \frac{z}{c} = \frac{\varphi}{a}$.

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit (Spirale. 37.) folgt augenblicklich, daß die Trajectoria aller durch den An-

fangspunkt gehenden geraden Linien eine logarithmische Spirale ist.

Für die orthogonale Trajectoria ist

$$\frac{1}{0}\,.\,\text{logn}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} = \text{Arc tang}\,\frac{y}{x},$$

$$\text{logn}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} = 0,\ \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c} = 1,\ x^2+y^2=c^2;$$

also die orthogonale Trajectoria ein Kreis, wie dies sich auch von selbst versteht. Alles dieses hat schon Jac. Bernoulli gefunden. (Act. Erud. 1697. p. 232.)

5. Setzt man $C = \alpha$; so ist die Gleichung der logarithmischen Spirale nach dem Vorhergehenden:

$$a\ \text{logn}\ \sqrt{x^2+y^2} + \text{Arc tang}\,\frac{x}{y} = \alpha,$$

woraus durch Differentiation leicht erhalten wird:

$$p = \frac{y + ax}{x - ay}.$$

Folglich für die orthogonale Trajectoria:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x + \frac{1}{a}\,y}{y - \frac{1}{a}\,x},$$

woraus wie in (4.)

$$\frac{1}{a}\ \text{logn}\ \sqrt{x^2+y^2} + \text{Arc tang}\,\frac{y}{x} = C,$$

so daß also die orthogonale Trajectoria selbst wieder eine logarithmische Spirale ist, wie schon Nic. Bernoulli, Johanns Sohn, gefunden hat. Act. Erud. Suppl. T. VII. 1721. p. 315.

6. Orthogonale Trajectoria für Parabeln mit einerley Parameter, aber veränderlichem Scheitel. Ist n der constante Parameter; so ist die Gleichung:

$$y'^2 = n(x' - \alpha);$$

$$p = \frac{n}{2y},\ \partial x = -\frac{n}{2}\,.\,\frac{\partial y}{y};\ x = -\frac{n}{2}\ \text{logn}\,y + c,$$

wenn c die willkührliche Constante bezeichnet. Also für $c - x = x_1$:

$$\frac{n}{2}\ \text{logn}\ y = x_1,\ \frac{y\partial x_1}{\partial y} = \frac{n}{2}.$$

Die orthogonale Trajectoria ist also eine Curve, deren Subtangente (Berührende Linie. 13.) constant ist, also die Logistica. (Logarithmische Linie. 4.)

7. Orthogonale Trajectoria für Parabeln mit einerley Parameter und parallelen Axen, deren Scheitel alle in einer auf den Axen senkrechten geraden Linie liegen. Die Gleichung ist:

$$(y'-\alpha)^2 = nx'; \; p = \frac{n}{2(y-\alpha)}, \partial y = -\frac{2}{\sqrt{n}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \partial x,$$

$$y = -\frac{4}{3\sqrt{n}} x^{\frac{3}{2}} + c, \text{ oder für } c - y = y_1:$$

$$x^3 = \frac{9n}{16} y_1^2.$$

Die Trajectoria ist also eine Neilische Parabel (Parabeln höherer Art.), deren Parameter $\frac{9n}{16}$ sich zu dem Parameter der gegebenen Parabeln $= 9:16$ verhält.

8. Orthogonale Trajectoria für Parabeln einerley Grades mit veränderlichem Parameter über einerley Axe und von einerley Scheitel. Die Gleichung ist:

$$y'^n = \alpha x'^m; \; p = \frac{m\alpha x^{m-1}}{ny^{n-1}}, \; \alpha = \frac{y^n}{x^m};$$

$$p = \frac{my}{nx}, \; my\partial y = -nx\partial x;$$

$$\tfrac{1}{2} my^2 = -\tfrac{1}{2} nx^2 + \tfrac{1}{2} c, \; y^2 = \frac{n}{m}\left(\frac{c}{n} - x^2\right).$$

Setzen wir nun $\frac{1}{n} c = m'^2$, $\mu m = m'^2$, $\mu n = n'^2$; so ergiebt sich leicht:

$$y^2 = \frac{n'^2}{m'^2}(m'^2 - x^2),$$

woraus erhellet, daß die gesuchte Trajectoria eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt in dem gemeinschaftlichen Scheitel der Parabeln liegt.

9. Orthogonale Trajectoria für neilische Parabeln mit einerley Parameter über einerley Axe mit verschiedenen Scheiteln. Die Gleichung ist:

$$y'^3 = n(x' - \alpha)^2; \; p = \frac{2n(x-\alpha)}{3y^2}, \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2\sqrt{n}}{3\sqrt{y}},$$

welches leicht erhalten wird, wenn man $x - \alpha$ auf dop=

pelte Art bestimmt, indem man in der gegebenen Gleichung x, y für x', y' setzt. Die Integration giebt:

$$(x - c)^2 = \frac{16ny}{9},$$

oder für $x - c = x_1$, $\frac{16n}{9} = n'$; $x_1'^2 = n'y$, so daß also die orthogonale Trajectoria eine apollonische Parabel ist.

10. Orthogonale Trajectoria für cubische Parabeln mit einerley Parameter, aber veränderlichem Scheitel. Die Gleichung ist: $y'^3 = n^2(x' - \alpha)$. (Cubisch.)

$$p = \frac{n^2}{3y^2}, \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{n^2}{3y^2}, x = \frac{n^2}{3y} + c,$$

oder für $x - c = x_1$, und $m = n\sqrt{\frac{2}{3}}$:

$$x_1 y = \tfrac{1}{2} m^2,$$

welches die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel ist, deren Halbaxe = m. (Hyperbel. 8. 31.)

11. Orthogonale Trajectoria für alle logarithmischen Linien über einerley Axe durch denselben Punkt mit veränderlichem Modul. Die Differentialgleichung ist für $M = \frac{1}{\alpha}$:

$$\frac{y'\partial x'}{\partial y'} = \frac{1}{\alpha}.$$

(Logarithmische Linie. 4.)

$$p = \alpha y, \alpha\partial x' = \frac{\partial y'}{y'}, \alpha x' = \text{logn}\, y' + \text{Const.}$$

Nehmen wir nun an, die Ordinate des gegebenen Punctes sey = a', und die entsprechende Abscisse = o; so ist Const so zu bestimmen, daß y' = a' wird, für x' = o. Also Const = — logn a', und

$$\alpha = \frac{\text{logn}\frac{y}{a'}}{x}.$$

Also $p = \frac{y \;\; \text{logn}\frac{y}{a'}}{x}$, und $y\partial y\ \text{logn}\ \frac{y}{a'} = - x\partial x$,

$y\partial y\ \text{logn}\ y - y\partial y\ \text{logn}\ a' = - x\partial x.$

Nach Thl. II. S. 783. ist

$$\int y\partial y\ \text{logn}\ y = \text{logn}\ y \int y\partial y - \int \partial\,\text{logn}\ y \int y\partial y = \tfrac{1}{2} y^2\ \text{logn}\ y - \tfrac{1}{4} y^2.$$

Also $\frac{1}{2} y^2\ \text{logn}\ y - \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} y^2\ \text{logn}\ a' = - \frac{1}{2} x^2$,

$$\tfrac{1}{2} y^2 \log n \frac{y}{a} - \tfrac{1}{4} y^2 = - \tfrac{1}{2} x^2,$$

$$x = y \sqrt{\frac{1 - 2 \log n \frac{y}{a}}{2}}.$$

12. Orthogonale Trajectoria aller Hyperbeln von einerley Scheitel und einerley Mittelpunkte, aber veränderlicher kleiner Axe. Die Gleichung ist:

$$y'^2 = \frac{\alpha^2}{a^2} (x'^2 - a^2); \; p = \frac{\alpha^2 x}{a^2 y}, \; \alpha^2 = \frac{a^2 y^2}{x^2 - a^2};$$

$$1 + \frac{xy}{x^2 - a^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \; y \partial y = \frac{a^2 \partial x}{x} - x \partial x,$$

$$y^2 + 2 \,\text{Const} = 2a^2 \log n\, x - x^2,$$

oder, für 2 Const $= \pm c^2$:

$$x^2 + y^2 \pm c^2 = 2a^2 \log n\, x = \log n\, x^{2a^2}, \; x^{2a^2} = e^{x^2 + y^2 \pm c^2}.$$

Eine merkwürdige, von Nic. Bernoulli (Act. Erud. 1716. p. 227.) gegebene, Construction dieser Trajectoria ist folgende. Durch den willkührlichen Punct D (Fig. 8.) beschreibe man eine logarithmische Linie DF, deren Subtangente $= a$; so ist für CE $= x$ (Logarithmische Linie. 4.) $\partial . EF = \frac{a \partial x}{x}$, EF $= a \log n x$. Man nehme nun EG $= 2a$, und beschreibe über FG, so wie auch dann über HE einen Halbkreis. Nimmt man hierauf HK $=$ CE $= x$, zieht KE, und nimmt LE $=$ KE; so ist L ein Punkt der Trajectoria. Denn $HE^2 = GE . EF = 2a^2 \log n x$, $KE^2 = HE^2 - HK^2 = 2a^2 \log n x - x^2$; also $KE^2 = y^2$ für Const $= 0$, und demnach LE $=$ KE $= y$. Also L ein Punkt der Trajectoria für Const $= 0$.

13. Orthogonale Trajectoria aller Ellipsen mit einerley Hauptaxe, aber veränderlicher Nebenaxe. Die Gleichung ist:

$$y'^2 = \frac{\alpha^2}{a^2} (a^2 - x'^2); \; p = - \frac{\alpha^2 x}{a^2 y}, \; \alpha^2 = \frac{a^2 y^2}{a^2 - x^2},$$

$$1 + \frac{xy}{x^2 - a^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

woraus also erhellet, daß die obigen Ellipsen (Fig. 8.) dieselbe Trajectoria haben wie die Hyperbeln in (12.)

14. Die Elimination der Größe α kann öfters Schwierigkeit machen. Euler, und nach ihm Lacroix im

Traité du calcul diff. et int. T. II. p. 454., lehrt folgendes Verfahren. Man suche die eine der Größen x', y' aus der Gleichung der gegebenen Curven durch die andere und durch α auszudrücken. Wir wollen annehmen, daß y' durch x', α ausgedrückt sey. Nun erhellet leicht, daß von einer Ordinate PQ (Fig. 9.) der Trajectoria zu der nächstfolgenden Ordinate P'Q' derselben übergehen, eben so viel ist, als von der Ordinate PQ der Curve B'C' zur Ordinate P'Q' der nächstfolgenden Curve BC übergehen. Der Uebergang von der Curve B'C' zu der Curve BC wird aber bedingt durch die Veränderung der Größe α, und der Uebergang von PQ zu P'Q' durch die Veränderung von x. Daher muß man, um von PQ zu P'Q' überzugehen, y' als Function zweyer unabhängiger veränderlicher Größen α, x' betrachten, sie nach diesen beiden veränderlichen Größen differentiiren, und dann x, y für x', y' setzen. Sey demnach

$$\partial y' = \left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)\partial x' + \left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right)\partial \alpha,$$

oder für $\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right) = p'$, $\left(\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) = q'$:

$$\partial y' = p'\partial x' + q'\partial \alpha.$$

Bezeichnet man nun die Werthe, welche p', q' erhalten, wenn x, y für x', y' gesetzt werden, durch p, q; so erhält man $\partial y = p\partial x + q\partial \alpha$. Aber nach (2.):

$$a\left(1 + p\frac{\partial y}{\partial x}\right) + p - \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$a\left\{1 + p\left(p + \frac{q\partial \alpha}{\partial x}\right)\right\} + p - \left\{p + \frac{q\partial \alpha}{\partial x}\right\} = 0,$$

$$(1 + p^2)\,a\partial x - (1 - ap)\,q\partial \alpha = 0,$$

wo p, q nur x und α enthalten. Das Integral dieser Gleichung giebt die Relation zwischen x und α, und die Elimination von α aus dieser Gleichung und der gegebenen, wenn man in dieser x, y für x', y' setzt, giebt die Gleichung der Trajectoria.

15. Construirt wird die Trajectoria auf folgende Art, ohne die Elimination von α selbst auszuführen. Für einen willkührlich angenommenen Werth von x bestimme man mittelst der durch die Integration erhaltenen Gleichung den

Werth von α. Für diesen Werth von α beschreibe man mittelst der gegebenen Gleichung die zu durchschneidende Curve; so ist der Durchschnittspunkt dieser Curve mit der, zu der angenommenen Abscisse gehörenden, Ordinate ein Punkt der Trajectoria, und es erhellet leicht, daß man auf diese Art so viele Punkte derselben finden kann, als man will.

16. Die Gleichungen der Cycloide sind nach Thl. I. S. 601.

$$x' = a(\varphi - \sin\varphi),\ y' = a(1 - \cos\varphi),$$

oder, wenn man den Durchmesser des erzeugenden Kreises als Axe und den Anfang der Cycloide als Anfang der Abscissen annimmt:

$$x' = a(1 - \cos\varphi),\ y' = a(\varphi - \sin\varphi).$$

Bestimmt man aus der ersten Gleichung die Werthe von φ und $\sin\varphi$, und setzt sie in die zweite, so erhält man:

$$y' = a \text{ Arc sin vers } \frac{x'}{a} - \sqrt{2ax' - x'^2},$$

oder, wenn man den Halbmesser des erzeugenden Kreises als veränderlich, den Anfangspunct als constant annimmt:

$$y' = \alpha \text{ Arc sin vers } \frac{x'}{\alpha} - \sqrt{2\alpha x' - x'^2}.$$

Hier ist y' schon durch x', α (14.) ausgedrückt. Setzen wir nun x, y für x', y', und $\frac{x}{\alpha} = z$; so wird

$$y = \alpha \text{ Arc sin vers } z - \alpha\sqrt{2z - z^2},$$

oder, zur Abkürzung, $y = \alpha Z$, wo Z nur eine Function von z ist. Ist nun $\partial Z = Z'\partial z$; so ist durch partielle Differentation $\partial y = \alpha Z'\partial z + Z\partial\alpha$. Da nun

$$\partial z = \frac{\alpha\partial x - x\partial\alpha}{\alpha^2},\ \partial\alpha = \frac{z\partial x - x\partial z}{z^2};$$

so erhält man leicht

$$\partial y = Z'\partial x + (Z - Z'z)\,\partial\alpha.$$

Also $p = Z'$, $q = Z - Z'z$, wo p, q beide nur von z abhängen. Also nach (14.), wenn man in die dortige letzte Gleichung den obigen Ausdruck von $\partial\alpha$ setzt, nach gehöriger Reduction:

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{(1 - ap)\,q\partial z}{a(1 + p^2)z^2 - (1 - ap)\,qz} = 0,$$

$$\log n\, x + \int \frac{(1 - ap)\, q\partial z}{a(1 + p^2) z^2 - (1 - ap) qz} = C.$$

Da nämlich in der erhaltenen Differentialgleichung die veränderlichen Größen gesondert sind, so läßt sie sich integriren, und die Gleichung der Trajectoria kann wie in (14.) gefunden, so wie auch die Linie selbst wie in (15.) construirt werden. C ist an sich willkührlich, und kann nur durch gegebene Bestimmungen, denen die Trajectoria noch genügen soll, bestimmt werden.

17. Vorzüglich wichtig ist der Fall, wenn nur die Differentialgleichung der zu durchschneidenden Curven gegeben ist. Die gegebene Gleichung sey, nachdem schon x, y für x′, y′ gesetzt worden, $\partial y = p\partial x$. Ist nun u überhaupt eine Function zweyer veränderlicher Größen; so ist (Differentialgleichung. 12. 14. Taylors Lehrsatz. 8.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\partial x;$$

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\partial x = \int \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\partial x = \int \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}\partial x;$$

d. i. $$\int \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}\partial x = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Setzen wir nun $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $u = \int P\partial x$; so wird

$$\int \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)\partial x = \left(\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y}\right).$$

Also für $P = p$, $y = \alpha$ mit Weglassung der Parenthesen:

$$\int \frac{\partial p}{\partial \alpha}\partial x = \frac{\partial \int p\partial x}{\partial \alpha}.$$

Folglich nach (14.):

$$(1 + p^2)\, a\partial x - (1 - ap)\,\partial \alpha \int \frac{\partial p}{\partial \alpha}\partial x = 0,$$

da $q = \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial \int p\partial x}{\partial \alpha}$.

Diese Gleichung ist in Bezug auf x und α eine Differentialgleichung vom ersten Grade, die sich also, da auch $\int \frac{\partial p}{\partial \alpha}\partial x$ in Bezug auf x immer gefunden werden kann, immer integriren läßt, woraus sich die gesuchte Relation zwischen x und α ergiebt. (14.)

18. Setzt man $a = \frac{1}{a'}$, wo a' die Cotangente des gegebenen Winkels bezeichnet; so erhält man:

$$(1 + p^2)\,\partial x - (a' - p)\,\partial\alpha \int \frac{\partial p}{\partial\alpha}\,\partial x = 0.$$

Also für orthogonale Trajectorien, wo $a' = 0$ ist:

$$(1 + p^2)\,\partial x + p\partial\alpha \int \frac{\partial p}{\partial\alpha}\,\partial x = 0,$$

$$\frac{(1 + p^2)\,\partial x}{p} + q\partial\alpha = 0.$$

19. Bringt man die Gleichung in (14.) auf die Form

$$\frac{(1 + p^2)\,a\partial x}{ap - 1} + q\partial\alpha = 0;$$

so erhellet aus der bekannten allgemeinen Gleichung:

$$\partial f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)\partial y,$$

und dem schon oben gebrauchten Satze:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\partial y},$$

daß, wenn diese Gleichung durch Multiplication mit einem gewissen Factor A, der nur eine Function von α ist, wodurch man

$$\frac{A(1 + p^2)\,a}{ap - 1}\,\partial x + Aq\partial\alpha = 0$$

erhält, integrabel gemacht werden soll, immer

$$\frac{\partial\,.\,\frac{A(1 + p^2)\,a}{ap - 1}}{\partial\alpha} = \frac{\partial\,.\,Aq}{\partial x} = A\,\frac{\partial q}{\partial x} = A\,\frac{\partial p}{\partial\alpha}$$

seyn muß. Also

$$\frac{\partial\,.\,\frac{A(1 + p^2)\,a}{ap - 1}}{\partial\alpha} - A\,\frac{\partial p}{\partial\alpha} = 0.$$

Entwickelt man nun das erste Differential; so ergiebt sich

$$\frac{a(1 + p^2)}{ap - 1}\,.\,\frac{\partial A}{\partial\alpha} - \frac{1 + a^2}{(ap - 1)^2}\,.\,A\,\frac{\partial p}{\partial\alpha} = 0.$$

Diese Gleichung wird, da man x überall als constant betrachtet, bloß in Bezug auf α integrirt. Man verwandelt sie leicht in

$$\frac{a\partial A}{A} - \frac{(1 + a^2)\,\partial p}{(1 + p^2)(ap - 1)} = 0,$$

$$\frac{a\partial A}{A} - \frac{\{a^2(1+p^2)-(ap-1)(ap+1)\}\,\partial p}{(1+p^2)(ap-1)} = o,$$

$$\frac{a\partial A}{A} - \frac{a^2\partial p}{ap-1} + \frac{ap\partial p}{1+p^2} + \frac{\partial p}{1+p^2} = o,$$

woraus, wenn X irgend eine willkührliche Function von x bedeutet, und die arbiträre Constante, da x als constant betrachtet wird, = a logn X gesetzt wird, durch leichte Integration:

$$a \text{ logn } A - a \text{ logn } (ap-1) + \tfrac{1}{2} a \text{ logn } (1+p^2) + \text{Arc tang } p = a \text{ logn } X$$

oder

$$a \text{ logn } A = a \text{ logn } (ap-1) - \tfrac{1}{2} a \text{ logn } (1+p^2) - \text{Arc tang } p + a \text{ logn } X.$$

(Integralformel. 5. 15. 16.)

20. Führt man wieder die Cotangente des gegebenen Winkels ein, indem man $a = \frac{1}{a'}$ setzt; so erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial A}{A} = \frac{\partial p}{p-a'} - \frac{(p+a')\,\partial p}{1+p^2};$$

also für orthogonale Trajectorien:

$$\frac{\partial A}{A} = \frac{\partial p}{p} - \frac{p\partial p}{1+p^2},$$

$$\text{logn } A = \text{logn } p - \tfrac{1}{2} \text{ logn } (1+p^2) + \text{logn } X,$$

$$\text{logn } A = \text{logn } \frac{pX}{\sqrt{1+p^2}},\ A = \frac{pX}{\sqrt{1+p^2}},$$

woraus man, da $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ ist, leicht erhält:

$$\partial y = \frac{A\partial x}{\sqrt{X^2-A^2}},\ y = \int \frac{A\partial x}{\sqrt{X^2-A^2}} + C,$$

wo A eine Function von α, X eine Function von x, C eine willkührliche Constante ist. So muß also die gegebene Differentialgleichung beschaffen seyn, wenn die Gleichung in (18.) für orthogonale Trajectorien durch Multiplication mit dem Factor A integrabel seyn soll. Da

$$p = \frac{A}{\sqrt{X^2-A^2}}$$

ist; so erhält man leicht

$$\frac{1+p^2}{p} = \frac{X^2}{A\sqrt{X^2-A^2}}.$$

Also nach (18.) und (17.):

$$\frac{X^2 \partial x}{A\sqrt{X^2-A^2}} + q\partial\alpha = o,\ \frac{X^2\partial x}{\sqrt{X^2-A^2}} + Aq\partial\alpha = o;$$

oder zur Abkürzung $M\partial x + N\partial\alpha = o$, für

$$M = \frac{X^2}{\sqrt{X^2-A^2}},\ N = Aq.$$

Da nun $M\partial x + N\partial\alpha$ nach der Voraussetzung in (19.) das vollständige Differential einer gewissen Function von x und α ist; so ist, wenn wir diese Function = u setzen:

$$M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ N = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right).$$

Also $du = M\partial x$, $u = \int M\partial x + Y$, wo Y eine willkührliche Function von α bezeichnet, da α als constant betrachtet wird. Demnach

$$N = \frac{\partial \int M\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial Y}{\partial\alpha},$$

woraus

$$Y = \int\left(N - \frac{\partial\int M\partial x}{\partial\alpha}\right)\partial\alpha + C,$$

$$u = \int M\partial x + \int\left(N - \frac{\partial\int M\partial x}{\partial\alpha}\right)\partial\alpha + C.$$

In unserm Falle, wo $\partial u = o$, also u eine Constante ist, hat man also

$$\int M\partial x + \int\left(N - \frac{\partial\int M\partial x}{\partial\alpha}\right)\partial\alpha = \text{Const},$$

wo das zweite Integral nur α enthalten kann, da Y nur α enthält. Daher ist offenbar dieses Integral das Integral von den Gliedern in $N\partial\alpha = Aq\partial\alpha$, welche von x unabhängig sind.

21. Wir wollen diese Formeln auf eine in der Geschichte des Problems der Trajectorien sehr wichtige Aufgabe anwenden. Es seyen nämlich zunächst

Ueber AB (Fig. 10.) als Axe durch den Punkt A unendlich viele Curven zu beschreiben, so daß die Krümmungshalbmesser der einzelnen Curven von der Axe alle in einem gegebenen Verhältnisse, z. B. DF : DE = 1 : n, wenn DF der Krümmungshalbmesser für D ist, geschnitten werden.

Man nehme die auf AB durch A errichtete Senkrechte AG als Axe der Abscissen, so daß AH = x, HD = y.

Der Krümmungshalbmesser wird bekanntlich immer auf der concaven Seite der Curve genommen. Daher werden nur die Krümmungshalbmesser aller der gegen AB concaven Curven von AB geschnitten. Diese Curven sind aber gegen AG convex, und folglich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv (Concav und Convex. 10.), da wir y als positiv annehmen. Setzen wir nun den Krümmungshalbmesser = r; so ist auch

$$\frac{\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)\sqrt{1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y}$$

positiv, und daher r, welches hier immer als positiv angenommen wird, nicht

$$= -\frac{(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y}$$

(Krümmungskreis. 2.), sondern

$$r = \frac{(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y}$$

zu setzen.

Die Gleichung der Normale, in welcher r immer liegt, ist

$$z - y = -\frac{\partial x}{\partial y}(u - x),$$

wie sich durch eine leichte geometrische Betrachtung mittelst (Linie, gerade. 17.) und den allgemeinen Formeln in dem Art. Berührende ergiebt. Für den Punkt E ist z = AE, u = 0. Also

$$AE - y = \frac{x\partial x}{\partial y},\ AE = y + \frac{x\partial x}{\partial y};$$

$$KE = AE - y = \frac{x\partial x}{\partial y};$$

$$DE^2 = DK^2 + KE^2 = \frac{x^2(\partial x^2+\partial y^2)}{\partial y^2}.$$

Also nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y} : \frac{x(\partial x^2+\partial y^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial y} = 1 : n,$$

$$\frac{x}{\partial y} = \frac{n(\partial x^2 + \partial y)}{\partial x \partial^2 y}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{n}{x}\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial x^3}\right),$$

woraus für $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$, erhalten wird:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{p \partial p}{np^2(1+p^2)}.$$

Also für $p^2 = z$, $1 + z = v$:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2n}\left(\frac{\partial z}{z} - \frac{\partial v}{v}\right),$$

$$\operatorname{logn} x = \frac{1}{2n} \operatorname{logn} \frac{z}{v} + \text{Const}$$

$$= \frac{1}{2n} \operatorname{logn} \frac{p^2}{1+p^2} + \frac{1}{2n} \operatorname{logn} C = \frac{1}{2n} \operatorname{logn} \frac{p^2 C}{1+p^2}.$$

$$x = \sqrt[2n]{\frac{p^2 C}{1+p^2}}, \; p = \frac{x^n}{\sqrt{C - x^{2n}}},$$

$$\partial y = \frac{x^n \partial x}{\sqrt{C - x^{2n}}}, \; y = \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{C - x^{2n}}}$$

oder auch, für $C = c^{2n}$:

$$y = \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{c^{2n} - x^{2n}}}$$

wo denn noch eine willkührliche Constante beizufügen ist, wodurch wegen der doppelten Constante die Mannigfaltigkeit dieser Curven sehr groß wird. Bey der Integration im Allgemeinen dürfen wir hier nicht länger verweilen.

Für $n = 1$ erhält man

$$\partial y = \frac{x \partial x}{\sqrt{c^2 - x^2}},$$

die Differentialgleichung des Kreises, wie aus der Gleichung

$$x^2 = y(2c - y)$$

leicht abgeleitet wird.

Für $n = \frac{1}{2}$ wird

$$\partial y = \frac{\partial x . \sqrt{x}}{\sqrt{C - x}}$$

woraus man durch Integration erhält:

$$y = C \text{ Arc tang} \sqrt{\frac{x}{C-x}} - \sqrt{Cx - x^2}.$$

Für Arc tang $\sqrt{\frac{x}{C-x}} = \varphi$ wird:

$$\text{tang}\, \varphi = \sqrt{\frac{x}{C-x}}, \; \sin \varphi = \sqrt{\frac{x}{C}}, \; \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{x}{C}};$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{Cx - x^2}}{C},\ \cos 2\varphi = 1 - \frac{2x}{C};$$

$$y = \tfrac{1}{2}C\,(2\varphi - \sin 2\varphi),\ x = \tfrac{1}{2}C\,(1 - \cos 2\varphi),$$

welches die Gleichungen der Cycloide sind (16.). Also hat die Cycloide die Eigenschaft, daß die Krümmungshalbmesser von der Basis halbirt werden (Cycloide. XI.)

Für Curven, die gegen AB convex sind, könnte man den Krümmungshalbmesser sich auf die convexe Seite verlängert denken, wo er ebenfalls von der Axe geschnitten wird. Nur ist hier, weil der Krümmungshalbmesser immer als positiv angenommen wird, zu setzen:

$$r = -\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y}.$$

Sonst erhält man ganz wie vorher:

$$\frac{x}{\partial y} = -\frac{n(\partial x^2 + \partial y^2)}{\partial x \partial^2 y},$$

$$\text{logn}\ x = -\frac{1}{2n}\ \text{logn}\ \frac{p^2}{1+p^2} + \text{Const},$$

oder, wenn man die Constanten durch $-\frac{1}{2n}$ logn C ausdrückt:

$$\text{logn}\ x = -\frac{1}{2n}\ \text{logn}\ \frac{p^2 C}{1+p^2},\ x = \left(\frac{p^2 C}{1+p^2}\right)^{-\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{1+p^2}{p^2 C}}$$

Beide Fälle kann man in die Formel

$$x = \left(\frac{p^2 C}{1+p^2}\right)^{\pm\frac{1}{2n}}$$

zusammenfassen. Aus der für diesen Fall gefundenen Gleichung erhält man ferner:

$$\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{Cx^{2n} - 1}},$$

oder für $C = c^{2n}$:

$$y = \int \frac{\partial x}{\sqrt{c^{2n}x^{2n} - 1}}.$$

Für $n = \frac{1}{2}$ ist also $y = \frac{\partial x}{\sqrt{Cx - 1}}$;

woraus durch Integration:

$$y = 2\sqrt{\frac{x}{C} - \frac{1}{C^2}},\ y^2 = \frac{4}{C}\left(x - \frac{1}{C}\right).$$

oder für $x - \frac{1}{C} = x$:

$$y^2 = \frac{4}{C} x,$$

so daß also die gesuchten Curven Parabeln sind. Daher werden von den verlängerten Krümmungshalbmessern durch AB Stücke abgeschnitten, welche dem halben Krümmungshalbmesser gleich sind. Die Abscissen werden auf AG genommen, und die Entfernung des Scheitels von A ist dem vierten Theile des Parameters gleich.

Die hier aufgelösete Aufgabe mag zugleich als Beispiel für den oben angegebenen allgemeinern Begriff der Trajectorien dienen.

22. Soll nun in Bezug auf den ersten Fall, indem c als veränderlich angenommen, also

$$\partial y = \frac{x^n \partial x}{\sqrt{\alpha^{2n} - x^{2n}}}$$

gesetzt wird, die orthogonale Trajectoria gefunden werden; so hat man (17.)

$$p = \frac{x^n}{\sqrt{\alpha^{2n} - x^{2n}}},$$

woraus man, verglichen mit (20.) leicht erhält:

$$A = \frac{1}{\alpha^n}, \; X = \frac{1}{x^n}; \; M = \frac{X^2}{\sqrt{X^2 - A^2}} = \frac{\alpha^n}{x^n \sqrt{\alpha^{2n} - x^{2n}}};$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} \partial x = - \alpha^{2n-1} x^n (\alpha^{2n} - x^{2n})^{-\frac{3}{2}} . \partial x,$$

oder, wenn man Dies in eine Reihe nach Potenzen von x entwickelt:

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} \partial x = (\mathfrak{A} x^n + \mathfrak{B} x^{3n} + \mathfrak{C} x^{5n} + \ldots) \partial x$$

$$q = \int \frac{\partial p}{\partial \alpha} \partial x = \mathfrak{A}' x^{n+1} + \mathfrak{B}' x^{3n+1} + \mathfrak{C}' x^{5n+1} + \ldots$$

Setzt man nun hier die willkührliche Constante $= 0$; so enthält, da n immer als positiv angenommen wird,

$$Aq\partial\alpha = (\mathfrak{A}'' x^{n+1} + \mathfrak{B}'' x^{3n+1} + \mathfrak{C}'' x^{5n+1} + \ldots) \partial\alpha$$

kein von x unabhängiges Glied, so das also (20.)

$$\int \left(N - \frac{\partial \int M \partial x}{\partial \alpha} \right) \partial \alpha = 0,$$

und folglich $\int M \partial x = \text{Const}$, d. i.

$$\int \frac{\alpha^n \partial x}{x^n \sqrt{\alpha^{2n} - x^{2n}}} = C$$

ist. Die Aufgabe ist also wieder auf die Integration einer Differentialgleichung des ersten Grades gebracht, und daher als aufgelöset anzusehen.

Für die gegen AB (Fig. 10.) converen Curven ist

$$\partial y = \frac{\partial x}{\sqrt{\alpha^{2n}x^{2n}-1}};$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{2n}x^{2n}-1}},\ A = 1,\ X = \alpha^n x^n;$$

$$M = \frac{X^2}{\sqrt{X^2 - A^2}} = \frac{\alpha^{2n}x^{2n}}{\sqrt{\alpha^{2n}x^{2n}-1}};$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha}\,\partial x = -\,n x^{2n}\alpha^{2n-1}\,(\alpha^{2n}x^{2n}-1)^{-\frac{3}{2}}.\,\partial x$$

$$= -\,n x^{2n}\alpha^{2n-1}\,(-1+\alpha^{2n}x^{2n})^{-\frac{3}{2}}.\,\partial x$$

Entwickelt man dies in eine Reihe; so überzeugt man sich ganz wie vorher, daß $\int M\partial x =$ Const, d. i.

$$\int \frac{\alpha^{2n}x^{2n}\partial x}{\sqrt{\alpha^{2n}x^{2n}-1}} = C.$$

Johann Bernoulli giebt folgende, von seinem Sohne Nicolas Bernoulli Act. Erud. 1718. p. 253. ohne Analysis mitgetheilte Construction für den ersten Fall. AB′, AB″, AB‴, u. s. f. (Fig. 11.) seyen die gegebenen Curven. Für die successiven Werthe von α beschreibe man die Curven Ab′, Ab″, Ab‴, u. s. f., deren Gleichung

$$y = \frac{\alpha^n}{x^n\sqrt{\alpha^{2n}-x^{2n}}}$$

ist, so daß in Bezug auf die Werthe von α die Curven AB′, Ab′; AB″, Ab″; AB‴, Ab‴; u. s. f. einander entsprechen. Dann schneide man von den letztern Curven Segmente ab, deren Flächenraum der constanten Größe C gleich ist, durch die Linien DE, D′E′, D″E″, u. s. f.; so ist, wenn AD, AD′, AD″, u. s. f. durch x bezeichnet werden:

$$\int y\partial x = \int \frac{\alpha^n\partial x}{x^n\sqrt{\alpha^{2n}-x^{2n}}} = C.$$

(Quadratur 8.), wie erfordert wird. Verlängert man also ED, E′D′, E″D″, u. s. f., bis sie die gegebenen Curven in F, F′, F″, u. s. f. schneiden; so sind dies Punkte der Trajectoria, deren sich also eine willkürliche Anzahl finden

läßt. Wie diese Construction auf die converen Curven auszudehnen ist, erhellet leicht.

23. Um noch ein, einer Anwendung fähiges, leichtes Beispiel der orthogonalen Trajectorien zu geben; so sey die orthogonale Trajectoria aller um einerlei Mittelpunkt beschriebenen ähnlichen Ellipsen zu finden. Da die Ellipsen ähnlich sind; so ist

$$y'^2 = \frac{n^2\alpha^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x'^2),\ p' = -\frac{n^2x'}{y'},\ p = -\frac{n^2x}{y};$$

$$1 - \frac{n^2x}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial y}{y} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\partial x}{x};$$

$$\text{logn}\, y = \frac{1}{n^2} \text{logn}\, x + \frac{1}{n^2} \text{logn}\, C;$$

$$n^2 \text{ logn}\, y = \text{logn}\, Cx,\ y^{n^2} = Cx.$$

Soll $y = k$ seyn für $x = h$; so erhält man als Gleichung der Trajectoria:

$$\frac{x}{h} = \left(\frac{y}{k}\right)^{n^2}$$

Nimmt man an, daß die Erde aus lauter concentrischen, unter einander ähnlichen Schichten bestehe, die für sich im Gleichgewichte sind; so bestimmt diese Trajectoria die Richtung, nach welcher in jedem Punkte die Schwerkraft die Körper gegen das Innere der Erde hinabzieht.

Geschichte.

25. Huygens hatte in seinem Traité de la lumière. Leid. 1690. 4. die Idee vorgetragen, daß das Licht durch eine wellenförmige Bewegung eines feinen Aethers fortgepflanzt werde, und daß, wenn eine solche Welle das Auge berühre, der Punkt, von welchem sie ausging, nach einer auf dieser Welle senkrechten Richtung erscheine. Ein Lichtstrahl wäre also nach dieser Hypothese, welche nur erst neuerlich durch die merkwürdigen Versuche von Thomas Young in London einen neuen bedeutenden Grad von Wahrscheinlichkeit erreicht hat, eigentlich eine Linie, welche alle Wellenlinien des beweglichen Aethers senkrecht durchschneidet, und der sichtbare Punkt erscheint nach der Berührenden dieser Linie. Man sieht, wie Johann

Bernoulli, nach seiner eigenen Erzählung (Act. Erud. 1697. p. 211.), hierdurch auf das Problem der orthogonalen Trajectorien geleitet werden konnte. A. a. O. legt er dieses Problem zuerst öffentlich vor, jedoch nur für den Fall der logarithmischen Linien (11.), indem er zugleich für den Fall der Cycloiden eine Construction ohne Beweis mittheilt. Das vorgelegte Problem, nebst noch einigen andern (4 — 14.), lösete Jac. Bernoulli in den Act. Erud. 1698. p. 230. auf, worauf Joh. Bernoulli in demselben Jahrgange p. 472. seine analytische Auflösung des Falls der logarithmischen Linien mittheilte, da Jac. Bernoulli nur eine Construction gegeben hatte. In diesem Aufsatze kommt das Wort Trajectoria zuerst vor, und rührt folglich auch von Joh. Bernoulli her, indem er p. 470. sagt: „Supersunt notanda quaedam circa lineas, quos vocabo Trajectorias.“ Zugleich erzählt er, daß er das Problem schon am 2ten Septbr. 1694 an Leibnitz geschrieben, und für die von seinem Bruder aufgelöseten Fälle Auflösungen gegeben habe. Auch dehnt er hier das Problem auf Trajectorien mit willkührlichem Durchschnittswinkel aus, und bemerkt, daß auch Leibnitz schon damals in einem Briefe an ihn tief in das Problem eingedrungen sey. Seit dem Jahre 1698, wo dieser Aufsatz von Joh. Bernoulli erschien, ruhete die Aufgabe eine ziemliche Reihe von Jahren. Als man aber in dem langen Streite, welcher über das Prioritätsrecht der Erfindung der Differentialrechnung zwischen den Geometern Britanniens und des Festlandes geführt wurde, dahin gekommen war, die gegenseitigen Kräfte durch vorgelegte schwierige Aufgaben zu messen, eröffnete Leibnitz ein Jahr vor seinem Tode diesen merkwürdigen Problemenkrieg mit der Aufgabe der orthogonalen Trajectorien, indem er im Jahre 1715 den Engländern durch den Abbé Conti den oben (12.) behandelten Fall von den Hyperbeln vorlegen ließ, „eo fine ut ad pulsum Anglorum nonnihil tentandum illud illis proponeret.“ (Acta Erud. 1718 p. 251. Récueil de div. pièces sur la phil. etc. par Des Maizeaux. T. II. p. 11.) Newton erhielt, wie Fontelle in seiner Lobschrift auf ihn erzählt, das

Problem, als er um vier Uhr sehr ermüdet nach Hause kam, und legte sich nicht eher nieder, als bis er es aufgelöset hatte. Die Auflösung machte er in den Phil. Trans-act. 1716. mit wenigen Worten bekannt, hatte aber den Hauptpunkt, die Integration der Differentialgleichung, unberührt gelassen, weshalb Herrmann in den Act. Erud. 1717. p. 348., wo er die Auflösung Newtons ebenfalls mittheilt, sie nur ein tentamen solutionis nennt. Joh. Bernoulli machte hierauf Leibnitzen bemerklich, daß die Aufgabe zu leicht sey, und theilte ihm zum Beweise die von seinem, damals noch sehr jungen, Sohne Nicolas (geb. 1695, gest. 1726) gefundene Auflösung (12.) mit (Act. Erud. 1716. p. 227.), worauf ihn Leibnitz den 31. Januar 1716 bat, daß er ihm eine andere Aufgabe vorschlagen möchte. Joh. Bernoulli schlug ihm daher in einem Briefe vom 11. März 1716 das oben (21. 22.) aufgelösete Problem vor, wobei zugleich die Bedingung gemacht wurde, die Auflösung wenigstens auf eine Differentialgleichung vom ersten Grade zurückzuführen, welche mittelst der Quadraturen einer Construction fähig sey. Die Sache der Engländer übernahm Taylor (Philos. Transact. 1716. 1717. 1719.), von dessen Auflösung Montucla (T. III. p. 333.) urtheilt, daß sich nichts gegen sie einwenden lasse, und daß er die von Nic. Bernoulli dagegen gemachten Bemerkungen für Chikanen halte. Die übrigen hierher gehörenden Abhandlungen findet man alle in den Act. Erud.: einen Aufsatz von Nic. Bernoulli (1718. p. 248.), worin seines Vaters Johann Auflösung (22.) ohne Beweis mitgetheilt und die Geschichte des Problems kurz erzählt wird; einen Aufsatz von Nic. Bernoulli, dem Sohne Jacobs, Professor zu Padua (1719. p. 295.); den Beschluß macht eine ausführliche Abhandlung des erstern Nic. Bernoulli, welche zugleich eine Kritik der frühern Versuche enthält (1720. p. 223, Supplem. T. VII. 1721. p. 303. p. 338). Außerdem ist noch ein früherer Aufsatz von Herrmann (1717. p. 348.), mit zwei Nachträgen (1718. p. 335. 1719. p. 68.) zu erwähnen, worin die oben mit α bezeichnete Größe Modulus genannt wird. In neuerer Zeit

hat Euler sich die meisten Verdienste um das Problem erworben. Digressio de traj. tam orthogonalibus quam obliquangulis. N. Comm. Petrop. XVII. p. 205 — 248. Considerationes de traj. orthog. N. Comm. Petrop. XIV. Considerat. super traj. tam rectang. quam obliquan. N. Acta Petrop. 1782. P. 2. Auch eine Abhandlung von Trembley in den Mém. de Berlin. 1797., und zwei Aufsätze von Palmquist in den Schwed. Akad. Abhandl. 1748. S. 17. S. 81., so wie von Nicole in den Mém. de Paris. 1715. 1725. Anwendungen der Trajectorien auf das Zeichnen der Landcharten s. m. in Lamberts Beiträgen. III. §. 65. Euler de repraesentatione superficiei sphaericae super plano. Comm. Petrop. 1777. P. I. p. 107. Eine Abhandlung von Lagrange in den Mém. de Berlin. 1779. Nach Mayer (Prakt. Geom. IV. S. 445.) sind die Formeln praktisch nicht brauchbar.

Trajectoria, reciproke, oder gegenseitige, heißt jede über einer gegebenen Axe AB (Fig. 12.) beschriebene Curve CDE, welche so beschaffen ist, daß sie, wenn man sie sich in entgegengesetzter Lage wie cDe denkt, und längs der Axe AB mit sich selbst parallel bewegt, die Linie CDE immer unter ein und demselben gegebenen Winkel durchschneidet.

1. Sey D′ ein willkührlicher Punkt in der Linie CE, durch D′ die Linie B′D′ parallel mit der Axe, und auf der andern Seite in gleicher Entfernung von der Axe, ebenfalls parallel mit ihr, die Linie B″D″ gezogen. Da die beiden Curven CDE, cDe auf beiden Seiten der Axe auf gleiche Art liegen; so ist offenbar der Winkel CDB = cDB, CDc = 2. CDB, und CD″B″ = cd″B′. Weil aber die Curve cDe parallel mit sich selbst längs der Axe bewegt werden, und die Linie CDE immer unter demselben Winkel schneiden soll; so ist c′D′B′ = cd″B′ = CD″B″, CD′c′ = CDc. Also CDc = CD′B′ + c′D′B′ = CD′B′ + CD″B″. Hierdurch wird die Aufgabe, reciproke Trajectorien zu finden, auf folgende Aufgabe zurückgeführt. Ueber einer gegebenen Axe AB eine Curve CDE von solcher Be-

schaffenheit zu beschreiben, daß, wenn man auf beiden Seiten der Axe, in gleicher Entfernung von ihr, willkührlich die Parallelen B'D', B''D'' zieht, die Summe der Winkel CD'B', CD''B'' eine constante Größe = CDc = 2. CDB ist. M. s. Joh. Bernoulli in Act. Erud. 1722. p. 398. Suppl. T. IX. p. 267.

2. Sey nun eine auf AB senkrechte Linie die Axe und B der Anfang der Abscissen, BB' = x, B'D' = y, BB'' = x', B''D'' = y'. Also (Berührende Linie. 14.)

$$\text{tang } CD'B' = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{p}, \text{ tang } CD''B'' = \frac{\partial x'}{\partial y'} = \frac{1}{p'},$$

da AB die Ordinatenaxe ist. Da nun, wenn wir CDB = c setzen, immer CD'B' + CD''B'' = 2c; so ist (Goniometrie. 33.) immer

$$\text{tang } 2c = \frac{p + p'}{pp' - 1}.$$

Nach der Bedingung der Aufgabe ist aber immer x = —x'. Also wird y' aus y, und folglich auch p' oder $\frac{1}{p'}$ aus p oder $\frac{1}{p}$ erhalten, wenn man —x statt x setzt. Setzen wir also $\frac{1}{p} = \varphi x$, so ist $\frac{1}{p'} = \varphi(-x)$, und folglich

$$\text{tang } 2c = \frac{\varphi x + \varphi(-x)}{1 - \varphi x \cdot \varphi(-x)}, \ \varphi(-x) = \frac{\text{tang } 2c - \varphi x}{1 + \text{tang } 2c \cdot \varphi x}.$$

Die Form der Function φx muß also so bestimmt werden, damit sie dieser Gleichung genügt. Zu dem Ende setze man $\varphi x = \text{tang } \psi x$, worauf man leicht fällt, weil dann offenbar auch $\varphi(-x)$ als Tangente, also in gleicher Functionsform mit φx, ausgedrückt wird, indem nämlich

$$\varphi(-x) = \frac{\text{tang } 2c - \text{tang } \psi x}{1 + \text{tang } 2c \cdot \text{tang } \psi x} = \text{tang}(2c - \psi x)$$

(Goniometrie. 33.). Auch geschieht hierdurch der Allgemeinheit kein Eintrag, da die trigonometrische Tangente bekanntlich jeden Werth annehmen kann. Indem man also

$$\varphi x = \text{tang } \psi x, \ \varphi(-x) = \text{tang } (2c - \psi x)$$

setzt, wird im Allgemeinen der Gleichung

$$\text{tang } 2c = \frac{\varphi x + \varphi(-x)}{1 - \varphi x \cdot \varphi(-x)}$$

genügt. Um aber auch der zweiten Bedingung zu genügen,

daß $\varphi(-x)$ oder tang $(2c - \psi x)$ aus φx oder tang ψx erhalten wird, wenn man $-x$ statt x setzt, sey

$$\psi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

$$2c - \psi x = 2c - A - Bx - Cx^2 - Dx^3 - \ldots$$

Da aber $2c - \psi x$ aus ψx erhalten werden soll, wenn man $-x$ statt x setzt; so muß auch seyn

$$2c - \psi x = A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + \ldots$$

woraus sich die Gleichung

$$2c - A - Bx - Cx^2 - Dx^3 - \ldots$$
$$= A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + \ldots$$
$$c = A + Cx^2 + Ex^4 + Gx^6 + \ldots$$

ergiebt. Also

$$A = c,\ C = 0,\ E = 0,\ G = 0, \ldots$$

und folglich

$$\psi x = c + (B + Dx^2 + Fx^4 + Hx^6 + \ldots)\, x$$

d. i. $\psi x = c + Px$, wo P überhaupt eine Function von x ist, welche sich nicht ändert, wenn man $-x$ statt x setzt. Also

$$\varphi x = \text{tang}\,(c + Px),$$

für jede Function P von x, welche sich nicht ändert, wenn man $-x$ für x setzt. Um nun die Differentialgleichung der reciproken Trajectorien zu finden, ist

$$p = \frac{1}{\varphi x} = \cot(c + Px) = \frac{1 - \text{tang}\, c\,.\,\text{tang}\, Px}{\text{tang}\, c + \text{tang}\, Px}$$

$$= \frac{\cos c - \sin c\,.\,\text{tang}\, Px}{\sin c + \cos c\,.\,\text{tang}\, Px} = \frac{\cos c^2 - \sin c \cos c\,.\,\text{tang}\, Px}{\sin c\,.\,\cos c + \cos c^2\,.\,\text{tang}\, Px}$$

$$= \frac{1 + \cos 2c - \sin 2c\,.\,\text{tang}\, Px}{\sin 2c + (1 + \cos 2c)\,\text{tang}\, Px}$$

Also, wenn man $\frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c} = E$ setzt:

$$p = \frac{\cos 2c\,(1 + E\,.\,\text{tg}\, Px) + 1 - \sin 2c\,.\,\text{tg}\, Px - \cos 2c\,.\,E\,.\,\text{tg}\, Px}{\sin 2c\,(1 + E\,\text{tg}\, Px)}$$

$$= \frac{\cos 2c}{\sin 2c} + \frac{1}{\sin 2c}\left\{\frac{1 - E\,\text{tang}\, Px}{1 + E\,\text{tang}\, Px}\right\}$$

Da nun P sich nicht ändert, wenn man $-x$ für x setzt, so wird nach dieser Substitution $E\,\text{tang}\, Px = -E\,\text{tang}\, Px$, so daß also $-E$ tang Px überhaupt eine Function ist, welche für $x = -x$ in ihr Entgegengesetztes übergeht. Eine solche Function läßt sich aber überhaupt durch Xx darstellen, wenn X irgend eine Function bedeutet,

welche für x = — x ungeändert bleibt. Also ist die allgemeine Differentialgleichung der reciproken Trajectorien:

$$\partial y = \partial x \cot 2c + \frac{\partial x}{\sin 2c} \left\{ \frac{1 + Xx}{1 - Xx} \right\}$$

oder die Gleichung selbst:

$$y = x \cot 2c + \frac{1}{\sin 2c} \int \partial x \left\{ \frac{1 + Xx}{1 - Xx} \right\}.$$

Diese schon von Euler gefundene Gleichung findet Lacroix im Traité du calc. diff. et int. T. III. p. 586. mit Hülfe der équations aux différences mêlées, worüber in den Zusätzen zu diesem Werke das Weitere vorkommen wird.

3. Für X = o erhält man leicht, wenn man die Constante = C′ = C tang c setzt:

$$x = y \tang c - C',$$

die Gleichung der geraden Linie, welche also, wie sich übrigens auch von selbst versteht, auch zu den reciproken Trajectorien gehört.

4. Für $X = x^{2n}$ erhält man eben so leicht:

$$y = x \cot 2c - \frac{1}{\sin 2c} \left\{ x + 2 \int \frac{\partial x}{x^{2n+1} - 1} \right\}$$

5. Durch eine schickliche Veränderung des Coordinatensystems ist die allgemeine Gleichung einer Vereinfachung fähig. Nimmt man nämlich b″b′ (Fig. 13.), welche mit AB einen Winkel ABb′ = 2c einschließt, als Axe der Abscissen an, und bezeichnet die Coordinaten in Beziehung auf dieses System durch x′, y′; so ist, wenn wir die Abscissen auf der rechten Seite von AB als positiv annehmen:

$$BB' = x = Bb' \,.\, \cos(2c - 90^\circ) = x' \sin 2c,$$

$$B'D' = y = b'D' - b'B' = y' - Bb' \,.\, \sin(2c - 90^\circ)$$

$$= y' + x' \cos 2c;$$

$$\partial x = \partial x' \sin 2c, \; \partial y = \partial y' + \partial x' \cos 2c.$$

Dies muß man in obiger Gleichung substituiren. Aber

$$X = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots.$$

Setzt man also x′ sin 2c für x; so erhält man

$$X' = A + B'x'^2 + C'x'^4 + D'x'^6 + \ldots$$

eine Function von ähnlicher Form, und es erhellet, daß durch diese Substitution Xx in X′x′ übergeht, wo X′ irgend

eine Function von x' bedeutet, welche sich nicht ändert, wenn man — x' für x' setzt. Also

$$\partial y' + \partial x' \cos 2c = \partial x' \sin 2c \cot 2c + \frac{\partial x' \sin 2c}{\sin 2c} \left\{ \frac{1 + X'x'}{1 - X'x'} \right\},$$

oder, wenn man wieder x, y statt x', y' schreibt:

$$\partial y = \left\{ \frac{1 + Xx}{1 - Xx} \right\} \partial x.$$

Da nach dem Obigen p' aus p erhalten wird, wenn man —x für x setzt; so ist

$$p = \frac{1 + Xx}{1 - Xx}, \quad p' = \frac{1 - Xx}{1 + Xx},$$

woraus augenblicklich folgt:

$$pp' = 1,$$

eine merkwürdige, schon von Joh. Bernoulli (Act. Erud. 1722. p. 398.) auf anderm Wege gefundene Gleichung, wobei nur zu bemerken, daß dies Alles in Bezug auf das zweite Coordinatensystem gilt.

6. Xx sey = u, wo u überhaupt eine Function von x ist, welche für x = — x in — u übergeht; so ist die Gleichung der reciproken Trajectorien:

$$\partial y = \frac{1 + u}{1 - u} \partial x.$$

Euleri Opuscula varii argumenti. III. p. 57.

7. Ist P eine Function, welche für x = — x ihren Werth behält, Q dagegen eine solche, welche nach dieser Substitution ins Entgegengesetzte übergeht; so sind $\frac{P}{Q}$, $\frac{Q}{P}$, PQ Functionen von der Form wie u. Dies giebt folgende neuen Gleichungen der reciproken Trajectorien:

$$\partial y = \frac{Q + P}{Q - P} \partial x, \quad \partial y = \frac{P + Q}{P - Q} \partial x, \quad \partial y = \frac{1 + PQ}{1 - PQ} \partial x.$$

8. Daher kann man auch ganz allgemein setzen:

$$\partial y = \frac{\varphi x \, . \, \partial x}{\varphi(-x)}.$$

Dann sey

$$\varphi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$
$$\varphi(-x) = A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + \ldots$$

Also
$$\varphi x = (A + Cx^2 + Ex^4 + \ldots) + (Bx + Dx^3 + Fx^5 + \ldots)$$
$$= P + Q,$$

$$\varphi(-x) = (A + Cx^2 + Ex^4 + \ldots) - (Bx + Dx^3 + Fx^5 + \ldots)$$
$$= P - Q.$$

Folglich

$$\partial y = \frac{\varphi x \,.\, \partial x}{\varphi(-x)} = \frac{P + Q}{P - Q}\,\partial x,$$

wie es seyn muß (7.).

9. Also auch für jedes n:

$$\partial y = \left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)^n . \,\partial x.$$

10. Nach (8.) sind also z. B.

$$\partial y = \frac{a - x}{a + x}\partial x,\ \partial y = \frac{a^2 - bx + x^2}{a^2 + bx + x^2}\,\partial x,$$

$$\partial y = \frac{a^3 - b^2x + cx^2 - x^3}{a^3 + b^2x + cx^2 + x^3}\,\partial x,\ \partial y = \frac{\sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x}}\partial x,$$

$$\partial y = \frac{\sqrt{a - x} \,.\, \sqrt{a^2 - bx + x^2}}{\sqrt{a + x} \,.\, \sqrt{a^2 + bx + x^2}}\,\partial x,\ \partial y = \frac{(a - x)^p + (b - x)^q}{(a + x)^p + (b + x)^q}\,\partial x$$

Differentialgleichungen reciproker Trajectorien. Alle diese Beispiele giebt Joh. Bernoulli a. a. O. pp. 398. 399.

Integrirt man die erste Formel; so erhält man

$$y = 2a \operatorname{logn}(a + x) - x + \text{Const.}$$

als Gleichung einer reciproken Trajectoria.

11. Es läßt sich auch umgekehrt beweisen, daß jede Curve, für welche $pp' = 1$ ist, zu den reciproken Trajectorien gehört. Sey nämlich

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$
$$p' = A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + \ldots;$$

so folgt leicht wie in (8.):

$$p = P + Q,\ p' = P - Q;$$
$$pp' = (P + Q)(P - Q) = 1;$$
$$P + Q = \frac{1}{P - Q},\ P - Q = \frac{1}{P + Q}.$$

Man setze nun

$$p = \frac{1 + z}{1 - z} = P + Q;$$

so ist $z = \dfrac{P + Q - 1}{P + Q + 1}$, $p = \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{1 + \dfrac{P + Q - 1}{P + Q + 1}}{1 - \dfrac{P + Q - 1}{P + Q + 1}}$.

Aber $P + Q - 1 = \dfrac{1}{P - Q} - 1 = \dfrac{1 - P + Q}{P - Q}$,

$$P + Q + 1 = \frac{1}{P - Q} + 1 = \frac{1 + P - Q}{P - Q},$$

und folglich

$$\frac{P + Q - 1}{P + Q + 1} = \frac{1 - P + Q}{1 + P - Q}.$$

Wegen der Natur der Functionen P und Q wird nun, wenn $-x$ für x gesetzt wird:

$$\frac{P + Q - 1}{P + Q + 1} = \frac{P - Q - 1}{P - Q + 1} = -\frac{1 - P + Q}{1 + P - Q},$$

so daß also $\frac{P + Q - 1}{P + Q + 1}$ eine Function von x ist, welche für $x = -x$ ins Entgegengesetzte übergeht, und folglich $= u$ gesetzt werden kann. Also

$$\partial y = \frac{1 + u}{1 - u} \partial x,$$

wie es für die reciproken Trajectorien seyn muß (6.).

12. Joh. Bernoulli lehrt a. a. O. p. 403. eine sehr elegante Construction reciproker Trajectorien, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist. Man beschreibe in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten eine willkührliche Curve FF′ (Fig. 14.), welche auf beiden Seiten von AB auf völlig gleiche Art liegt, nehme $FD = F'D$, $FE = FD$, $F'E' = F'D$; so sind E, E′ Punkte der gesuchten Trajectoria, deren man also eine willkührliche Anzahl finden kann. Um dies zu beweisen sey $FK = F'K' = y'$, $EK = y$, $BK = -BK' = x$; so ist (Rectification. 3.) $FD = F'D' = \int \sqrt{\partial x^2 + \partial y'^2}$. Da die Curve FF′ aber auf beiden Seiten von AB auf einerlei Art liegt; so ist y' eine Function von x, welche für $x = -x$ ihren Werth nicht ändert, und kann also $= X$ gesetzt werden, so daß nach der Construction $FE = F'E' = \int \sqrt{\partial x^2 + \partial X^2}$. Aber $EK = FK + FE$, $E'K' = FK - FE$. Also, da die Wurzel, und folglich das Integral positiv und negativ genommen werden kann, für beide Fälle:

$$y = X + \int \sqrt{\partial x^2 + \partial X^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} + \sqrt{1 + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2}$$

Nach dem Obigen kann man setzen:

$$X = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2Bx + 4Cx^3 + 6Dx^5 + \ldots$$

so daß also $\frac{\partial X}{\partial x}$ für $x = -x$ in's Entgegengesetzte übergeht. Also

$$p = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2} + \frac{\partial X}{\partial x},\ p' = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2} - \frac{\partial X}{\partial x},$$

woraus augenblicklich folgt:

$$pp' = 1,$$

so daß also die beschriebene Curve eine reciproke Trajectoria ist (11.), deren Gleichung und Differentialgleichung:

$$\partial y = \partial X + \sqrt{\partial x^2 + \partial X^2},\ y = X + \int\sqrt{\partial x^2 + \partial X^2}.$$

Da der Coordinatenwinkel $= 90^0$ angenommen worden ist; so ist auch $2c = 90^0$ (5.).

Ist die erzeugende Curve eine algebraische Curve, die sich algebraisch rectificiren läßt; so ist klar, daß die erhaltene Trajectoria auch eine algebraische Linie ist.

13. Ist die erzeugende Curve ein Kreis (Fig. 15.); so ist $MN = LK = \frac{1}{2} r\pi$, wenn r den Halbmesser dieses Kreises bezeichnet. Also nach der Natur des Kreises

$$X = y' = \sqrt{r^2 - x^2},$$

woraus sich leicht nach (12.) ergiebt:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} + \int\frac{r\partial x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \sqrt{r^2 - x^2} + r\int\frac{\partial \cdot \frac{x}{r}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}}$$

$$= \sqrt{r^2 - x^2} - r.\ \text{Arc}\cos\frac{x}{r} + C$$

(Integralformel 49.).

Setzt man nun $KU = x_1$, $UV = y_1$; so ist, da $BS = x$, $SV = y$:

$$x_1 = r + x,\ y_1 = \tfrac{1}{2} r\pi + y.$$

Nach gehöriger Substitution in obige Gleichung, indem man die Constante so bestimmt, daß $y_1 = 0$ wird für $x_1 = 0$, erhält man leicht:

$$y_1 = \sqrt{2rx_1 - x_1^2} + r\ \text{Arc sin vers}\frac{x_1}{r},$$

woraus sich ergiebt, daß in diesem Falle die reciproke Trajectoria eine gemeine Cycloide ist. (Trajectoria. 16., wenn

man an diesem Orte die Coordinaten nur so verändert, daß der Scheitel der Cycloide als Anfang, und ihre Axe als Axe der Abscissen angenommen wird.)

14. Hat man für einen Winkel DBb' (Fig. 16.) eine reciproke Trajectoria CE beschrieben, so läßt sich auch leicht für jeden andern Winkel dBb' eine beschreiben. Man ziehe nur die Linien Bd, b'd', b''d'', u. s. f. einander parallel, nehme Bd = BD, b'd' = b'D', b''d'' = b''D'', u. s. f., und beschreibe durch die Punkte d, d', d'', u. s. f. die Curve ce, welche die gesuchte seyn wird. Denn es bleibt, wie man auch die Ordinaten neigen mag, nach dieser Construction offenbar immer $y = \int \frac{1+u}{1-u} \partial x$. Da man nun für einen rechten Winkel reciproke Trajectorien beschreiben kann; so kann man es auch für jeden andern.

15. Joh. Bernoulli hat auch folgenden merkwürdigen Satz (A. a. O. p. 406.) gefunden. Wenn CE (Fig. 17.) eine reciproke Trajectoria, für den Winkel 2c ist, und man nimmt DG = CD, D'G' = CD', D''G'' = CD'', u. s. f. und beschreibt die Curve CE'; so ist diese eine reciproke Trajectoria für den Winkel c. Man setze, um dies zu beweisen, BF' = x, F'D' = y; BF' = x', F'G' = y', und halbire den Winkel ABF' durch BK. Nun ist, wie sich leicht aus (Rectification. 3.) ergiebt, wenn man die Formel für schiefwinklige Coordinaten einrichtet:

$$CD' = \int \sqrt{\partial x^2 + 2\partial x \partial y \cos 2c + \partial y^2},$$

$$y' = y + \int \sqrt{\partial x^2 + 2\partial x \partial y \cos 2c + \partial y^2},$$

$$\partial y' = \partial y + \sqrt{\partial x^2 + 2\partial x \partial y \cos 2c + \partial y^2}.$$

Nimmt man aber BK als Abscissenaxe an; so erhellet augenblicklich, daß für BH = x'', HG' = y'':

$$x = \tfrac{1}{2} x'' \sec c, \; y' = y'' + x.$$

$$\frac{\partial y''}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - 1 + \sqrt{1 + 2 \cos 2c \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

$$\frac{2\partial y''}{\sec c \,.\, \partial x''} = p - 1 + \sqrt{1 + 2p \cos 2c + p^2}.$$

Bezeichnen wir nun $\frac{\partial y''}{\partial x''}$ durch q, und seinen Werth für $x'' = -x''$ durch q'; so ist, weil für $x'' = -x''$ auch $x = -\frac{1}{2} x'' \sec c = -x$ wird:

$$\frac{2q}{\sec c} = p - 1 + \sqrt{1 + 2p \cos 2c + p^2},$$

$$\frac{2q'}{\sec c} = p' - 1 + \sqrt{1 + 2p' \cos 2c + p'^2}.$$

Aber $pp' = 1$ (5.) Also

$$\frac{2q}{\sec c} = p - 1 + \sqrt{1 + 2p \cos 2c + p^2},$$

$$\frac{2q'}{\sec c} = \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{p}\sqrt{1 + 2p \cos 2c + p^2}.$$

Durch Multiplication erhält man:

$$\frac{4qq'}{\sec c^2} = 2(1 + \cos 2c),\ qq' = \frac{2 \cos c^2 . \sec c^2}{2} = 1.$$

Also ist CE' eine reciproke Trajectoria für den Winkel ABK = c.

Wie man durch mehrfache Anwendung dieser Construction, wenn wir $2c = c'$ setzen, reciproke Trajectorien für die Winkel c', $\frac{1}{2}c'$, $\frac{1}{4}c'$, $\frac{1}{8}c'$, u. s. f. finden kann, erhellet augenblicklich.

16. Sind CE, C'E' (Fig. 18.) zwey reciproke Trajectorien für die Winkel α, β, und man beschreibt eine Linie C''E'' von solcher Beschaffenheit, daß für jede Ordinate PQ, ein rechtwinkliges Coordinatensystem vorausgesetzt, $\omega = \varphi + \psi$ ist; so ist C''E'' eine reciproke Trajectoria für den Winkel $\alpha + \beta$. Denkt man sich nämlich die drey Linien in umgekehrter Lage; so ist $\varphi = \varphi'$, $\psi = \psi'$, $\omega = \omega'$. Aber $\omega = \varphi + \psi$, $\omega' = \varphi' + \psi'$, also immer $\omega + \omega' = \varphi + \varphi' + \psi + \psi' = \alpha + \beta$. Für $BP = x$, $PG = y'$, $PG' = y'$, $PG'' = y$ ist:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\partial x}{\partial y'},\ \text{tang}\,\psi = \frac{\partial x}{\partial y''},\ \text{tang}\,\omega = \text{tang}(\varphi + \psi) = \frac{\partial x}{\partial y},$$

woraus leicht erhalten wird:

$$\partial y = \frac{\frac{\partial y'}{\partial x} \cdot \frac{\partial y''}{\partial x} - 1}{\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y''}{\partial x}} \partial x,$$

die Differentialgleichung der Curve C''E''.

17. Hierher gehört auch das Problem von der Pautogonia (M. s. diesen Artikel), deren Gleichung wir hier aufsuchen wollen. Ist die (Fig. 19.) verzeichnete Curve

die Pantogonia, FE eine willkührliche Ordinate, so wie F'E', F''E'' zwei andere davon gleichweit abstehende Ordinaten; so ist nach der Erklärung (a. a. O.) und nach (1.) immer $2\varphi = \varphi' + \varphi''$. Also, wenn wir $AE = x$, $AE' = x'$, $AE'' = x''$ setzen:

$$1 : 2 = \varphi : \varphi' + \varphi'', \; x : 2x = \varphi : \varphi' + \varphi'',$$
$$x : x' + x'' = \varphi : \varphi' + \varphi'',$$

da $x' + x'' = AE' + AE'' = AE - EE' + AE + EE'' = 2AE = 2x$, weil $EE' = EE''$ ist. Nimmt man nun die Ordinaten in unendlich kleinen Abständen, so geht $x' + x''$ in $2x''$, und $\varphi' + \varphi''$ in $2\varphi''$ über, und obige Proportion verwandelt sich in:

$$x : x'' = \varphi : \varphi''$$

Man hat also für die stetige Reihe der Ordinaten, wenn man den auf der linken Seite von x' liegenden Abscissen die Indices links beifügt:

. . . .

$$''x : 'x = ''\varphi : '\varphi,$$
$$'x : x' = '\varphi : \varphi',$$
$$x' : x = \varphi' : \varphi,$$
$$x : x'' = \varphi : \varphi'',$$
$$x'' : x''' = \varphi'' : \varphi''',$$

. . . .

woraus sich unmittelbar ergiebt, daß die Abscissen sich wie die Winkel verhalten, welche die Pantogonia mit den Ordinaten einschließt, welches sich auch leicht umgekehrt beweisen läßt.

Man bezeichne jetzt AE durch x', denke sich mit einem willkührlichen Radius r einen Kreis beschrieben, und von diesem einen Bogen abgeschnitten, welcher $= x'$ ist; so ist, wenn wir dieses Bogens Sinus durch x bezeichnen:

$$x' = r \text{ Arc sin } \frac{x}{r},$$

Aber (Berührende Linie. 14.)

$$\text{tang } \varphi = \frac{\partial x'}{\partial y}, \; \varphi = r \text{ Arc tang } \frac{\partial x'}{\partial y},$$

wenn φ ebenfalls auf den mit dem Radius r beschriebenen Kreis bezogen wird. Setzen wir nun das constante Verhältniß der Abscissen zu den mit φ bezeichneten Winkeln $= 1:n$; so erhält man die Gleichung

$$\text{Arc tang}\,\frac{\partial x'}{\partial y} = n\,\text{Arc sin}\,\frac{x}{r}.$$

Aber $\partial x' = r\partial\,\text{Arc sin}\,\frac{x}{r} = \frac{r\partial x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$,

$$\text{Arc sin}\,\frac{x}{r} = \text{Arc tang}\,\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{Arc tang}\,\frac{r\partial x}{\partial y\sqrt{r^2 - x^2}} = n\,\text{Arc tang}\,\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Für $n = 1$ erhält man also:

$$\frac{r\partial x}{\partial y\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},\quad \frac{r\partial x}{x} = \partial y,$$

$$y = C + \text{logn}\,x,$$

oder für $r = a$, $C = c - a\,\text{logn}\,b$:

$$y = c + a\,\text{logn}\,\frac{x}{b}$$

M. s. Thl. III. S. 710. Für $n = 2$ ist

$$2\,\text{Arc tang}\,\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \text{Arc tang}\,\frac{2x\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2 - 2x^2},$$

$$\frac{r\partial x}{\partial y\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2x\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2 - 2x^2},$$

$$y = c + \tfrac{1}{2}r\int\frac{(r^2 - 2x^2)\,\partial x}{x(r^2 - x^2)}.$$

Auf ähnliche Art für andere Werthe von n.

18. Joh. Bernoulli und vorzüglich Euler haben sich sehr viel mit der Auffindung algebraischer reciproker Trajectorien beschäftigt. Eine Zusammenstellung der verschiedenen Methoden würde eine weitläufige Abhandlung erfordern. Ich begnüge mich daher hier nur die eine Methode Eulers in den Opusc. varii argumenti. T. III. p. 54. mitzutheilen, welche, wenn auch gerade nicht die allgemeinste, deshalb besonders merkwürdig zu seyn scheint, weil sie gar keiner Integration bedarf, welches Euler p. 60. selbst als einen Vorzug dieser Methode angiebt.

19. Zu den obigen allgemeinen Gleichungen reciproker Trajectorien fügt Euler noch die Gleichungen:

$$\partial y = (\sqrt{1 + u^2} + u)^n\,.\,\partial x,$$

$$\partial y = \left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)^n.\,v\partial t,$$

wo $\partial x = v\partial t$ ist, und t eine neue veränderliche Größe be-

deutet, von welcher x so abhängt, daß x in $-x$ übergeht, für $t = -t$, also

$$x = At + Bt^3 + Ct^5 + Dt^7 + \ldots,$$
$$\partial x = (A + 3Bt^2 + 5Ct^4 + 7Dt^6 + \ldots) \partial t,$$

und folglich v eine Function von t ist, welche für $t = -t$ ihren Werth nicht ändert. u hat immer die Bedeutung (6.).

Daß beides Gleichungen reciproker Trajectorien sind, folgt leicht aus (11.). Denn in Bezug auf die erste ist

$$p = (\sqrt{1+u^2} + u)^n, \; p' = (\sqrt{1+u^2} - u)^n;$$
$$pp' = \{(\sqrt{1+u^2} + u)(\sqrt{1+u^2} - u)\}^n = 1.$$

In Bezug auf die zweite ist

$$p = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n, \; p' = \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n;$$
$$pp' = \left\{\frac{(1+u)(1-u)}{(1-u)(1+u)}\right\}^n = 1.$$

Eben so könnte man zeigen, daß

$$\partial y = (\sqrt{1+u^2} + u)^n \,.\, v\partial t$$

eine Gleichung reciproker Trajectorien ist.

Euler lehrt nun die Erfindung algebraischer Trajectorien aus den vier Formeln

$$\partial y = \frac{1+u}{1-u}\,\partial x, \; \partial y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n . \partial x,$$
$$\partial y = (\sqrt{1+u^2}+u)^n . \partial x, \; \partial y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n . v\partial t$$

auf folgende Art, woraus sich eben so viele allgemeine Regeln ergeben.

20. Da u negativ wird für $x = -x$, so entspricht dem Werthe $-u$ von u offenbar auch der Werth $-x$ von x, und x ist folglich eine ungerade Function von u. Man muß nun untersuchen, was für eine ungerade Function x von u ist, damit $\frac{1+u}{1-u}\,\partial x$ integrabel, und zugleich y algebraisch durch u ausgedrückt wird. Nach Thl. II. S. 783. ist

$$y = \frac{1+u}{1-u}\,x - 2\int \frac{x\partial u}{(1-u)^2},$$

so daß also bloß noch $\int \frac{x\partial u}{(1-u)^2}$ algebraisch integrabel gemacht zu werden braucht. Zu dem Ende setzt Euler,

wenn p irgend eine gerade, q irgend eine ungerade Function von u bedeutet:

$$2\int\frac{x\partial u}{(1-u)^2}=\frac{(p+q)(1+u)}{1-u},$$

woraus durch Differentation

$$2x=(1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u}+(1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u}+2(p+q)$$

für jedes u. Nimmt man nun alle geraden und alle ungeraden Functionen von u zusammen; so erhält man für jedes u:

$$2x-(1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u}-2q=(1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u}+2p,$$

welches im Allgemeinen für jedes u nur dann statt finden kann, wenn für sich:

$$2x-(1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u}-2q=0,\ (1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u}+2p=0.$$

Also $p=-\frac{(1-u^2)\partial q}{2\partial u}$, $x=\frac{(1-u^2)\partial p}{2\partial u}+q$.

Dies, in die obige allgemeine Gleichung substituirt, giebt:

$$y=\frac{(\partial p+\partial q)(1+u)^2}{2\partial u},$$

wodurch offenbar y algebraisch durch u bestimmt ist, wenn nur p, q, algebraische Functionen von u sind. Hieraus ergiebt sich die

Erste Regel. Man nehme irgend eine ungerade Function q von u, suche daraus

$$p=-\frac{(1-u^2)\partial q}{2\partial u},$$

so wird

$$x=\frac{(1-u^2)\partial p}{2\partial u}+q,\ y=\frac{(\partial p+\partial q)(1+u)^2}{2\partial u}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen u; so erhält man die Gleichung zwischen x und y.

Für $q=u^\lambda$, wenn λ irgend eine ungerade Zahl ist, erhält man:

$$x=-\tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2}+\tfrac{1}{2}(\lambda\lambda+2)u^{\lambda}-\tfrac{1}{4}\lambda(\lambda+1)u^{\lambda+2},$$

$$y=\tfrac{1}{4}\lambda u^{\lambda-2}(1-\lambda+u+\lambda u)(1+u)^3.$$

Für $\lambda=1$ wird:

$$x = \tfrac{3}{2}u - \tfrac{1}{2}u^3,\quad y = \tfrac{1}{2}(1+u)^3,$$

woraus $u = \sqrt[3]{2y} - 1,\ x = -y + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{4y^2} - 1.$

Die Größe $-y + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{4y^2}$ wird $= 0$ für $y = 0$ und $y = \tfrac{27}{2}$.

Rechnet man nun die Abscissen von einem Punkte an, welcher um eine der Einheit gleiche Größe vom primitiven Anfangspunkte weiter nach der positiven Seite hin liegt; so wird obige Gleichung

$$x = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{4y^2} - y,$$

und die Ordinatenaxe wird von der Curve zwei Mal, für $y = 0$ und $y = \tfrac{27}{2}$, geschnitten. In (Fig. 20.) ist die Curve für einen Durchschnittswinkel $= 90^0$ verzeichnet. Verwechselt man die Ordinaten mit den Abscissen; so wird die Gleichung

$$y = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{4x^2} - x,\quad x + y = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{4x^2}.$$

Halbirt man den rechten Winkel GAD durch AH, und setzt $AF = x'$, $FC = y'$; so ist, wegen $FE = AE = x$, $AB = y$:

$$y' = x + y,\quad x'^2 = 2x^2,$$

woraus leicht folgt: $y'^3 = \tfrac{27}{4}x'^2$.

Also ist diese reciproke Trajectoria eine Parabola cubicalis secunda (Thl. III. S. 725.), deren Parameter $= \tfrac{27}{4}$. Joh. Bernoulli nennt sie (Act. Erud. 1725. p. 319.) Parabolam cubicalem secundam semirectam, weil die Abscissen mit den Ordinaten einen halben rechten Winkel einschließen. Sie ist ihm Trajectoria reciproca, quae inter omnes algebraicas possibiles est simplicissima.

21. Aus der zweiten Formel in (19.) erhält man nach der Reductionsformel (Thl. II. S. 783.) wie vorher

$$y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n . x - 2n\int \frac{x\partial u}{1-u^2}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n.$$

Euler setzt $\int \frac{x\partial u}{1-u^2}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n = (p+q)\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^n$,

woraus durch Differentiation:

$$x = (1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u} + (1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u} + 2n(p+q),$$

und folglich, wenn man wieder alle gerade und ungerade Functionen von u zusammennimmt:

$$x - (1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u} - 2nq = (1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u} + 2np,$$

$$x - (1-u^2)\frac{\partial p}{\partial u} - 2nq = 0, \quad (1-u^2)\frac{\partial q}{\partial u} + 2np = 0.$$

Also

$$p = -\frac{(1-u^2)\partial q}{2n\partial u},\ x = 2nq + \frac{(1-u^2)\partial p}{\partial u},$$

$$y = \frac{(\partial p + \partial q)(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}\,.\,\partial u}.$$

Dies giebt die

Zweite Regel. Sey q irgend eine ungerade Function von u; so nehme man für irgend ein n:

$$p = -\frac{(1-u^2)\partial q}{2n\partial u}.$$

Dann ist

$$x = 2nq + \frac{(1-u^2)\partial p}{\partial u},\ y = \frac{(\partial p + \partial q)(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}\partial u}.$$

Durch Elimination von u erhält man eine Gleichung zwischen x und y.

Für $q = 2nu^\lambda$, wo λ irgend eine ungerade Zahl ist, erhält man:

$$x = u^{\lambda-2}\left\{-\lambda(\lambda-1) + 2(\lambda^2+2n^2)u^2 - \lambda(\lambda+1)u^4\right\},$$

$$y = -\lambda u^{\lambda-2}\left\{\lambda - 1 - 2nu - (\lambda+1)u^2\right\}.\frac{(1+u)^{n+1}}{(1-u)^{n-1}}.$$

22. Es erhellet aber leicht, daß man auch bei jeder reciproken Trajectoria die Coordinaten sich in einerlei Verhältniß verändern lassen kann. Denn ist $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; so ist $\frac{\partial(\varphi n\,.\,y)}{\partial(\varphi n\,.\,x)} = \frac{\varphi n\,.\,\partial y}{\varphi n\,.\,\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = p$, also auch in diesem Falle, wenn man $-x$ für x setzt, der Differentialquotient $= p'$, und folglich $pp' = 1$.

Nimmt man daher, wie Euler thut, die Coordinaten halb und entgegengesetzt; so ergiebt sich:

$$x = u^{\lambda-2}\left\{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - (\lambda^2+2n^2)u^2 + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}u^4\right\}$$

$$y = \lambda u^{\lambda-2} \left\{ \frac{\lambda - 1}{2} - nu - \frac{\lambda + 1}{2} u^2 \right\} \cdot \frac{(1 + u)^{n+1}}{(1 - u)^{n-1}}.$$

23. Für $q = 2nu^\lambda (1 - u^2)^m$ erhält man, wenn man beide Coordinaten entgegengesetzt nimmt:

$$x = u^{\lambda-2} (1 - u^2)^m \left\{ \begin{array}{l} \lambda(\lambda-1) - 2(2n^2 + \lambda^2 + 2m\lambda + m) u^2 \\ + (2m + \lambda)(2m + \lambda + 1) u^4 \end{array} \right\}$$

$$y = \left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)^n . u^{\lambda-2} (1 - u^2)^m$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \lambda(\lambda - 1) - 2n\lambda u - 2(\lambda^2 + 2m\lambda + m) u^2 \\ + 2n(2m + \lambda) u^3 + (2m + \lambda)(2m + \lambda + 1) u^4 \end{array} \right\}$$

woraus für $\lambda = 1$ und $m = -1$:

$$x = -\frac{4(n^2 - 1) u}{1 - u^2},\ y = -\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)^n . \frac{2(n - 2u + nu^2)}{1 - u^2},$$

oder, wenn man beide Coordinaten mit $\frac{-a}{2(n^2 - 1)}$ multiplicirt:

$$x = \frac{2au}{1 - u^2},\ y = \left(\frac{1 + u}{1 - u}\right)^n . \frac{a(n - 2u + nu^2)}{(n^2 - 1)(1 - u^2)}.$$

Bestimmt man aus der ersten dieser Gleichungen u, und setzt es in die zweite; so erhält man

$$y = \frac{(n\sqrt{a^2 + x^2} - x)(\sqrt{a^2 + x^2} + x)^n}{(n^2 - 1) a^n}.$$

24. Die merkwürdigen Formeln, welche Euler a. a. O. S. 81. ohne Beweis giebt, lassen sich auf folgende Art allgemein beweisen. Man setze:

$$(\sqrt{a^2 + x^2} + x)^n = P + Q\sqrt{a^2 + x^2};$$

so erhält man durch Differentiation:

$$n(\sqrt{a^2 + x^2} + x)^n \partial x = (a^2 + x^2)\partial Q + Qx\partial x + \partial P . \sqrt{a^2 + x^2}$$
$$= n P\partial x + n Q\partial x . \sqrt{a^2 + x^2}$$

für jedes x. Also kann man setzen:

$$(a^2 + x^2)\partial Q + Qx\partial x = nP\partial x,\ \partial P = nQ\partial x,$$

oder:
$$(a^2 + x^2)\frac{\partial Q}{\partial x} + Qx = nP,\ \frac{\partial P}{\partial x} = nQ.$$

Soll nun $(\sqrt{a^2 + x^2} + x)^n$ in zwei Theile getheilt werden, daß der eine Theil bloß gerade, der andere bloß ungerade Potenzen enthalte; so setze man:

$$P = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots$$
$$Q = A'x + B'x^3 + C'x^5 + D'x^7 + \ldots$$

Also vermöge obiger beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a^2A' + 3a^2B'x^2 + 5a^2C'x^4 + 7a^2D'x^6 + \ldots \\ + \quad A'x^2 + \quad 3B'x^4 + \quad 5C'x^6 + \ldots \\ + \quad A'x^2 + \quad B'x^4 + \quad C'x^6 + \ldots \end{array}\right\} = $$
$$nA + nBx^2 + nCx^4 + nDx^6 + \ldots$$

und

$$2Bx + 4Cx^3 + 6Dx^5 + 8Ex^7 + \ldots$$
$$= nA'x + nB'x^3 + nC'x^5 + nD'x^7 + \ldots$$

Aus der zweiten erhält man:

$2B = nA'$;	$B = \frac{1}{2}nA'$;
$4C = nB'$;	$C = \frac{1}{4}nB'$;
$6D = nC'$;	$D = \frac{1}{6}nC'$;
$8E = nD'$;	$E = \frac{1}{8}nD'$;
u. s. w.	u. s. w.

Die erste giebt: $a^2A' = nA$,

$$3a^2B' = nB - 2A' = \frac{(n^2-4)A'}{2},$$

$$5a^2C' = nC - 4B' = \frac{(n^2-16)B'}{4},$$

$$7a^2D' = nD - 6C' = \frac{(n^2-36)C'}{6},$$

u. s. f. u. s. f.

Also

$$A' = \frac{nA}{a^2},$$

$$B' = \frac{n(n^2-4)A}{2 \cdot 3a^4},$$

$$C' = \frac{n(n^2-4)(n^2-16)A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^6},$$

$$D' = \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7a^8},$$

u. s. f. u. s. f.

$$B = \frac{n^2A}{2a^2},$$

$$C = \frac{n^2(n^2-4)A}{2 \cdot 3 \cdot 4a^4},$$

$$D = \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6a^6},$$

$$E = \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)A}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8a^8},$$

u. s. f. u. s. f.

Also ist bloß noch A zu bestimmen. Für $x = 0$ wird

$P = A$, $Q = 0$, $(\sqrt{a^2 + x^2} + x)^n = a^n$. Also $A = a^n$; und folglich

$$(\sqrt{a^2 + x^2} + x)^n =$$
$$a^n + \frac{n^2}{2} a^{n-2} x^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4} a^{n-4} x^4 + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6} a^{n-6} x^6 + \ldots$$
$$+ \left\{ n a^{n-2} x + \frac{n(n^2-4)}{2.3} a^{n-4} x^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5} a^{n-6} x^5 + \ldots \right\} \sqrt{a^2+x^2}.$$

Dies giebt nach (23.):

$$(n^2-1) a^n y = (nP - Qx)\sqrt{a^2+x^2} + nQ(a^2+x^2) - Px$$
$$= \left\{ n a^n + \frac{n(n^2-2)}{2} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n^2-4)(n^2-4)}{2.3.4} a^{n-4} x^4 + \frac{n(n^2-6)(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6} a^{n-6} x^6 + \ldots \right\} \sqrt{a^2+x^2}$$
$$+ (n^2-1) a^n x + \frac{n^2(n^2-1)}{2.3} a^{n-2} x^3 + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{2.3.4.5} a^{n-4} x^5 + \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6.7} a^{n-6} x^7 + \ldots$$

eine sehr allgemeine Gleichung reciproker Trajectorien, welche sich, wenn n eine gerade Zahl ist, jederzeit auf einen endlichen Ausdruck reducirt.

Für $n = 2$ erhält man

$$3a^2 y - 3a^2 x - 2x^3 = (2a^2 + 2x^2)\sqrt{a^2+x^2},$$

woraus durch Quadrirung erhalten wird:

$$4a^4 - 9a^2y^2 + 18a^2xy + 3a^2x^2 + 12x^3y = 0,$$

oder für $a^2 = \alpha\beta$:

$$4\alpha^2\beta^2 - 9\alpha\beta y^2 + 18\alpha\beta xy + 3\alpha\beta x^2 + 12yx^3 = 0,$$

wie auch schon Joh. Bernoulli (Act. Erud. Suppl. T. IX. p. 277.) gefunden hat. Er nennt diese reciproke Trajectoria omnium algebraicarum post primam simplicissimam.

25. Für

$$P = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots$$
$$Q = A' + B'x^2 + C'x^4 + D'x^6 + \ldots$$

erhält man mittelst derselben zwei Differentialgleichungen ganz wie vorher:

$$(\sqrt{a^2+x^2}+x)^n = \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n^2-1)}{2.3}a^{n-3}x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}a^{n-5}x^5 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7}a^{n-7}x^7 + \ldots\ldots + \left\{ a^{n-1} + \frac{n^2-1}{2}a^{n-3}x^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}a^{n-5}x^3 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6}a^{n-7}x^5 + \ldots\ldots \right\} \sqrt{a^2+x^2}$$

$$(n^2-1)a^n y = na^{n+1} + \frac{n(n^2-1)}{2}a^{n-1}x^2 + \frac{n(n^2-1)(n^2-1)}{2.3.4}a^{n-3}x^4 + \frac{n(n^2-1)(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5.6}a^{n-5}x^6 + \ldots\ldots + \left\{ (n^2-1)a^{n-1}x + \frac{(n^2-3)(n^2-1)}{2.3}a^{n-3}x^3 + \frac{(n^2-5)(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}a^{n-5}x^5 + \frac{(n^2-7)(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7}a^{n-7}x^7 + \ldots\ldots \right\} \sqrt{a^2+x^2}.$$

26. Ist n ein Bruch $= \frac{n}{m}$; so giebt die Gleichung in (23.) leicht:

$$y^m = \frac{(n\sqrt{1+x^2}-mx)^m.(\sqrt{1+x^2}+x)^n.m^m}{(n^2-m^2)^m}$$

wenn zugleich $a = 1$ gesetzt wird.

Für $m = 1$ giebt Euler S. 75. eine hieraus durch Induction gefundene, von der Irrationalität befreite Gleichung, nebst sieben speciellen Fällen, worüber man die Abhandlung selbst nachsehen muß.

27. Aus der dritten Formel in (19.) erhält man:

$$y = x(\sqrt{1+u^2}+u)^n - \int x\partial.(\sqrt{1+u^2}+u)^n$$
$$= x(\sqrt{1+u^2}+u)^n - n\int\frac{x(\sqrt{1+u^2}+u)^n.\partial u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Für $\int\frac{x(\sqrt{1+u^2}+u)^n.\partial u}{\sqrt{1+u^2}} = (p+q)(\sqrt{1+u^2}+u)^n$

erhält man durch Differentiation:

$$\frac{x}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\partial p}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial u} + \frac{n(p+q)}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Denkt m[illegible] u^2 nach dem binomischen Lehrsatze ent[illegible] daß $\sqrt{1+u^2}$ eine gerade Function [illegible]ine ungerade Function von u ist;

so ist offenbar auch $\frac{x}{\sqrt{1+u^2}}$ eine ungerade, und eben so $\frac{p}{\sqrt{1+u^2}}$ eine gerade, $\frac{q}{\sqrt{1+u^2}}$ dagegen eine ungerade. Nimmt man daher die geraden und ungeraden Functionen zusammen; so erhält man

$$\frac{x}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{nq}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\partial q}{\partial u} + \frac{np}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Also wie oben:

$$\frac{x}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{nq}{\sqrt{1+u^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{np}{\sqrt{1+u^2}} = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$p = -\frac{\partial q\sqrt{1+u^2}}{n\partial u},\quad x = nq + \frac{\partial p\sqrt{1+u^2}}{\partial u},$$

$$y = \frac{(\partial p + \partial q)\sqrt{1+u^2}}{\partial u}(\sqrt{1+u^2} + u)^n$$

und hieraus entspringt die

Dritte Regel. Man nehme irgend eine ungerade Function q von u, setze $p = -\frac{\partial q\sqrt{1+u^2}}{n\partial u}$, und bestimme x, y nach den obigen Formeln; so giebt die Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen eine Gleichung zwischen x und y.

Bestimmt man aus der ersten Formel $\frac{\partial p}{\partial u}$, und eliminirt p aus den Formeln für x und y; so erhält man:

$$x = nq - \frac{u\partial q}{n\partial u} - \frac{(1+u^2)\partial^2 q}{n\partial u^2},$$

$$y = \left\{\frac{\partial q\sqrt{1+u^2}}{\partial u} - \frac{u\partial q}{n\partial u} - \frac{\partial^2 q(1+u^2)}{n\partial u^2}\right\}(\sqrt{1+u^2}+u)^n$$

woraus, wenn λ eine ungerade Zahl bezeichnet, für $q = u^\lambda$:

$$x = \frac{n^2-\lambda^2}{n}u^\lambda - \frac{\lambda(\lambda-1)}{n}u^{\lambda-2},$$

$$y = -\frac{\lambda u^{\lambda-2}}{n}(\lambda-1-nu\sqrt{1+u^2}+\lambda u^2)(\sqrt{1+u^2}+u)^n$$

oder (22.)

$$x = (n^2-\lambda^2)u^\lambda - \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2},$$

$$y = -\lambda u^{\lambda-2}(\lambda-1-nu\sqrt{1+u^2}+\lambda u^2)(\sqrt{1+u^2}+u)^n.$$

Setzt man in den beiden erstern Formeln $\lambda = n$, nimmt beide Coordinaten negativ, und dividirt sie durch $n-1$; so erhält man:

$$x = u^{n-2},$$
$$(n-1)y = u^{n-2}(n-1-nu\sqrt{1+u^2}+nu^2)(\sqrt{1+u^2}+u)^n,$$

woraus für $n = 3$, wenn man $(\sqrt{1+x^2}+x)^3$ nach (25.) entwickelt, und das Wurzelzeichen wegschafft:

$$4y^2 - 12x^2y - 8x^4y = 4x^2 + 3x^4.$$

28. In der vierten Formel in (19.) ist v eine gerade Function von t, u eine ungerade Function von t, also auch t eine ungerade Function, v aber natürlich auch eine gerade Function von u. Euler setzt $v = 1 - u^2$, $n = 1$; so ist

$$\partial x = v\partial t = (1-u^2)\partial t,\ \partial y = \left(\frac{1+u}{1-u}\right)v\partial t = (1+u)^2 . \partial t;$$
$$x = t - \int u^2\partial t,\ y = t + 2\int u\partial t + \int u^2\partial t.$$

Also müssen $u\partial t$ und $u^2\partial t$ algebraisch integrabel seyn. Es ist

$$\int u\partial t = ut - \int t\partial u.$$

Setzt man nun, wenn p immer eine gerade Function von u bezeichnet, $\int t\partial u = p$, also $t = \frac{\partial p}{\partial u}$; so ist

$$\int u^2\partial t = u^2t - 2\int tu\partial u = \frac{u^2\partial p}{\partial u} - 2\int u\partial p$$
$$= \frac{u^2\partial p}{\partial u} - 2pu + 2\int p\partial u.$$

Man setze $\int p\partial u = q$, wo q eine ungerade Function von u ist; so ist $p = \frac{\partial q}{\partial u}$, eine gerade Function von u. Also $\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial^2 q}{\partial u^2}$, und folglich:

$$t = \frac{\partial^2 q}{\partial u^2},\ \int u^2\partial t = \frac{u^2\partial^2 q}{\partial u^2} - \frac{2u\partial q}{\partial u} + 2q,$$
$$\int u\partial t = \frac{u\partial^2 q}{\partial u^2} - \frac{\partial q}{\partial u},$$
$$x = \frac{(1-u^2)\partial^2 q}{\partial u^2} + \frac{2u\partial q}{\partial u} - 2q,$$
$$y = \frac{(1+u)^2\partial^2 q}{\partial u^2} - \frac{2(1+u)\partial q}{\partial u} + 2q.$$

Hieraus entspringt die

Vierte Regel. Für irgend eine ungerade Function

q von u berechne man x, y aus obigen Gleichungen, und eliminire aus denselben u.

Für $q = u^\lambda$, wo λ ungerade, erhält man:

$$x = \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} - (\lambda-1)(\lambda-2)u^\lambda,$$

$$y = \lambda(\lambda-1)u^{\lambda-2} + 2\lambda(\lambda-2)u^{\lambda-1} + (\lambda-1)(\lambda-2)u^\lambda,$$

woraus

$$\frac{x}{y} = \frac{\lambda(\lambda-1) - (\lambda-1)(\lambda-2)u^2}{\lambda(\lambda-1)(1+u)^2 - 2\lambda(1+u)u + 2u^2}.$$

Multiplicirt man über Kreuz, so ergiebt sich in Bezug auf u eine quadratische Gleichung, aus der man erhält:

$$u = \frac{-\lambda(\lambda-2)x \pm \sqrt{\lambda(\lambda-2)[(\lambda-1)^2y^2 - x^2]}}{(\lambda-1)(\lambda-2)(x+y)},$$

welches, in

$$x + y = 2\lambda\{\lambda-1+(\lambda-2)u\}u^{\lambda-2}$$

gesetzt, eine Gleichung zwischen x und y giebt, aus der u eliminirt ist.

Geschichte.

29. Das Problem von den reciproken Trajectorien ward in Bezug auf einen Durchschnittswinkel, der ein rechter ist, von Nicolas Bernoulli, dem Sohne Johanns, zuerst im Jahre 1721 in den Act. Erud. Suppl. T. VII. p. 352. vorgelegt, wobei Nic. Bernoulli zugleich anzeigte, daß sein Vater schon die Auflösung gefunden habe. Mit derselben beschäftigte sich vorzüglich Joh. Bernoulli und ein ungenannter Engländer, von welchem man jedoch nachher erfuhr, daß es der Dr. Pemberton gewesen. Joh. Bernoulli trug durch die Eleganz, Allgemeinheit und Einfachheit seiner Auflösungen den Sieg davon. Bey dieser Gelegenheit kam auch die Frage von der von Joh. Bernoulli zuerst so genannten Pantagonia zur Sprache, welche von dem anonymo Britanno in den Philos. Transact. 1722. aufgelöset worden war. M. s. auch Act. Erud. Suppl. T. VIII. p. 235. p. 253. Joh. Bernoulli gab seine Auflösung Act. Erud. Suppl. T. IX. 1729. p. 265., ein Aufsatz, welcher in mancher Rücksicht merkwür-

dig und interessant ist. Er zieht darin sehr gegen die Engländer los, indem er z. B. gleich zu Anfange sagt: „apud „Anglos quamplurimi sunt, qui immani odio et in„vidia flagrant in exterorum virtutes et merita.“ Man muß annehmen, daß er durch die vielen Zänkereien der Engländer, besonders mit seinem, nunmehr verstorbenen, Freunde Leibnitz sehr gereitzt war. Die Auflösungen des anonymi Britanni tadelt er sehr. Aber merkwürdig ist auch das Urtheil über den nachher so berühmt gewordenen Leonhard Euler am Ende dieses Aufsatzes (p. 277.): „felicissimi ingenii iuvenis, a cujus sa„gacitate et acumine maxima quaeque nobis polli„cemur, postquam vidimus, quanta ille facilitate „et solertia in adyta sublimioris geometriae nostro „auspicio penetravit.“ Euler, der damals noch Bernoullis Schüler war, hatte nämlich eine Methode gefunden, aus jeder Ordnung, die zweite ausgenommen, eine reciproke algebraische Trajectoria zu finden, welches er schon Act. Erud. 1726. p. 363. ankündigte, und die Methode selbst Act. Erud. 1727. p. 408 — 412. mittheilte, indem die Frage von den algebraischen reciproken Trajectorien schon von Joh. Bernoulli mehrere Male zur Sprache gebracht worden war. Die hierher gehörenden Aktenstücke findet man alle in den Act. Erud. Pembertons Aufsätze: 1721. p. 156. Suppl. T. VIII. 1724. p. 40. p. 234. Bernoulli's Abhandlungen: 1722. p. 396. 1723. p. 75. 1724. p. 297. 1725. p. 318. Suppl. T. IX. 1729. p. 285. Euler hat sich viel mit den reciproken Trajectorien beschäftigt, vorzüglich mit der Auffindung algebraischer reciproker Trajectorien. Außer den beiden schon angeführten Aufsätzen in den Opusc. var. argumenti und den Act. Erud. s. m. vorzüglich: Comm. Petrop. T. II. T. V. und Act. Petrop. 1782. P. II. p. 1. wo die Untersuchung sehr allgemein angestellt worden ist. In unsern Lehrbüchern über die höhere Geometrie findet man wenig über diese merkwürdige Klasse krummer Linien.

Transcendent, (quod vires Algebrae transcendit), eine von Leibnitz eingeführte Benennung sol-

cher Operationen, welche nicht zu den algebraischen gehören. Letztere sind die vier Rechnungsarten, die Potenzerhebung und Wurzelausziehung. Transcendente Operationen sind diejenigen, wo zu einer Zahl der Logarithmus oder umgekehrt, zu einem Bogen in rein arithmetischem Sinne eine trigonometrische Function, oder umgekehrt gesucht wird. Transcendente Functionen und Gleichungen sind solche, welche transcendente Operationen involviren, transcendente Curven solche, welche durch transcendente Gleichungen bestimmt werden. E. G. Fischer (Untersuchung über den eigentlichen Sinn der höheren Analysis. Berlin. 1808. S. 82.) giebt den wesentlichen Unterschied zwischen beiden Arten von Operationen, wie es mir scheint, recht gut, auf folgende Art an. Was durch eine algebraische Rechnung gefunden wird, ergiebt sich entweder durch eine einzige Operation, obgleich diese in gewissen Fällen unendlich seyn kann, wie z. B. bei Wurzelausziehungen, ja selbst bei Divisionen, die nicht aufgehen, oder durch eine bestimmte endliche Anzahl solcher Operationen. Was durch eine transcendente Operation bestimmt ist, kann nur durch unendlich vielmalige Wiederholung bestimmter algebraischer Rechnungsoperationen gefunden werden, die man nicht als bloße Theile einer einzigen Operation, wie bey den Wurzelausziehungen betrachten kann. Soll z. B. der Logarithmus einer Zahl gesucht werden; so geschieht dies offenbar durch lauter algebraische Rechnungsarten, aber offenbar durch eine unendlich vielmalige Anwendung derselben, welches sich in den unendlichen Reihen, durch die transcendente Functionen immer dargestellt werden, in der unendlichen Gliederzahl angedeutet findet. Daher sind auch bey diesen Größen Tafeln, wo man das ein für allemal berechnet findet, was man in jedem einzelnen Falle durch eine desto größere Menge von Operationen suchen müßte, je genauer man das Resultat haben wollte, unentbehrliches Bedürfniß. Differentiationen und Integrationen können auf algebraische sowohl, als auf transcendente Functionen führen, und sind daher nach diesen Ansichten, wie es mir scheint, eigentlich wohl als gemischte Operationen zu betrachten. Hat man algebraische Functionen z. B. zu diffe-

rentiiren, so gelangt man offenbar durch eine endliche Anzahl von Operationen zum Differential. Bey der Differentiation transcendenter Functionen möchte indeß schon die Entwickelung der Differenz in eine Reihe nach positiven ganzen Potenzen des Increments, welche eigentlich immer vorausgehen muß, und in diesem Falle immer unendlich seyn wird, eine unendlich oft wiederholte Anwendung von Operationen seyn. Und sollte auch vielleicht in dieser Beziehung noch einige Unbestimmtheit zurückbleiben; so würde sie doch nur den Gebrauch des Wortes treffen, nicht die Sache selbst, da das mathematisch Transcendentale völliger Aufklärung fähig ist, wogegen die neuern Philosophen vielleicht nur das transcendent nennen, was nicht zu völliger Deutlichkeit gebracht werden kann. Die transcendenten Functionen sind von den Mathematikern eifrig untersucht worden. Die Logarithmen, Exponentialgrößen und die trigonometrischen Functionen vorzüglich von Euler. Der sogenannte Integral-Logarithmus $\int \frac{\partial x}{lx}$ von Mascheroni (Adnotationes ad calculum integralem Euleri) Soldner (Théorie et tables d'une nouvelle fonction transc. Munic. 1809.) und Bessel (Königsberger Archiv. I. St. S. 1.); die sogenannten transcendantes elliptiques von Legendre in einem besondern Mémoire (Paris. 1794.) und den Exercices de calcul integral. I. Paris. 1811. p. 1. und von Abel und J. G. Jacobi in verschiedenen Heften von Crelles Journal der Mathematik, vorzüglich II. 2. III. 2.; $\int e^{-t^2} \partial t$ von Kramp und Laplace, u. s. f., Beispiele, deren Zahl sich leicht vermehren ließe.

Transcendentale Analysis ist dasselbe, was man sonst höhere Analysis, Analysis infinitorum, d. i. Differential- Integral- und Variationsrechnung, nennt.

Transformation, s. Umformung.

Transmutation, s. Umformung.

Transporteur, s. Winkelmessung.

Transposition, ist die Umsetzung der Glieder einer Gleichung auf die andere Seite des Gleichheitszeichens mit entgegengesetzten Vorzeichen. S. Gleichung. (20.)

Transsinuosa, ist bei Vieta (Opp. p. 323.) die Sekante. Jetzt ist der Ausdruck gar nicht mehr gebräuchlich.

Transversa diameter, heißt bei Apollonius (Conica. ed. Barrow. I. Des. 13.) jede gerade Linie, welche alle unter einander parallele Sehnen eines Kegelschnitts halbirt. Axis transversus, latus transversum bedeutet die Hauptaxe der Ellipse und Hyperbel. S. Latus.

Transversale, ist 1. jede der schiefen geraden Linien, welche auf dem verjüngten Maaßstabe und ältern Winkel messenden Instrumenten gebraucht werden, um kleinere aliquote Theile einer geraden Linie oder eines Bogens anzugeben. Tycho de Brahe hat das Verfahren, als er 1553 zu Leipzig studirte, bey dem verjüngten Maaßstabe von Johann Hommel gelernt, und es nachher auf astronomische Instrumente zum Winkelmessen angewandt. Kästners G. d. M. I. S. 643. II. S. 355. 381. III. S. 355. Astron. Abh. II. 5. Abh. 17. §. 161.;

2) jede gerade Linie oder Curve, welche auf irgend eine Art ein System anderer Linien, Ebenen oder krummen Flächen durchschneidet. Auch Ebenen, welche auf irgend eine Art ein solches System durchschneiden, können Transversalen genannt werden. Mit diesen geometrischen Transversalen haben wir es hier allein zu thun. Ihre Theorie ist nach Carnots Vorgange (Théorie des Transversales. Uebers. in Carnots Geom. d. Stellung. A. d. F. v. Schumacher. II. Altona. 1810. S. 322.) von den neuern, vorzüglich französischen, Mathematikern viel bearbeitet worden. In deutschen Lehrbüchern kommt wenig darüber vor. M. s. jedoch Crelle Lehrb. d. Elem. d. Geometrie. Berl. 1826. 27. I. S. 174—185.

Förstemann Lehrb. d. Geometrie. Danzig. 1827. Zweiter Abschnitt.

1. Wenn die drey Seiten eines Dreyecks AA_1A_2 oder ihre Verlängerungen von einer beliebigen Transversale geschnitten werden; so entstehen in der Richtung jeder Seite zwey Segmente von der Beschaffenheit, daß das Product dreyer von ihnen, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, immer dem Producte der drey andern gleich ist.

Durch A (Fig. 21.) ziehe man mit der Gegenseite die Parallele Ak; so erhellet leicht, daß

$$\frac{Aa}{A_1a} = \frac{Ak}{A_1a_1}, \frac{A_2a_2}{Aa_2} = \frac{A_2a_1}{Ak};$$

$$\frac{Aa}{A_1a} \cdot \frac{A_2a_2}{Aa_2} = \frac{Ak}{A_1a_1} \cdot \frac{A_2a_1}{Ak} = \frac{A_2a_1}{A_1a_1};$$

$$Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_2a_2 = Aa_2 \cdot A_1a \cdot A_2a_1.$$

Ist die Transversale einer Seite parallel (Fig. 22.); so ist

$$A_1a_1 \cdot A_2a_2 = Aa_2 \cdot A_2a_1.$$

Aber $Aa = A_1a = \infty$; also ebenfalls

$$Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_2a_2 = Aa_2 \cdot A_1a \cdot A_2a_1.$$

2. Wenn drey Punkte a, a_1, a_2 auf den drei Seiten AA_1, A_1A_2, A_2A eines Dreyecks so liegen, daß die vorhergehende Relation statt findet, und überdies die Anzahl der auf den Verlängerungen der Seiten liegenden Punkte ungerade ist; so liegen die drey Punkte a, a_1, a_2 in einer geraden Linie.

Nach der Voraussetzung liegen immer zwey Punkte entweder Beide auf den Seiten selbst, oder Beide auf den Verlängerungen. Diese beiden Punkte seyen a_1 und a_2. Der dritte Punkt a liegt dann immer in der Verlängerung der Seite AA_1. Zieht man nun a_1a_2; so muß diese gerade Linie die Seite AA_1 nothwendig immer in ihrer Verlängerung in einem gewissen Punkte α treffen, und man hat nach der Voraussetzung und nach (1.):

$$Aa \cdot A_1a_1 \cdot A_2a_2 = Aa_2 \cdot A_1a \cdot A_2a_1,$$

$$A\alpha \cdot A_1a_1 \cdot A_2a_2 = Aa_2 \cdot A_1\alpha \cdot A_2a_1,$$

woraus durch Division leicht:

$$\frac{Aa}{A\alpha} = \frac{A_1a}{A_1\alpha}, \frac{A_1\alpha}{A\alpha} = \frac{A_1a}{Aa};$$

$$A\alpha : A_1\alpha = Aa : A_1a.$$

Also liegen die Punkte α, a Beide $\begin{Bmatrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{Bmatrix}$ von $\begin{Bmatrix}A\\ A_1\end{Bmatrix}$, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, für $Aa \gtrless A_1 a_1$, $A\alpha \lesseqgtr A_1 \alpha$ seyn würde, welches obiger Proportion widerspricht. Aus dieser Proportion folgt nun:

$$A\alpha : Aa = A_1\alpha - A\alpha : A_1 a - Aa,$$

oder

$$A\alpha : Aa = A\alpha - A_1\alpha : Aa - A_1 a,$$

d. i.

$$A\alpha : Aa = AA_1 : AA_1,$$

und folglich $A\alpha = Aa$. Also fällt α mit a zusammen, da α, a Beide $\begin{Bmatrix}\text{links}\\ \text{rechts}\end{Bmatrix}$ von $\begin{Bmatrix}A\\ A_1\end{Bmatrix}$ fallen, und a, a_1, a_2 liegen folglich in einer geraden Linie.

3. Der Satz in (1.) gilt für jedes ebene Vieleck.

Das Vieleck sey $AA_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$. Man ziehe die Diagonalen AA_2, AA_3, $AA_4, \ldots AA_{n-1}$, und bezeichne die Durchschnittspunkte der Transversale mit den Seiten und den Diagonalen nach der Reihe durch a, a_1, $a_2, \ldots a_{n-1}$, a_n, und (a_2), (a_3), $(a_4), \ldots (a_{n-1})$; so ist in den einzelnen Dreyecken, in welche das Vieleck durch die Diagonalen getheilt wird, nach (1.):

$$Aa \,.\, A_1a_1 \,.\, A_2(a_2) = A(a_2) \,.\, A_1a \,.\, A_2a_1,$$
$$A(a_2) \,.\, A_2a_2 \,.\, A_3(a_3) = A(a_3) \,.\, A_2(a_2) \,.\, A_3a_2,$$
$$A(a_3) \,.\, A_3a_3 \,.\, A_4(a_4) = A(a_4) \,.\, A_3(a_3) \,.\, A_4a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A(a_{n-2}) . A_{n-2}a_{n-2} . A_{n-1}(a_{n-1}) = A(a_{n-1}) . A_{n-2}(a_{n-2}) . A_{n-1}a_{n-2};$$
$$A(a_{n-1}) . A_{n-1}a_{n-1} . A_na_n = Aa_n . A_{n-1}(a_{n-1}) . A_na_{n-1}.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten, und hebt auf; so erhält man:

$$Aa \,.\, A_1a_1 \,.\, A_2a_2 \,.\, A_3a_3 \ldots . A_na_n$$
$$= Aa_n \,.\, A_1a \,.\, A_2a_1 \,.\, A_3a_2 \ldots . A_na_{n-1}.$$

4. Wird ein nicht in einer Ebene liegendes Vieleck von einer Transversalebene geschnitten; so gilt der ganze vorhergehende Beweis noch, wenn man die Durchschnittslinien der Transversalebene mit den Ebenen der einzelnen Dreyecke, in welche das Vieleck durch die Diagonalen getheilt worden, als einzelne Transversalen dieser Dreiecke betrachtet.

5. Sey jetzt

$$Ax^n + By^n + C + Z = 0$$

die Gleichung einer algebraischen Curve, wo A, B, C constante Größen sind, Z aber das Aggregat aller Glieder bezeichnet, welche die veränderlichen Größen in einer niedrigern Dimension als der nten enthalten. Für $x = 0$ und $y = 0$ gehe Z respective in Y und X über, so daß also

$$By^n + C + Y = 0, \; Ax^n + C + X = 0.$$

Die erste Gleichung enthält nur y, die letztere nur x. Man verwandelt sie leicht in:

$$y^n + \frac{C}{B} + \frac{Y}{B} = 0, \; x^n + \frac{C}{A} + \frac{X}{A} = 0.$$

Die Wurzeln der ersten sind alle Werthe von y, für welche $x = 0$, die der letztern alle Werthe von x, für welche $y = 0$. Bezeichnet man die absoluten Werthe der Producte aller dieser Werthe von y und x durch (y) und (x); so ist, da die constanten Theile $\frac{C}{B}$, $\frac{C}{A}$ die Producte aller entgegengesetzt genommenen Wurzeln der beiden Gleichungen sind (Gleichung. 151.), wenn wir die absoluten Werthe von A und B durch (A) und (B) bezeichnen:

$$(y) : (x) = \frac{C}{(B)} : \frac{C}{(A)} = (A) : (B).$$

Verändert man nun das Coordinatensystem so, daß man bloß den Anfangspunct verändert, ohne die Lage der Axen zu verändern; so braucht man für x, y nur $x' + a$, $y' + b$ zu setzen, wodurch sich die gegebene Gleichung in

$$Ax'^n + By'^n + C' + Z' = 0$$

verwandelt, indem aus dem binomischen Lehrsatze augenblicklich erhellet, daß hierbey A, B ungeändert bleiben müssen. Dies giebt wie vorher:

$$(y') : (x') = \frac{C'}{(B)} : \frac{C'}{(A)} = (A) : (B)$$

Also $(y) : (x) = (y') : (x')$, oder $(x) : (x') = (y) : (y')$.

Alles Folgende beziehen wir der Kürze wegen nur auf die Kegelschnitte, obgleich es nicht schwer seyn würde, die Untersuchungen auf alle algebraischen Curven zu erweitern.

6. Wenn die drei Seiten des Dreyecks $A A_1 A_2$ (Fig. 23.) von einem Kegelschnitt in den Punkten a, α, a_1, α_1, a_2, α_2 geschnitten werden; so denke man sich

durch A_2 die Parallele mn mit AA_1 gezogen; so ist nach dem Vorhergehenden (5.):

$$Aa_2 . A\alpha_2 : A_2a_2 . A_2\alpha_2 = Aa . A\alpha : A_2n . A_2m,$$
$$A_2a_1 . A_2\alpha_1 : A_1a_1 . A_1\alpha_1 = A_2n . A_2m : A_1a . A_1\alpha.$$

Also durch Zusammensetzung:

$$Aa_2 . A\alpha_2 . A_2a_1 . A_2\alpha_1 : A_1a_1 . A_1\alpha_1 . A_2a_2 . A_2\alpha_2 = Aa . A\alpha : A_1a . A_1\alpha,$$
$$Aa . A\alpha . A_1a_1 . A_1\alpha_1 . A_2a_2 . A_2\alpha_2 = Aa_2 . A\alpha_2 . A_1a . A_1\alpha . A_2a_1 . A_2\alpha_1.$$

Folglich gilt der Satz in (1.) auch für jede Transversale, welche ein Kegelschnitt ist.

Ist der Kegelschnitt ein Kreis; so kann der Satz mittelst Elem. III. 35. 36. leicht elementarisch bewiesen werden.

7. Für ein entweder in einer oder nicht in einer Ebene liegendes Vieleck gilt dieselbe Gleichung, wenn alle Seiten des Vielecks im ersten Falle von einem Kegelschnitte, im andern von einer krummen Fläche des zweiten Grades geschnitten werden.

Das Vieleck sey $AA_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$. Man zerlege es durch die Diagonalen AA_2, AA_3, AA_4, ... AA_{n-1} in Dreyecke, und bezeichne die Durchschnittspunkte des Kegelschnitts oder der krummen Fläche mit den Seiten und Diagonalen durch a, α; a_1, α_1; a_2, α_2; ... a_{n-1}, α_{n-1}; a_n, α_n; und b_2, β_2; b_3, β_3; b_4, β_4; .. b_{n-1}, β_{n-1}; so ist, da der Durchschnitt jeder Ebene mit einer Fläche der zweiten Ordnung ein Kegelschnitt ist (Krumme Fläche. 16.), in den einzelnen von den Diagonalen gebildeten Dreyecken nach (6.):

$$Aa . A\alpha . A_1a_1 . A_1\alpha_1 . A_2b_2 . A_2\beta_2 = Ab_2 . A\beta_2 . A_1a . A_1\alpha . A_2a_1 . A_2\alpha_1$$
$$Ab_2 . A\beta_2 . A_2a_2 . A_2\alpha_2 . A_3b_3 . A_3\beta_3 = Ab_3 . A\beta_3 . A_2b_2 . A_2\beta_2 . A_3a_2 . A_3\alpha_2$$

. . . .

$$Ab_{n-1} . A\beta_{n-1} . A_{n-1}a_{n-1} . A_{n-1}\alpha_{n-1} . A_na_n . A_n\alpha_n = Aa_n . A\alpha_n . A_{n-1}b_{n-1} . A_{n-1}\beta_{n-1} . A_na_{n-1} . A_n\alpha_{n-1}$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten, und hebt auf; so erhält man:

$$Aa \,.\, A\alpha \,.\, A_1a_1 \,.\, A_1\alpha_1 \,.\, A_2a_2 \,.\, A_2\alpha_2 \,.\, \ldots\ldots \,.\, A_na_n \,.\, A_n\alpha_n$$
$$= Aa_n \,.\, A\alpha_n \,.\, A_1a \,.\, A_1\alpha \,.\, A_2a_1 \,.\, A_2\alpha_1 \,.\, \ldots \,.\, A_na_{n-1} \,.\, A_n\alpha_{n-1}$$

so daß unser Satz also auch für alle von Kegelschnitten oder krummen Flächen der zweiten Ordnung durchschnittene Vielecke gilt.

8. Der Satz gilt auch für sphärische Drey- und Vielecke; wenn die Transversale ein Bogen eines größten Kreises ist, und man nur statt aller oben betrachteten Linien die Sinus der entsprechenden Bögen setzt.

Betrachtet man nämlich die Dreyecke in Fig. 21. als sphärisch, und die Transversale als einen Bogen eines größten Kreises; so ist (Trigonometrie. [25.])

$$\sin A_2a_2 : \sin A_2a_1 = \sin A_2a_1a_2 : \sin A_2a_2a_1,$$
$$\sin Aa : \sin Aa_2 = \sin A_2a_2a_1 : \sin Aa a_2,$$
$$\sin A_1a_1 : \sin A_1a = \sin Aa a_2 : \sin A_2a_1a_2,$$

woraus durch Zusammensetzung der Proportionen sogleich erhalten wird:

$$\sin Aa \,.\, \sin A_1a_1 \,.\, \sin A_2a_2 = \sin Aa_2 \,.\, \sin A_1a \,.\, \sin A_2a_1.$$

Der Satz gilt also für das sphärische Dreyeck. Die Erweiterung auf das sphärische Vieleck läßt sich wie oben bey dem ebenen bewerkstelligen.

9. Man verdankt diesen Hauptsatz der Theorie der Transversalen vorzüglich Carnot (a. a. O.), obgleich besondere Fälle auch schon beim Ptolemäus (Almagest. Buch 1. Kap. 12.) für das Dreyeck, und in Pascals Essai sur les coniques (Oeuvres de Pascal T. IV. La haye. 1779.) für ein System von vier geraden Linien in der Ebene eines Kegelschnitts vorkommen. Der Satz ist an Folgen sehr fruchtbar, wovon wir hier zunächst nur Einiges beibringen wollen.

10. In dem Viereck $AA_1A_2A_3$ (Fig. 24.) bezeichne man die Durchschnittspunkte der Seiten AA_1, A_2A_3 und A_1A_2, AA_3 durch A_4 und A_5; so ist (1.):

$$AA_5 \,.\, A_3A_4 \,.\, A_1A_2 = A_1A_5 \,.\, A_2A_4 \,.\, AA_3,$$
$$A_2A_4 \,.\, A_3A_5 \,.\, AA_1 = A_1A_4 \,.\, AA_5 \,.\, A_2A_3,$$
$$AA_4 \,.\, A_1A_2 \,.\, A_3A_5 = AA_3 \,.\, A_2A_5 \,.\, A_1A_4,$$
$$AA_4 \,.\, A_1A_5 \,.\, A_2A_3 = A_3A_4 \,.\, A_2A_5 \,.\, AA_1,$$

indem man eine Seite nach der andern als Transversale betrachtet. Folglich, wenn man die erste dieser vier Gleichungen mit jeder der drei folgenden multiplicirt:

$$A_3A_4 \,.\, A_1A_2 \,.\, A_3A_5 \,.\, AA_1 = A_1A_5 \,.\, AA_3 \,.\, A_1A_4 \,.\, A_2A_3,$$
$$AA_5 \,.\, A_3A_4 \,.\, A_2A_5 \,.\, A_1A_4 = A_1A_5 \,.\, A_2A_4 \,.\, AA_4 \,.\, A_3A_5,$$
$$AA_5 \,.\, A_1A_2 \,.\, AA_4 \,.\, A_2A_3 = A_2A_4 \,.\, AA_5 \,.\, A_3A_5 \,.\, AA_1.$$

11. In ein in *einer* oder nicht in *einer* Ebene liegendes Vieleck $AA_1A_2 \ldots A_n$ sey ein Kegelschnitt oder eine Fläche des zweiten Grades beschrieben. Die Berührungspunkte seyen a, a_1, $a_2, \ldots a_n$, welche in diesem Falle mit den Punkten α, α_1, α_2, $\ldots \alpha_n$ (7.) zusammenfallen. Daher wird die dortige Gleichung:

$$Aa^2 \,.\, A_1a_1{}^2 \,.\, A_2a_2{}^2 \ldots A_na_n{}^2 = Aa_n{}^2 \,.\, A_1a^2 \,.\, A_2a_1{}^2 \ldots A_na_{n-1}{}^2;$$
$$Aa \,.\, A_1a_1 \,.\, A_2a_2 \ldots A_na_n = Aa_n \,.\, A_1a \,.\, A_2a_1 \ldots A_na_{n-1},$$

worin eine sehr merkwürdige, leicht in Worten auszudrückende, Eigenschaft der Linien und Flächen des zweiten Grades enthalten ist.

12. Werden die Seiten eines nicht in *einer* Ebene liegenden Vielecks (polygone gauche) von einer Transversalebene geschnitten, so daß dieselbe jedoch durch keinen Winkelpunkt des Vielecks hindurch geht; so ist die Anzahl der Seiten, welche selbst (nicht ihre Verlängerungen) von der Transversalebene geschnitten werden, immer eine gerade Zahl. Für das Dreieck ist der Satz offenbar, da augenscheinlich immer nur 0 oder 2 Seiten selbst von der Transversalebene geschnitten werden, vorausgesetzt, daß sie durch keine Spitze des Dreiecks geht, weil sonst alle drei Seiten geschnitten werden könnten (Fig. 25.). Der Satz gelte nun für jedes neck. Im (n+1)eck schneide man durch eine Diagonale ein Dreieck ab; so ist die Anzahl der von der Transversalebene selbst geschnittenen Seiten des necks also $= 2\gamma$. Liegt nun die Diagonale auf beiden Seiten der Transversalebene; so werden $2\gamma - 1$ Seiten des $(n+1)$ecks selbst von derselben geschnitten. Im Dreieck muß aber, da die Diagonale auch eine Seite desselben ist, noch eine, und zwar nur noch eine, Seite geschnitten werden, so daß also die Anzahl der von der Transversalebene selbst geschnittenen Seiten des $(n+1)$ecks $= 2\gamma - 1 + 1 = 2\gamma$ ist. Liegt die Diagonale auf *einer* Seite der Transversalebene; so

ist die Anzahl der selbst geschnittenen Seiten des $n$ecks $= 2\gamma$, und folglich, da im Dreieck nur noch 0 oder 2 Seiten selbst geschnitten werden müssen, die Anzahl der selbst geschnittenen Seiten des $(n+1)$ecks entweder $= 2\gamma + 0 = 2\gamma$, oder $= 2\gamma + 2$. Folglich gilt der Satz für das $(n+1)$eck, wenn er für das $n$eck gilt, und ist demnach allgemein, da er für das Dreieck gilt. Die Anzahl der in ihren Verlängerungen geschnittenen Seiten ist folglich gerade oder ungerade, jenachdem die Anzahl der Seiten des Vielecks gerade oder ungerade ist.

13. $AA_1A_2 \ldots\ldots A_n$, sey ein um eine Fläche des zweiten Grades beschriebenes, nicht in einer Ebene liegendes, Vieleck. Die Berührungspunkte seyen a, a_1, a_2, ... a_n, und keiner derselben falle mit einem Winkelpunkte zusammen. Wenn nun n Berührungspunkte a, a_1, a_2, ... a_{n-1} in einer Ebene liegen, und die Anzahl der in den Verlängerungen der Seiten liegenden Berührungspuncte gerade oder ungerade ist, je nachdem $n+1$ gerade oder ungerade ist; so liegt auch a_n in derselben Ebene.

Durch die Punkte a, a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$ lege man eine Transversalebene, welche die Seite AA_n in α_n schneide; so ist nach (4.) und (11.);

$$Aa \,.\, A_1a_1 \,.\, A_2a_2 \ldots A_{n-1}a_{n-1} \,.\, A_n\alpha_n = A\alpha_n \,.\, A_1a \,.\, A_2a_1 \ldots A_na_{n-1},$$

$$Aa \,.\, A_1a_1 \,.\, A_2a_2 \ldots A_{n-1}a_{n-1} \,.\, A_na_n = Aa_n \,.\, A_1a \,.\, A_2a_1 \ldots A_na_{n-1},$$

woraus durch Division:

$$\frac{A_n\alpha_n}{A_na_n} = \frac{A\alpha_n}{Aa_n}, \quad A_n\alpha_n : A\alpha_n = A_na_n : Aa_n.$$

Da nach der Voraussetzung kein Winkelpunkt ein Berührungspunkt ist; so geht die Transversalebene durch keinen Winkelpunkt, wenn nicht etwa α_n mit A oder A_n zusammenfällt, welches aber nicht möglich ist, da sonst entweder $A_n\alpha_n$ oder $A\alpha_n = 0$, folglich auch, wegen obiger Proportion, A_na_n oder $Aa_n = 0$ seyn müßte, da doch kein Berührungspunkt mit einem Winkelpunkte zusammenfallen soll. Also ist der in (12.) bewiesene Satz hier anwendbar. Sey nun

1) $n+1$ gerade; so ist die Anzahl der von der Transversalebene in ihren Verlängerungen geschnittenen Seiten

gerade $= 2\gamma$ (12.). Liegt nun α_n in der Seite AA_n selbst; so liegen 2γ der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ in den Verlängerungen der Seiten, und es muß folglich auch a_n in der Seite AA_n selbst liegen, weil sonst die Anzahl der in den Verlängerungen der Seiten liegenden Berührungspunkte $= 2\gamma + 1$, also, gegen die Voraussetzung, da $n + 1$ gerade, ungerade wäre. Liegt aber α_n in der Verlängerung der Seite AA_n; so liegen $2\gamma - 1$ der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ in den Verlängerungen der Seiten, und es muß folglich auch a_n in der Verlängerung von AA_n liegen, weil sonst die Anzahl der in den Verlängerungen liegenden Berührungspunkte $= 2\gamma - 1$, also, gegen die Voraussetzung, wieder ungerade wäre. Auch erhellet leicht, daß im letztern Falle α_n und a_n in der Verlängerung von AA_n beide auf einer Seite von A oder A_n liegen müssen, weil, wenn z. B. a_n links von A, α_n rechts von A_n läge, offenbar $A_n a_n > Aa_n$, $A_n\alpha_n < A\alpha_n$ seyn würde, welches, wegen der Proportion $A_n\alpha_n : A\alpha_n = A_n a_n : Aa_n$ nicht möglich ist. Aus dieser Proportion folgt:

$$A_n\alpha_n \pm A\alpha_n : A\alpha_n = A_n a_n \pm Aa_n : Aa_n;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$\pm AA_n : A\alpha_n = \pm AA_n : Aa_n,$$

und folglich $A\alpha_n = Aa_n$, so daß also die Punkte α_n und a_n zusammenfallen müssen, und demnach auch a_n in der durch $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ gehenden Transversalebene liegt.

2) Ist $n + 1$ ungerade; so ist die Anzahl der von der Transversalebene in ihren Verlängerungen geschnittenen Seiten ungerade (12.), $= 2\gamma + 1$. Liegt α_n in AA_n selbst; so liegen $2\gamma + 1$ der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ in den Verlängerungen der Seiten, so daß also auch a_n in der Seite AA_n selbst liegen muß, weil sonst die Anzahl der in den Verlängerungen der Seiten liegenden Berührungspunkte $2\gamma + 2$, also, gegen die Voraussetzung, da $n + 1$ ungerade ist, gerade seyn würde. Liegt dagegen α_n in der Verlängerung der Seite AA_n; so liegen 2γ der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ in den Verlängerungen der Seiten, und es muß folglich auch a_n in der Verlängerung

von AA_n liegen, weil sonst die Anzahl der in den Verlängerungen der Seiten liegenden Berührungspunkte $= 2\gamma$, also wieder, gegen die Voraussetzung, gerade seyn würde. Zugleich erhellet, daß im letztern Falle α_n und a_n in der Verlängerung von AA_n beide auf einer Seite von A, oder von A_n liegen müssen, weil, wenn z. B. α_n links von A und a_n rechts von A_n läge, offenbar $A_n\alpha_n > A\alpha_n$, $A_na_n < Aa_n$ seyn würde, welches, wegen der oben bewiesenen Proportion $A_n\alpha_n : A\alpha_n = A_na_n : Aa_n$, nicht möglich ist. Daß die Punkte α_n und a_n zusammenfallen müssen, wird ganz wie oben gezeigt.

Es liegt also a_n immer in der durch $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ gelegten Transversalebene, so daß also, unter obigen Voraussetzungen, alle $n + 1$ Berührungspunkte in einer Ebene liegen, wenn n in einer Ebene liegen, w. z. b. w.

14. In gewisser Rücksicht gilt der Satz auch für den Fall, wenn, wie es bei nicht in einer Ebene liegenden Vielecken wohl der Fall seyn könnte, Winkelpunkte zugleich Berührungspunkte sind, nur muß man jeden solchen Punkt doppelt rechnen, da ja in ihm zwei Seiten zugleich berührt werden. Giebt es nun, dies vorausgesetzt, unter den $n + 1$ Berührungspunkten $m + 1$, welche zugleich Winkelpunkte des Vielecks sind; so giebt es, jeden der letztern Punkte bloß einfach gerechnet, eigentlich überhaupt nur $n + 1 - (m + 1) = n - m$ Berührungspunkte, wo also $n - m \leqq n$. Liegen also (nach obiger Annahme, jeden Berührungspunkt, der zugleich ein Winkelpunkt ist, doppelt gerechnet) n Berührungspunkte in einer Ebene; so müssen natürlich auch alle Berührungspunkte in einer Ebene liegen, da die Anzahl aller (die eigentlich nur $= n - m$) $\overline{\overline{<}}\, n$ ist.

15. Ist das Vieleck ein nicht in einer Ebene liegendes Viereck (quadrilatère gauche); so ergiebt sich, da drei Punkte immer in einer Ebene liegen, und bei einem Viereck offenbar überhaupt nur vier, oder zwei, oder kein Berührungspunkt in den Verlängerungen der Seiten liegen können, folgender Satz:

In jedem um eine Fläche des zweiten Grades beschriebenen, nicht in einer Ebene liegenden Viereck, liegen die vier Berührungspunkte in einer Ebene.

Diesen merkwürdigen Satz hat Brianchon gefunden. M. s. dessen Mémoire sur les lignes du second ordre. Paris. 1817. p. 14. Den allgemeinen Satz (13. 14.) findet man ohne Beweis in Poncelet Traité des propriétés projectives des figures. Paris. 1822. p. 81., einem vortrefflichen, viele neue Ideen enthaltenden Werke, auch in Bezug auf die Transversalen p. 76 — 98. Weitere Nachricht davon gebe ich im Art. Viereck (16. ff.) Auch gehört hierher: Brianchon Application de la théorie des transversales. Paris. 1812.

16. Wenn aus D (Fig. 26.) in der Ebene eines Dreiecks ABC durch die drei Spitzen Transversalen gezogen sind, welche die Seiten in a, b, c schneiden; so ist immer

$$Aa \,.\, Bb \,.\, Cc = Ac \,.\, Ba \,.\, Cb.$$

Denkt man sich nämlich die beiden Dreiecke ACa, BCa durch die Transversalen Bc, Ab geschnitten; so ist nach (1.)

$$Ac \,.\, CD \,.\, Ba = AB \,.\, Cc \,.\, Da,$$
$$Cb \,.\, AB \,.\, Da = CD \,.\, Bb \,.\, Aa.$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten in einander, und hebt AB . CD . Da auf beiden Seiten auf; so erhält man die zu beweisende Gleichung. Dieser Satz ist von Joh. Bernoulli gefunden. Opp. T. IV. p. 33.

17. Haben umgekehrt die Punkte a, b, c auf den drei Seiten des Dreiecks ABC eine solche Lage, daß

$$Aa \,.\, Bb \,.\, Cc = Ac \,.\, Ba \,.\, Cb$$

ist, und ist die Anzahl der auf den Seiten des Dreiecks selbst liegenden Punkte ungerade; so schneiden sich die drei Linien Ab, Bc, Ca in einem Punkte.

Nach der Voraussetzung müssen immer zwei der Punkte a, b, c entweder beide auf den Seiten des Dreiecks selbst, oder beide auf den Verlängerungen liegen. Diese beiden Punkte seyen b, c, und D sey der Durchschnittspunkt der Linien Ab, Bc. Die Linie CD schneide verlängert AB in α; so ist nach der Voraussetzung und nach (16.)

$Aa \, . \, Bb \, . \, Cc = Ac \, . \, Ba \, . \, Cb$, $A\alpha \, . \, Bb \, . \, Cc = Ac \, . \, B\alpha \, . \, Cb$,
woraus durch Division:

$$\frac{Aa}{A\alpha} = \frac{Ba}{B\alpha}, \; Aa : Ba = A\alpha : B\alpha.$$

Aus dieser Proportion leitet man ganz wie in (2.) ab, daß die Punkte a, α zusammenfallen, und Ab, Bc, Ca sich also in einem Punkte schneiden.

18. Eine unmittelbare Folge hieraus sind die beiden merkwürdigen Sätze, daß 1) die drei von den Spitzen eines Dreiecks nach den Mittelpunkten der Gegenseiten, und 2) die drei Höhenlinien sich immer in einem Punkte schneiden.

Da nämlich in Bezug auf No. 1. $Aa = Ba$, $Bb = Cb$, $Ac = Cc$ (Fig. 27.) ist; so ist $Aa \, . \, Bb \, . \, Cc = Ac \, . \, Ba \, . \, Cb$; und da hier offenbar a, b, c alle drei auf den Seiten selbst liegen; so schneiden Ab, Bc, Ca sich in einem Punkte (17.). In Bezug auf No. 2. ist (Fig. 28.) $\triangle ABb \sim \triangle BCa$, $\triangle BCc \sim \triangle CAb$, $\triangle CAa \sim \triangle ABc$. Also

$$AB : Bb = BC : Ba,$$
$$BC : Cc = AC : Cb,$$
$$AC : Aa = AB : Ac,$$

woraus nach Zusammensetzung der Proportionen leicht geschlossen wird:

$$Aa \, . \, Bb \, . \, Cc = Ac \, . \, Ba \, . \, Cb.$$

Da nun in diesem Falle offenbar immer drei der Punkte a, b, c, oder nur einer, in den Seiten selbst liegen; so schneiden sich die drei Höhenlinien in einem Punkte (17.).

19. Nimmt man auf den drei Seiten eines Dreiecks drei Punkte a, b, c so, daß

$$Aa \, . \, Bb \, . \, Cc = Ac \, . \, Ba \, . \, Cb$$

ist; so liegen diese drei Punkte in gerader Linie, oder die Linien Ab, Bc, Ca laufen in einem Punkte zusammen, je nachdem die Anzahl der auf den Seiten des Dreiecks selbst liegenden Punkte gerade oder ungerade ist (2. 17.).

20. In jedem vollständigen Viereck (Viereck.) schneiden jede zwei der drei Diagonalen von der dritten proportionale Stücke ab.

FBCDEAF (Fig. 29.) sey das gegebene vollständige

Viereck. Im Dreieck CDA sind von B nach den Spitzen die Linien BC, BD, BA gezogen. Also (16.)

$$Am \,.\, CE \,.\, DF = AF \,.\, Cm \,.\, DE.$$

Betrachtet man aber EF als Transversale dieses Dreiecks; so ist (1.):

$$AF \,.\, Cn \,.\, DE = An \,.\, CE \,.\, DF.$$

Durch Multiplication und Aufhebung ergiebt sich:

$$Am \,.\, Cn = An \,.\, Cm, \quad Cm : Cn = Am : An.$$

Für die andern Diagonalen wird der Beweis auf ganz ähnliche Art geführt.

Dieser Satz scheint schon den Alten bekannt gewesen zu seyn, wie aus des Pappus Collect. math. l. VII. p. 121. erhellet. Dann findet er sich in Gregorius a St. Vincentio. Opus geometricum. pag. 6. prop. 10. Auch de la Hire (Section. conicae. p. 9. prop. 20.) und Schooten (Exercitationes math. l. II. Ap. prop. 5.) gebrauchen ihn bei der Auflösung von Aufgaben.

21. Wenn auf einer Linie AB (Fig. 30.) die Punkte a, b so genommen sind, daß Aa : Ab = Ba : Bb ist, und man zieht von einem willkührlichen Punkte C die Linien CA, Ca, CB, Cb; so wird von diesen Linien jede Transversale A′B′ nach denselben Verhältnissen geschnitten, so daß A′a′ : A′b′ = B′a′ : B′b′.

Denn es ist

$$Aa = \frac{AC \,.\, \sin ACa}{\sin AaC}, \quad Ab = \frac{AC \,.\, \sin ACb}{\sin AbC},$$

$$Ba = \frac{BC \,.\, \sin BCa}{\sin BaC}, \quad Bb = \frac{BC \,.\, \sin BCb}{\sin BbC}.$$

Hieraus ergiebt sich mittelst der Voraussetzung, und weil sin AaC = sin BaC, sin AbC = sin BbC ist, leicht:

$$\sin ACa : \sin ACb = \sin BCa : \sin BCb,$$

$$\sin A'Ca' : \sin A'Cb' = \sin B'Ca' : \sin B'Cb'.$$

Folglich, wenn die beiden ersten Glieder mit A′C, die beiden letzten mit B′C multiplicirt, die Vorderglieder durch sin A′a′C = sin B′a′C, die Hinterglieder durch sin A′b′C = sin B′b′C dividirt werden, nach ganz ähnlichen Formeln wie oben:

$$A'a' : A'b' = B'a' : B'b'.$$

22. Derselbe Satz gilt auch, wenn die Linien CA, Ca, CB, Cb einander parallel sind (Fig. 31.), wie augenblicklich erhellet, wenn man durch A' und a' Parallelen mit AB zieht.

23. Das einfache Viereck ABCD (Fig. 32.) werde von der Transversale mq geschnitten; so wird der Theil mn derselben, welcher zwischen den Diagonalen liegt, durch die beiden Linien, die man aus dem Durchschnittspunkte der Diagonalen G nach den beiden Punkten E, F zieht, in denen sich die gegenüberstehenden Seiten des Vierecks schneiden, in proportionale Segmente getheilt, so daß

$$mp : mq = np : nq.$$

Denn in dem vollständigen Viereck FBCGDAF ist (20.)

$$DH : DE = CH : CE.$$

Also für die Linie mn zwischen CG, DG, zwischen denen auch CD liegt: $mp : mq = np : nq$ (21.)

24. Eine gerade Linie sey der gemeinschaftliche Durchschnitt von vier Ebenen, und zwischen zweien derselben eine Transversale gezogen. Wird nun diese Transversale von den beiden andern Ebenen in proportionale Segmente getheilt; so gilt dies auch von jeder andern zwischen den ersten Ebenen gezogenen Transversale.

Man projicire das ganze System orthographisch auf eine Ebene, welche auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der vier Ebenen senkrecht ist, und Fig. 33. sey diese Projection, so daß $A''B''$ die Projection der nach der Annahme proportional getheilten Linien AB, $A'''B'''$ aber die Projection der zweiten Transversale $A'B'$ ist. Nach der Annahme ist $Aa : Ab = Ba : Bb$, wo a, b die Durchschnittspunkte der ersten Transversale, a', b' aber die Durchschnittspunkte der zweiten Transversale mit den beiden letztern Ebenen, und a'', b'', so wie a''', b''' respective die Projectionen dieser Punkte bezeichnen. Da nun AB, $A''B''$ zwischen denselben Parallelen liegen; so ist nach der Voraussetzung auch $A''a'' : A''b'' = B''a'' : B''b''$ (22.) Also auch $A'''a''' : A'''b''' = B'''a''' : B'''b'''$ (21.). Aber auch $A'''B'''$ und $A'B'$ liegen zwischen denselben Parallelen. Also ist $A'a' : A'b' = B'a' : B'b'$ (22.), w. z. b. w.

25. Wenn man von einem Punkte A (Fig. 34.) nach einer geraden Linie $\mathfrak{A}$B gerade Linien AB, AC, AD, u. s. f. in willkührlicher Anzahl, und dann eine beliebige Transversale $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zieht; so liegen die Durchschnittspunkte b, c, d, e, u. s. f. der Diagonalen der Vierecke $BC\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $CD\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $DE\mathfrak{D}\mathfrak{E}$, u. s. f. mit dem Punkte $\mathfrak{A}$ in einer geraden Linie.

Man betrachte das vollständige Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}bBC\mathfrak{A}$, und ziehe $\mathfrak{A}$b; so ist

$$BA : B\alpha = \mathfrak{B}A ; \mathfrak{B}\alpha \quad (20.)$$

Also (21.):

$$CA : C\beta = \mathfrak{C}A : \mathfrak{C}\beta,$$
$$DA : D\gamma = \mathfrak{D}A : \mathfrak{D}\gamma,$$
$$EA : E\delta = \mathfrak{E}A : \mathfrak{E}\delta,$$

u. s. f.

Man sieht, daß diese Betrachtung nicht auf den Punkt b eingeschränkt ist, sondern für alle übrigen Punkte c, d, e, u. s. f. eben so gilt, so daß also die Linien $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$, $D\mathfrak{D}$, $E\mathfrak{E}$, u. s. f. von den Linien $\mathfrak{A}$b, $\mathfrak{A}$c, $\mathfrak{A}$d, $\mathfrak{A}$e u. s. f. immer so geschnitten werden, daß

$$BA : B\alpha = \mathfrak{B}A : \mathfrak{B}\alpha,$$
$$CA : C\beta = \mathfrak{C}A : \mathfrak{C}\beta,$$
$$DA : D\gamma = \mathfrak{D}A : \mathfrak{D}\gamma,$$
$$EA : E\delta = \mathfrak{E}A : \mathfrak{E}\delta,$$

u. s. f. u. s. f.

wo α, β, γ, δ, u. s. f. nach der Reihe auf $\mathfrak{A}$b, $\mathfrak{A}$c, $\mathfrak{A}$d, $\mathfrak{A}$e, u. s. f. zu beziehen sind. Folglich müssen letztere Linien alle in eine gerade Linie zusammenfallen. Denn wäre α' der Durchschnittspunkt einer dieser Linien mit $B\mathfrak{B}$; so ist nach dem Bewiesenen $BA : B\alpha' = \mathfrak{B}A : \mathfrak{B}\alpha'$, und in Bezug auf $\mathfrak{A}$b auch $BA : B\alpha = \mathfrak{B}A : \mathfrak{B}\alpha$. Also $B\alpha : \mathfrak{B}\alpha = B\alpha' : \mathfrak{B}\alpha'$, $B\alpha + \mathfrak{B}\alpha : B\alpha' + \mathfrak{B}\alpha' = \mathfrak{B}\alpha : \mathfrak{B}\alpha'$, $B\mathfrak{B} : B\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\alpha : \mathfrak{B}\alpha'$. Also $\mathfrak{B}\alpha = \mathfrak{B}\alpha'$, so daß folglich α, α' zusammenfallen.

26. Wir geben nur noch einige Anwendungen der Theorie der Transversalen auf die Beweise mehrerer merkwürdigen Sätze. Der schon Thl. IV. S. 876. und Trigonometrie. (22.) bewiesene merkwürdige Satz läßt sich hier auf folgende sehr einfache Art beweisen. Bezeichnen wir die Halbmesser der um C, C', C'' (Fig. 35.) beschriebenen Kreise durch r, r', r''; so ist offenbar, wenn A', A'', A''' die Durchschnittspunkte der äußern Berührenden sind:

$$\frac{r}{r'} = \frac{A'C}{A'C'}, \; \frac{r'}{r''} = \frac{A''C'}{A''C''}, \; \frac{r''}{r} = \frac{AC''}{AC};$$

$$\frac{r.r'.r''}{r.r'.r''} = \frac{AC''.A'C.A''C'}{AC.A'C'.A''C''} = 1;$$

$$AC \,.\, A'C' \,.\, A''C'' = AC'' \,.\, A'C \,.\, A''C'.$$

Folglich ist $AA'A''$ eine gerade Linie, da die Punkte A, A′, A″ offenbar alle drei auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks $CC'C''$ liegen (2.).

27. In Bezug auf die innern Berührenden der drei um C, C′, C″ beschriebenen Kreise (Fig. 35.) ist offenbar

$$\frac{r}{r'} = \frac{B'C}{B'C'}, \; \frac{r'}{r''} = \frac{B''C'}{B''C''}, \; \frac{r''}{r} = \frac{BC''}{BC};$$

$$\frac{r.r'.r''}{r.r'.r''} = \frac{BC''.B'C.B''C'}{BC.B'C'.B''C''} = 1;$$

$$BC \,.\, B'C' \,.\, B''C'' = BC'' \,.\, B'C \,.\, B''C'.$$

Da nun B, B′, B″ offenbar immer alle drei in den Seiten des Dreiecks $CC'C''$ selbst liegen; so schneiden sich die Linien CB'', $C'B$, $C''B'$ immer in einem Punkte. (17.)

28. Da $\frac{r}{r'} = \frac{A'C}{A'C'} = \frac{B'C}{B'C'}$ (26. 27.) ist; so liegen A′, B, B″ in einer geraden Linie. Denn in dem vollständigen Viereck $CBC''B''C'AC$ ist, wenn wir den Durchschnittspunkt von BB'' mit CC' durch a bezeichnen, $\frac{aC}{aC'} = \frac{B'C}{B'C'}$ (20.). Also $A'C' : A'C = aC' : aC$, $A'C' - A'C : aC' - aC = A'C : aC = CC' : CC'$. Folglich $A'C = aC$, so daß also die Punkte a und A′ zusammenfallen. Eben so liegen auch A, B′, B″ und A″, B, B′ in einer geraden Linie.

29. A, B, C, D seyen die Mittelpunkte von vier Kugeln, deren Halbmesser wir wie ihre Mittelpunkte bezeichnen wollen. Sie werden zu zweien von sechs Kegelflächen eingehüllt, deren Spitzen wir durch a, b, c, d, e, f bezeichnen wollen; so erhellet leicht, daß $\frac{A}{B} = \frac{Aa}{Ba}$, $\frac{B}{C} = \frac{Bb}{Cb}$, $\frac{C}{D} = \frac{Cc}{Dc}$, $\frac{D}{A} = \frac{Dd}{Ad}$, wenn a, b, c, d die die Spitzen der Kegelflächen sind, welche die Kugeln A, B; B, C; C, D; D, A einhüllen. Durch Multiplication erhält man leicht: $Aa \,.\, Bb \,.\, Cc \,.\, Dd = Ad \,.\, Ba \,.\, Cb \,.\, Dc$, woraus folgt, daß die Punkte a,

b, c, d in einer Ebene liegen. Denn werde die verlängerte Linie AD von der erweiterten Ebene abc in d' geschnitten; so ist, für das Viereck ABCD nach (4.), Aa. Bb.Cc.Dd' = Ad'.Ba.Cb.Dc, woraus, in Verbindung mit obiger Gleichung, sogleich Dd:Dd' = Ad:Ad', also auch Dd — Ad:Dd' — Ad' = Ad:Ad', AD:AD = Ad:Ad', Ad = Ad' folgt. Da nun alle Spitzen der Kegelflächen in den Verlängerungen der Centrallinien der Kugeln liegen; so fällt d' mit d offenbar zusammen, und a, b, c, d' liegen in einer Ebene. Eben so zeigt man, daß jede vier der Punkte a, b, c, d, e, f in einer Ebene liegen. Also liegen diese Punkte alle sechs in einer Ebene.

30. Folglich liegen auch immer drei dieser Punkte, welche zu denselben drei Kugeln gehören, in einer geraden Linie, indem z. B. wenn a, d, f den drei Kugeln A, B, D entsprechen, diese drei Punkte offenbar in dem gemeinschaftlichen Durchschnitt der Ebenen abcdef und A, BD liegen.

31. Nimmt man auf den von A (Fig 36.) ausgehenden Kanten einer dreiseitigen Pyramide willkührlich die Punkte b, c, d, zieht hierauf die sechs Diagonalen der Vierecke BCbc, CDcd, DBdb welche sich in D', B, C', schneiden, und zieht die Transversalen AD', AB', AC' welche die Kanten BC, CD, DB in d', b', c' schneiden; so schneiden sich Bb', Cc', Dd' in einem Punkte der Grundfläche; AA', BB', CC', DD' in einem Punkte des Raumes.

Nach (16.) ist:

$$Ab \,.\, Bd' \,.\, Cc = Ac \,.\, Bb \,.\, Cd',$$
$$Ac \,.\, Cb' \,.\, Dd = Ad \,.\, Cc \,.\, Db',$$
$$Ad \,.\, Bb \,.\, Dc' = Ab \,.\, Bc' \,.\, Dd,$$

woraus leicht durch Multiplication:

$$Bd' \,.\, Cb' \,.\, Dc' = Bc' \,.\, Cd' \,.\, Db'.$$

Da nun in dem in der Figur dargestellten Falle b', c', d' alle drei auf den Seiten des Dreiecks BCD selbst liegen, übrigens aber leicht erhellen wird, daß auch, wenn b, c, d auf den Verlängerungen der von A ausgehenden Kanten

genommen werden, doch immer eine ungerade Anzahl der Punkte b', c', d' auf den genannten Seiten selbst liegen; so schneiden sich Bb', Cc', Dd' in einem Punkte A' der Grundfläche (17.). Die Linie AA' liegt folglich in den drei Ebenen ABb', ACc', ADd' zugleich. In der Ebene ADd' z. B. liegt aber auch DD'. Folglich müssen AA' und DD' sich offenbar in einem gewissen Punkte schneiden, und eben so jede zwei der Linien AA', BB', CC', DD'. Da aber nicht drei dieser Linien in einer Ebene liegen; so müssen sie sich offenbar alle vier in einem Punkte des Raumes schneiden.

32. Seyen jetzt wieder A, B, C, D die Mittelpunkte von vier Kugeln, und um je zwei derselben innere, sie berührende, Kegelflächen beschrieben, deren Spitzen wir durch a', b', c', d', e', f' bezeichnen wollen. Man denke sich jetzt ABCD als eine dreiseitige Pyramide. Die in den Seiten des Dreiecks BCD liegenden Kegelspitzen seyen d', e', f'; so ist offenbar $\frac{B}{C}=\frac{Bd'}{Cd'}$, $\frac{C}{D}=\frac{Cf'}{Df'}$, $\frac{D}{B}=\frac{De'}{Be'}$, woraus leicht:

$$Bd' \,.\, Cf' \,.\, De' = Be' \,.\, Cd' \,.\, Df'.$$

Also schneiden sich Bf', Ce', Dd' in einem Punkte (17.). Eben so in Bezug auf die übrigen Seitenflächen. Bezeichnen wir nun die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der drei Transversalen auf den Seitenflächen BCD, ACD, ABD, ABC durch α, β, γ, δ; so schneiden sich die vier Linien $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ in einem Punkte des Raumes (31.), welches ein dem in (27.) bewiesenen analoger Satz ist.

33. Sey ABC (Fig. 37.) ein eingeschriebenes Dreieck. Zieht man durch jeden Scheitel eine Berührende; so liegen die drei Durchschnittspunkte a, b, c einer jeden derselben mit der gegenüberstehenden Seite in einer geraden Linie.

Da die Dreiecke CAa, BCa offenbar ähnlich sind; so ist Aa : Ca = Ca : Ba, Ca^2 = Aa . Ba, Aa : AC = Ca : BC, $Aa^2 : AC^2$ = Aa . Ba : BC^2. Also

$$\frac{Aa}{Ba}=\frac{AC^2}{BC^2}, \quad \frac{Bb}{Cb}=\frac{AB^2}{AC^2}, \quad \frac{Cc}{Ac}=\frac{BC^2}{AB^2},$$

woraus sogleich:

$$Aa \,.\, Bb \,.\, Cc = Ac \,.\, Ba \,.\, Cb.$$

Also liegen a, b, c in **einer** geraden Linie, da diese Punkte offenbar alle drei auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks ABC liegen (2.).

34. Wenn (Fig. 38.) in und um einen Kreis ein Viereck beschrieben ist, so daß die Seiten des umschriebenen durch die Spitzen des eingeschriebenen gehen; so liegen immer die vier Durchschnittspunkte a, b, m, n der Gegenseiten dieser beiden Vierecke in **einer** geraden Linie.

Da in jedem eingeschriebenen Viereck die Summe der Gegenwinkel $= 180^0$ ist, also die Sinus der Gegenwinkel gleich sind; so wird mit Hülfe von Kreis (30.) leicht die Richtigkeit folgender Proportionen erhellen:

$$AB : Bb = \sin\beta : \sin A,$$
$$Cb : CD = \sin D : \sin\beta,$$
$$Ba : BC = \sin A : \sin\alpha,$$
$$CF : Fa = \sin\alpha : \sin\gamma,$$
$$AC : Cn = \sin\nu : \sin D,$$
$$Fn : AF = \sin\delta : \sin\nu,$$
$$AC : AB = \sin D : \sin\delta,$$
$$CD : AC = \sin\gamma : \sin D.$$

Setzt man nun diese Proportionen zusammen; so ergiebt sich leicht

$$\frac{Cb \,.\, Ba \,.\, CF \,.\, AC \,.\, Fn}{Bb \,.\, BC \,.\, Fa \,.\, Cn \,.\, AF} = 1.$$

Aber auch $AC : BC = \sin B : \sin\lambda,$

$$CF : AF = \sin\lambda : \sin B, \quad \frac{CF \,.\, AC}{BC \,.\, AF} = 1.$$

Folglich $Cb \,.\, Ba \,.\, Fn = Cn \,.\, Bb \,.\, Fa$. Da nun a, b, n offenbar auch alle drei in den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks BCF liegen; so liegen a, b, n in **einer** geraden Linie (2.). Eben so zeigt man, daß a, b, m in **einer** geraden Linie liegen. Also liegen a, b, m, n in **einer** geraden Linie. (Viereck 27.)

35. Die Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines eingeschriebenen Sechsecks ABCDEF (Fig. 39.) liegen immer in **einer** geraden Linie.

Denn es ist (Kreis. 35.)

$a'C \,.\, a'D = a'E \,.\, a'F,\; b'E \,.\, b'F = b'A \,.\, b'B,$
$c'A \,.\, c'B = c'C \,.\, c'D,$

und nach (1.), wenn BC, DE, FA als Transversalen des Dreiecks a'b'c' betrachtet werden:

$a'c.b'B.c'C = a'C.b'c.c'B,\; a'E.b'a.c'D = a'D.b'E.c'a,$
$a'F.b'A.c'b = a'b.b'F.c'A.$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieser sechs Gleichungen, und hebt gleiche Größen auf; so erhält man

$a'c \,.\, b'a \,.\, c'b = a'b \,.\, b'c \,.\, c'a.$

Also liegen a, b, c in einer geraden Linie, da sie alle drei auf den Verlängerungen der Seiten von a'b'c' liegen (2.).

Einen andern viel weitläufigern Beweis dieses merkwürdigen Satzes s. m. Thl. III. S. 130—132. Zur Vervollständigung der dort mitgetheilten historischen Notizen diene Folgendes. Der Satz kommt zuerst in Pascals Essai sur les coniques. 148. Note. vor. Nach einer Bemerkung Leibnitzens in einem Briefe an Perrier, der sich in Oeuvres de Pascal. T. V. befindet, ist diese Eigenschaft des eingeschriebenen Sechsecks das sogenannte Hexagrammum mysticum, worauf Pascal späterhin eine Abhandlung der Kegelschnitte gegründet hat, die nicht mehr vorhanden ist. Nachher ist der Satz in die Schriften Maclaurins, R. Simsons u. A. übergegangen. Einen trigonometrischen Beweis giebt Carnot (Geom. der Stellung. II. S. 353. M. s. auch II. S. 215.). Obiger Beweis ist von Gergonne (Annales de Math. XVII. p. 143.). Auch s. m. Poncelet a. a. O. p. 110., und eine Abhandlung über die Kegelschnitte im Journal de l'école polyt. Cahier XIII. Noch einen Beweis gebe ich im Art. Viereck. (27.)

36. Der Satz gilt für alle Kegelschnitte. Sey ABCDEF (Fig. 39.) ein in einen Kegelschnitt beschriebenes Sechseck, und S bezeichne die Spitze des Kegels, aus welchem der Kegelschnitt geschnitten. Man ziehe in der Kegelfläche SA, SB, SC, SD, SE, SF, und erweitere die Ebenen SAB, SDE; SBC, SEF; SCD, SFA, bis sie sich zu zweien in Sa, Sc, Sb schneiden. Dann denke man sich die Ebenen

Sba, Sac, welche sich in Sa schneiden. Hierauf schneide man den Kegel durch eine Ebene so, daß der Schnitt ein Kreis wird, und bezeichne die Durchschnittspunkte derselben mit SA, SB, SC, SD, SE, SF, Sa, Sb, Sc, durch A′, B′, C′, D′, E′, F′, a′, b′, c′; so ist A′B′C′D′E′F′ ein in einen Kreis beschriebenes Sechseck, und folglich b′a′c′ eine gerade Linie (35.); b′a′c′ ist aber der Durchschnitt der Ebene des Kreises mit den beiden Ebenen Sab, Sac, und folglich müssen Sab, Sac nur eine Ebene bilden, also auch bac, der Durchschnitt der Ebene des Kegelschnitts mit Sbac, eine gerade Linie seyn.

Wegen (8) wird sich der Satz auch leicht auf Figuren in der Oberfläche der Kugel erweitern lassen.

37. Mittelst der vorhergehenden Theorie läßt sich auch der merkwürdige Satz beweisen, daß die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines jeden vollständigen Vierecks immer in einer geraden Linie liegen. Sey nämlich abca′c′b′a (Fig. 40.) ein vollständiges Viereck; so ist $aA : aB = a'A : a'B$, $bB : bC = b'B : b'C$, $cC : cA = c'C : c'A$ (20.). Es ist immer $aA > a'A$. Also auch immer $aB > a'B$. Auch ist offenbar immer zugleich $bC \lesseqgtr b'C$, $cC \lesseqgtr c'C$. Also auch immer zugleich $bB \lesseqgtr b'B$, $cA \lesseqgtr c'A$. Demnach fällt der Mittelpunkt a″ von aa′ immer in Ba, d. i. in die Verlängerung von AB, und die Mittelpunkte b″, c″ von bb′, cc′ immer in die Verlängerungen von BC, AC, so daß also die Punkte a″, b″, c″ immer alle drei in den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks ABC liegen. Da nun nach dem Obigen $aA . a'B = aB . a'A$ ist; so ist $(a'A + aa') . a'B = (aa' - a'B) . a'A$, $a'A . a'B + aa' . a'B = aa' . a'A - a'A . a'B$, $2a'A . a'B = aa' . (a'A - a'B)$, $a'A . a'B = \frac{1}{2}aa' . (a'A - a'B)$, $a'A . a'B . (a'A + a'B) = \frac{1}{2}aa' . (a'A^2 - a'B^2)$, $a'A^2 . a'B + a'B^2 . a'A = \frac{1}{2}aa' . a'A^2 - \frac{1}{2}aa' . a'B^2$, $a'B^2 . (a'A + \frac{1}{2}aa') = a'A^2 . (\frac{1}{2}aa' - a'B)$, $a'B^2 . (a'A + a'a'') = a'A^2 . (a'a'' - a'B)$, $a'B^2 . Aa'' = a'A^2 . Ba''$. Hieraus, und ganz auf ähnliche Art für die andern beiden Seiten des Dreiecks ABC erhält man:

$$\frac{a'A^2}{a'B^2}=\frac{Aa''}{Ba''},\ \frac{b'B^2}{b'C^2}=\frac{Bb''}{Cb''},\ \frac{c'C^2}{c'A^2}=\frac{Cc''}{Ac''};$$

$$\frac{a'A^2 . b'B^2 . c'C^2}{a'B^2 . b'C^2 . c'A^2}=\frac{Aa''. Bb'' . Cc''}{Ac'' . Ba'' . Cb''}.$$

Aber nach (1.)

$$aA . b'B . c'C = aB . b'C . c'A,$$

und nach dem Obigen:

$$a'A . aB = aA . a'B,$$

woraus durch Multiplication:

$$a'A . b'B . c'C = a'B . b'C . c'A.$$

Also auch

$$Aa'' . Bb'' . Cc'' = Ac'' . Ba'' . Cb''.$$

Demnach, und weil a″, b″, c″ immer alle drei auf den Verlängerungen der Seiten des Dreiecks ABC liegen, ist a″b″c″ eine gerade Linie (2.).

Außer den angeführten Schriften s. m. über die Transversalen auch einen Aufsatz von Ferriot in den Annales de Math. XVII. p. 141.

Transversus, s. Transversa.

Trapezium, auch Mensula, ungleiche oder ungeschickte Vierung bei ältern deutschen Schriftstellern, ist nach Euclid (I. Def. 33.) jedes Viereck, welches kein Parallelogramm ist. Archimedes (De aequiponderant. I. 15.) scheint dasselbe darunter zu verstehen. Wolf (Elementa Geom. 99. in der ältern Ausgabe), und wohl die meisten ältern Schriftsteller, z. B. Hausen, Ozanam, Schwenter, Beutel, u. A. geben dieselbe Erklärung. Jedoch bemerkt Wolf schon in der ältesten Ausgabe des mathematischen Lexicons, und auch in der neuern Ausgabe der Elemente (Geom. 103.), daß Einige darunter ein Viereck verstehen, in welchem nur zwei Seiten einander parallel sind. Es wird am schicklichsten seyn, wie auch in den meisten neuern Lehrbüchern geschieht, diesen letztern Begriff beizubehalten, und jede andere vierseitige Figur, welche kein Parallelogramm ist, ein Viereck schlechthin zu nennen, wodurch denn auch die von Einigen, z. B. Grüson, gebrauchte Benennung Paralleltrapez völlig über-

flüssig wird. Die kleinere der beiden parallelen Seiten eines Trapezii heißt in Gerberts Geometrie Cap. 47. coraustus. In der ersten gedruckten Ausgabe von Euclids Elementen (Erhardus Ratdolt Venetiis impressit. 1482.) heißen Trapezien Helmuariphe. (Kästners G. d. M. I. S. 294.) Trapezium irregulare, Trapezoides, Trapezois (ein Viereck, in welchem keine Seite der andern parallel ist), Trapezium isosceles (ein Viereck, worin zwei Seiten parallel, die beiden andern gleich sind), Trapezium scalenum (ein Viereck, worin zwei Seiten parallel, alle aber ungleich sind), Trapezium solidum (die abgekürzte vierseitige Pyramide), sind veraltete und überflüssige Kunstausdrücke.

1. Im Trapezio ABCD (Fig. 41.) sey $AB = a$, $CD = c$, das Perpendikel $AE = h$; so ist $\triangle ABC = \frac{1}{2}ah$, $\triangle BCD = \frac{1}{2}ch$. Also der Inhalt des Trapeziums $= \frac{1}{2}(a+c)h$.

2. Zieht man AF mit BD parallel, und setzt $AB = a$, $BD = b$, $CD = c$, $AC = d$, $CF = c - a = e$, $AE = x$, $EF = y$; so ist

$$x^2 = b^2 - y^2 = d^2 - (e-y)^2,\ y = \frac{b^2 + e^2 - d^2}{2e},$$

$$x^2 = \frac{4b^2e^2 - (b^2 + e^2 - d^2)^2}{4e^2} = \frac{[(b+e)^2 - d^2][d^2 - (b-e)^2]}{4e^2}$$

$$= \frac{(b+e+d)(b+e-d)(d+b-e)(d-b+e)}{4e^2},$$

woraus man nach (1.) den Inhalt des Trapeziums aus seinen vier Seiten erhält:

$$= \frac{c+a}{4(c-a)} \sqrt{\begin{matrix}(-a+b+c+d)(-a+b+c-d) \times \\ (a+b-c+d)(a-b-c+d)\end{matrix}}$$

3. Ist der Flächeninhalt einer krummlinigen Figur annähernd zu bestimmen; so nehme man eine Linie an, und fälle in gleichen Abständen p auf dieselbe Perpendikel $P, P_1, P_2, \ldots P_n$; so entstehen, wenn p klein ist, zwei Dreiecke und mehrere Trapezien, deren Flächenräume

$$\frac{Pp}{2},\ \frac{(P+P_1)p}{2},\ \frac{(P_1+P_2)p}{2},\ \text{rc.}$$

$$\frac{(P_{n-2}+P_{n-1})p}{2},\ \frac{(P_{n-1}+P_n)p}{2},\ \frac{P_np}{2}$$

sind, woraus man für den Flächeninhalt der gegebenen Figur erhält:

$$(P + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n)p.$$

Auch bei der Arealberechnung mehrseitiger geradliniger Figuren ist eine ähnliche Methode anwendbar.

4. Eine schon in C (Fig. 42.) getheilte Linie AB in D so zu theilen, daß $AB^2 - AD^2 = AD^2 - AC^2$ ist, setze man $AB = a$, $AC = b$, $AD = x$; so erhält man aus der Gleichung $a^2 - x^2 = x^2 - b^2$ leicht:

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Um x durch Construction zu finden, mache man das Perpendikel $BE = b$, ziehe AE, halbire es in F, errichte das Perpendikel $FG = AF$, ziehe AG, und beschreibe damit als Halbmesser den Bogen GD. Denn $AD^2 = AG^2 = AF^2 + FG^2 = \frac{1}{2}AE^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = x^2$.

5. Ein gleichschenkliges Trapezium ABCD (Fig. 43.) durch zwei auf einander senkrechte gerade Linien in vier gleiche Theile einzutheilen, verlängere man die gleichen Seiten, bis sie sich in E schneiden, fälle das Perpendikel EG, und suche einen Punkt H, daß die durch H auf EG Senkrechte KL das Trapezium AFCG halbirt. Zu dem Ende setze man $FH = x$, $AB = 2a$, $CD = 2c$, $EG = b$, $EF = d$; so ist $AFKH = \frac{1}{2}(a + KH) \cdot x = \frac{1}{4}(c + a) \cdot (b - d)$. Aber

$$c : a = b : d, \quad c + a : b + d = a : d,$$

$$(c + a)(b - d) : b^2 - d^2 = a : d,$$

$$\frac{1}{4}(c + a)(b - d) = \frac{a(b^2 - d^2)}{4d}.$$

$$KH : a = d + x : d, \quad KH + a : a = 2d + x : d,$$

$$\frac{1}{2}(a + KH)x = \frac{ax(2d + x)}{2d}.$$

$$\frac{a(b^2 - d^2)}{4d} = \frac{ax(2d + x)}{2d}, \quad x = \sqrt{\frac{b^2 + d^2}{2}} - d.$$

Man muß also, um H zu finden, das schon in F getheilte EG in H so theilen, daß $EG^2 - EH^2 = EH^2 - EF^2$ ist (4.).

6. Von dem Trapezio ABCD (Fig. 44.) durch eine Parallele GH ein Stück ABGH von gegebener Größ

$= p^2$ abzuschneiden, setze man $AF = x$, $GH = y$, $AB = a$, $CD = a + d$, $AE = h$; so ist

$$p^2 = \tfrac{1}{2}(a+y)x,$$

und, wenn AK mit BD parallel: $CK : GL = AC : AG = AE : AF$,

$$d : y - a = h : x, \quad h(y-a) = dx.$$

Dies, mit dem Ausdruck für p^2 multiplicirt, giebt:

$$\tfrac{1}{2}h(y^2 - a^2) = dp^2,$$

woraus $\quad y = a\sqrt{\left(1 + \frac{2dp^2}{a^2h}\right)},$

$$x = \frac{h(y-a)}{d} = \frac{ah}{d}\left\{-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{2dp^2}{a^2h}\right)}\right\}.$$

Convergiren AC, BD nach unten; so ist d negativ zu setzen, und folglich

$$x = \frac{ah}{d}\left\{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{2dp^2}{a^2h}\right)}\right\}.$$

Im ersten Falle setze man

$$1 + \frac{2dp^2}{a^2h} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = 1 + \frac{2\sin\varphi}{1-\sin\varphi},$$

$$\sin\varphi = \frac{dp^2}{a^2h + dp^2} = \frac{1}{1 + \frac{a^2h}{dp^2}},$$

so erhält man

$$x = \frac{ah}{d}\left\{-1 + \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}\right\}$$

$$= \frac{ah}{d}\left\{-1 + \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi + \sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi}\right\} = \frac{2ah\sin\frac{1}{2}\varphi}{d(\cos\frac{1}{2}\varphi - \sin\frac{1}{2}\varphi)}$$ (Goniometrie. 36.)

$$\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) = \sin 45^\circ . \cos\tfrac{1}{2}\varphi - \cos 45^\circ . \sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$= (\cos\tfrac{1}{2}\varphi - \sin\tfrac{1}{2}\varphi)\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$x = \frac{ah\sin\frac{1}{2}\varphi\sqrt{2}}{d\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)}.$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man für

$$1 - \frac{2dp^2}{a^2h} = \frac{1-\sin\psi}{1+\sin\psi} = 1 - \frac{2\sin\psi}{1+\sin\psi},$$

im zweiten Falle:

$$x = \frac{ah\sin\frac{1}{2}\psi\sqrt{2}}{d\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\psi)},$$

zwei zur logarithmischen Rechnung bequeme Formeln. Es kommt blos auf den absoluten Werth von x an, da x immer positiv zu nehmen ist.

7. Die Arealberechnung eines von zwei Parallelkreisen und zwei Meridianen eingeschlossenen sphärischen Trapezii s. m. in dem Artikel Zone (4.)

Trapezoides, s. Trapezium.

Trapezois, s. Trapezium.

Triangel, s. Dreieck.

Triangularzahl, s. Polygonalzahlen. (1.)

Triangulum quadrilaterum, heißt in Bettini Apiaria philosophiae mathematicae. T. I. Bonon. 1645. fol. Ap. III. Progym. 6. Prop. 1. ein Viereck, das einen einwärts gehenden Winkel hat. Kästner erklärt sich gegen den Gebrauch des Worts mit Recht. Geom. Abh. I. S. 27.

Tridens, s. Krumme Linie der zweiten Klasse. (64.)

Trigonalzahl, gleichbedeutend mit Triangularzahl.

Trigonometria catholica, s. Trigonometrie. (79.)

Trigonometrie, im engern Sinne, wörtlich Dreieckmessung, ist die Wissenschaft, welche, wenn von den Seiten und Winkeln eines Dreiecks drei Stücke in Zahlen gegeben sind, die übrigen drei Stücke durch Rechnung zu finden lehrt. Nie ist Construction Zweck der Trigonometrie, weshalb sie auch vorzüglich praktischer Anwendungen fähig ist. Astronomie und Geodäsie verdanken ihr hauptsächlich die Genauigkeit ihrer Resultate.

1. Sie zerfällt in die ebene, sphärische und sphäroidische Trigonometrie, jenachdem sie sich mit der Berechnung ebener, sphärischer oder sphäroidischer Dreiecke beschäftigt. Die sphärischen Dreiecke werden auf der Oberfläche einer Kugel von drei Bögen größter Kreise gebildet, die sphäroidischen dagegen liegen

auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids, sollen aber weiter unten noch bestimmter erklärt werden.

2. Nach einem allgemeinern, in den meisten Lehrbüchern festgehaltenen, Begriffe ist die Trigonometrie die ganze Lehre von den Kreisfunctionen, nebst deren Anwendung auf die Berechnung der Dreiecke, und begreift also den Inhalt der Artikel Goniometrie, Cyclometrie, Cyclotechnie und Trigonometrie dieses Wörterbuchs. Indeß sind die in den drei ersten enthaltenen Sätze eigentlich nur Hülfskenntnisse der Trigonometrie im engern Sinne. Diese bedarf jener, aber nicht umgekehrt.

3. Außer Winkeln und Seiten können in einem Dreieck noch verschiedene andere Stücke, z. B. Umfang, Inhalt, Höhe, u. s. f. zu finden seyn. Alle hierher gehörenden Aufgaben, aus denen Philipp Naudé in den Miscell. Berolin. T. V. VII. eine eigene Wissenschaft — Trigonoscopie — bilden wollte, sind indeß nur als Anwendungen der eigentlichen Trigonometrie zu betrachten.

4. In Bezug auf Methode ist die Trigonometrie entweder synthetisch oder analytisch. Jene leitet Alles aus geometrischen Constructionen ab, und kann hier als aus den Elementen hinlänglich bekannt angesehen werden. Letztere dagegen beweiset nur ein System einfacher Formeln durch eine ganz leichte geometrische Betrachtung, und gelangt zu allen übrigen Resultaten auf dem Wege des Calculs, mittelst goniometrischer und cyclometrischer Formeln. Als weniger bekannt, und, wie es uns scheint, dem Wesen der Trigonometrie am meisten entsprechend, soll diese Methode in diesem Artikel durchgängig angewandt werden.

I. Ebene Trigonometrie.

Entwickelung der Grundformeln.

5. Die drei Winkel eines jeden ebenen oder sphärischen Dreyecks werden immer durch α, β, γ, die gegenüberstehenden Seiten respective durch a, b, c bezeichnet. Euler hat diese, viele Vortheile darbietende, Bezeichnungsart

zuerst gebraucht, wenn auch nach ihm die Winkel eigentlich durch A, B, C bezeichnet werden. Der Halbmesser der Tafeln wird immer = 1 gesetzt.

6. Sey nun $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 45.) ein bei α spitz-, stumpf- oder rechtwinkliges Dreyeck. Man nehme α als Anfang, $\alpha\beta$ als Axe der Abscissen an, und bezeichne die Coordinaten von γ durch x, y; so ist in den drei möglichen in der Figur dargestellten Fällen:

$$x = + \alpha\delta, \quad y = + \gamma\delta;$$
$$x = - \alpha\delta, \quad y = + \gamma\delta;$$
$$x = o, \quad y = + \alpha\gamma.$$

Nimmt man nun $\alpha\delta' = 1$ und errichtet das Perpendikel $\gamma'\delta'$; so ist im ersten Falle:

$$\alpha\delta' : \gamma'\delta' = \alpha\delta : \gamma\delta = + \alpha\delta : + \gamma\delta,$$
$$1 : \tang \alpha = x : y.$$

Im zweiten Falle ist:

$$\alpha\delta' : \gamma'\delta' = \alpha\delta : \gamma\delta = 1 : \tang \gamma\alpha\delta,$$
$$- \alpha\delta : + \gamma\delta = 1 : - \tang \gamma\alpha\delta = 1 : \tang \alpha,$$
$$1 : \tang \alpha = x : y.$$

Also in beiden Fällen:

$$y = x \tang \alpha.$$

Im dritten Falle ist $\tang \alpha = \infty = \frac{y}{o}$. Also $x \tang \alpha = o \cdot \frac{y}{o} = y$, so daß also die obige Formel auch für diesen Fall gilt.

Da $(c - x)^2$ immer positiv ist, so erhellet, wenn man nur auf das Vorzeichen von x gehörig Rücksicht nimmt, leicht, daß immer $(c - x)^2 + y^2 = a^2$ und $x^2 + y^2 = b^2$ ist. Die drei allgemeinen Formeln

$$\left.\begin{array}{r} y = x \tang \alpha \\ (c - x)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{array}\right\} [1]$$

sind die Grundformeln der ebenen Trigonometrie.

7. Eliminirt man aus diesen Gleichungen x und y, so geben die erste und dritte:

$$x^2 \sec \alpha^2 = b^2, \quad x = b \cos \alpha,$$

wobey man bemerke, daß b immer positiv, x und $\cos \alpha$ aber offenbar zugleich positiv und negativ sind. Durch

Subtraction und Substitution erhält man aus der zweiten und dritten Gleichung:

$$c^2 - 2bc \cos\alpha = a^2 - b^2.$$

Also

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma \end{aligned}\right\} [2]$$

8. Durch Addition der zweiten und dritten Gleichung erhält man leicht:

$$o = 2a^2 - 2ac \cos\beta - 2ab \cos\gamma.$$

Also

$$\left.\begin{aligned} a &= c \cos\beta + b \cos\gamma \\ b &= a \cos\gamma + c \cos\alpha \\ c &= b \cos\alpha + a \cos\beta \end{aligned}\right\} [3]$$

9. Nach [2.] ist.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

woraus man leicht sowohl für $b^2 \sin\alpha^2$, als $a^2 \sin\beta^2$, den Werth

$$\frac{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{4c^2}$$

erhält. Also

$$\left.\begin{aligned} a \sin\beta &= b \sin\alpha \\ b \sin\gamma &= c \sin\beta \\ c \sin\alpha &= a \sin\gamma \\ a : b &= \sin\alpha : \sin\beta \\ b : c &= \sin\beta : \sin\gamma \\ c : a &= \sin\gamma : \sin\alpha \end{aligned}\right\} [4]$$

d. h. in jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

10. Also

$$b : b \pm c = \sin\beta : 2\sin\tfrac{1}{2}(\beta \pm \gamma) \cos\tfrac{1}{2}(\beta \mp \gamma),$$

woraus sich durch Verbindung mit der Proportion

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

leicht ergiebt:

$$a : b \pm c = \sin\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\alpha : \sin\tfrac{1}{2}(\beta \pm \gamma) \cos\tfrac{1}{2}(\beta \mp \gamma).$$

Aber $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90^\circ$. Also $\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \cos\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \sin\frac{1}{2}\alpha$. Folglich

$$a : b + c = \sin \tfrac{1}{2} \alpha : \cos \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma),$$
$$a : b - c = \cos \tfrac{1}{2} \alpha : \sin \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma).$$

$$\left.\begin{array}{l} a \cos \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma) = (b + c) \sin \tfrac{1}{2} \alpha \\ b \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \gamma) = (a + c) \sin \tfrac{1}{2} \beta \\ c \cos \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) = (a + b) \sin \tfrac{1}{2} \gamma \end{array}\right\} [5]$$

$$\left.\begin{array}{l} a \sin \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma) = (b - c) \cos \tfrac{1}{2} \alpha \\ b \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \gamma) = (a - c) \cos \tfrac{1}{2} \beta \\ c \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) = (a - b) \cos \tfrac{1}{2} \gamma \end{array}\right\} [6]$$

11. Für rechtwinklige Dreiecke nehmen alle bisher bewiesenen Relationen eine einfachere Gestalt an. Ist nämlich immer $\alpha = 90^\circ$, so ist $\sin \alpha = 1$, $\sin \tfrac{1}{2} \alpha = \cos \tfrac{1}{2} \alpha = \cos 45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Also aus [2.]

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 \\ o = c - a \cos \beta \\ 0 = b - a \cos \gamma \end{array}\right\} [7]$$

Aus [4], [5], [6] erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} a \sin \beta = b \\ b \operatorname{tang} \gamma = c,\ b = c \operatorname{tang} \beta \\ c = a \sin \gamma \end{array}\right\} [8]$$

$$\left.\begin{array}{l} a \cos \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma) = (b + c) \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ b \cos (45^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma) = (a + c) \sin \tfrac{1}{2} \beta \\ c \cos (45^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) = (a + b) \sin \tfrac{1}{2} \gamma \end{array}\right\} [9]$$

$$\left.\begin{array}{l} a \sin \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma) = (b - c) \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ b \sin (45^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma) = (a - c) \cos \tfrac{1}{2} \beta \\ c \sin (45^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) = (a - b) \cos \tfrac{1}{2} \gamma \end{array}\right\} [10]$$

Da aber $\tfrac{1}{2} (\beta - \gamma) = 45^\circ - \gamma$ ist, so transformirt man diese Gleichungen leicht in:

$$\left.\begin{array}{l} a \cos (45^\circ - \gamma) = (b + c) \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ b \cos \tfrac{1}{2} \beta = (a + c) \sin \tfrac{1}{2} \beta \\ c \cos \tfrac{1}{2} \gamma = (a + b) \sin \tfrac{1}{2} \gamma \end{array}\right\} [11]$$

$$\left.\begin{array}{l} a \sin (45^\circ - \gamma) = (b - c) \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ b \sin \tfrac{1}{2} \beta = (a - c) \cos \tfrac{1}{2} \beta \\ c \sin \tfrac{1}{2} \gamma = (a - b) \cos \tfrac{1}{2} \gamma \end{array}\right\} [12]$$

$$\left.\begin{array}{l} a \sin (45^\circ - \gamma) = (b - c) \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ a \cos (45^\circ - \gamma) = (b + c) \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ b \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \beta = a - c \\ b \cot \tfrac{1}{2} \beta = a + c \\ c \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \gamma = a - b \\ c \cot \tfrac{1}{2} \gamma = a + b \end{array}\right\} [13]$$

Durch Division der ersten beiden dieser Gleichungen ergiebt sich:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang}\,(45^0 - \gamma) = \dfrac{b - c}{b + c} \\ \text{tang}\,(45^0 - \beta) = \dfrac{c - b}{c + b}\end{array}\right\}\;[14]$$

Allgemeine Auflösung aller Fälle.

12. Folgende Fälle können nur vorkommen:

a. Gegeben eine Seite und zwei Winkel; also immer auch der dritte.

b. Gegeben zwei Seiten und

α. der eingeschlossene;

β. ein Gegenwinkel.

c. Gegeben alle drei Seiten.

Daß aus drei Winkeln ein Dreieck nicht berechnet werden kann, folgt schon aus der Lehre von der Congruenz, kann aber auch so gezeigt werden. Nimmt man nämlich α, β, γ als gegeben an, so erhält man, wenn je zwei der Gleichungen [2] zu einander addirt werden:

$$o = a - c \cos \beta - b \cos \gamma,$$
$$o = b - c \cos \alpha - a \cos \gamma,$$
$$o = c - b \cos \alpha - a \cos \beta,$$

wie auch schon in [3] gefunden. Also

$$a = (a \cos \gamma + c \cos \alpha) \cos \gamma + c \cos \beta$$
$$= a \cos \gamma^2 + c (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma),$$

und eben so:

$$c = c \cos \alpha^2 + a (\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma),$$

woraus durch Substitution und Division durch a leicht folgt:

$$1 = \cos \gamma^2 + \frac{(\cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma)^2}{1 - \cos \alpha^2},$$

also keine Bestimmung von a. Nach einigen leichten Reductionen erhält man folgende merkwürdige Gleichung zwischen den drei Winkeln:

$$1 - \cos \alpha^2 - \cos \beta^2 - \cos \gamma^2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = o.$$

Setzt man $\frac{b}{c} = a'$, $\frac{b}{a} = b'$, $\frac{c}{a} = c'$, so erhält man

aus den drei obigen Gleichungen leicht Ausdrücke für b′ und c′, woraus sich auch $a' = \frac{b'}{c'}$ leicht ergiebt. Nämlich

$$a' = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta}{\cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma},$$

$$b' = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma}{\cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma},$$

$$c' = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \cos\gamma}{\cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta}.$$

Also wird, wie auch die Geometrie lehrt, durch die drei Winkel nur das Verhältniß der Seiten bestimmt.

Wir wenden uns nun zur Auflösung der einzelnen Fälle selbst, wobei wir uns nur auf das obige Schema beziehen.

13. Gegeben a, β, γ / Gesucht α, b, c } (12. a.)

Da $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ ist, so ist $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$. Also sind nach [4] die zur Auflösung dienenden Formeln:

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma),$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)},$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

14. Gegeben b, c, α / Gesucht β, γ, a } (12. b. α.)

Nach [4] und [3] ist:

$$a \sin\beta = b \sin\alpha, \quad a \cos\beta = c - b \cos\alpha.$$

Also durch Division:

$$\tang\beta = \frac{b \sin\alpha}{c - b \cos\alpha};$$

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta), \quad \tang\gamma = \frac{c \sin\alpha}{b - c \cos\alpha};$$

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Da die Formeln für $\tang\beta$, $\tang\gamma$ zur logarithmischen Rechnung unbequem sind, so berechne man φ, φ' aus den Formeln:

$$\cos\varphi = \frac{b \cos\alpha}{c}, \quad \cos\varphi' = \frac{c \cos\alpha}{b};$$

so erhält man leicht:

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{b \sin\alpha}{c(1-\cos\varphi)} = \frac{b \sin\alpha}{2c \sin\frac{1}{2}\varphi^2},$$

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{c \sin\alpha}{b(1-\cos\varphi')} = \frac{c \sin\alpha}{2b \sin\frac{1}{2}\varphi'^2}.$$

Die Berechnung der Hülfswinkel φ, φ' ist nur möglich, wenn $\frac{b \cos\alpha}{c}$, $\frac{c \cos\alpha}{b}$ die Einheit nicht übersteigen. Einer dieser Brüche ist aber immer < 1. Denn wäre z. B. $\frac{b \cos\alpha}{c} > 1$, $b \cos\alpha > c$; so wäre $b > c$, da $\cos\alpha$ nie > 1. Also um so mehr $b > c \cos\alpha$, oder $\frac{c \cos\alpha}{b} < 1$. Einen der beiden Hülfswinkel braucht man aber nur, weil, wenn z. B. β gefunden, γ sich augenblicklich aus der Formel $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ergiebt.

Unmittelbar aus den Datis wird a mittelst der Formel

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha}$$

gefunden. Die Größe unter dem Wurzelzeichen ist, wenn man $2\cos\frac{1}{2}\alpha\sqrt{bc} = k$ setzt:

$$= b^2 + 2bc + c^2 - 2bc\,(1 + \cos\alpha)$$
$$= (b + c)^2 - 4bc \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$= (b + c)^2 - k^2.$$

Also $$a = \sqrt{(b + c + k)(b + c - k)};$$

eine zur logarithmischen Rechnung bequeme Formel. Man kann auch einen Hülfswinkel ψ aus der Formel

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{2 \sin\frac{1}{2}\alpha\sqrt{bc}}{b - c},$$

berechnen. Dann hat man

$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc(1 - \cos\alpha)$$
$$= (b - c)^2 + 4bc \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$= (b - c)^2 + (b - c)^2 \operatorname{tang}\psi^2$$
$$= (b - c)^2 \sec\psi^2 = \frac{(b - c)^2}{\cos\psi^2}.$$

$$a = \frac{b - c}{\cos\psi}.$$

Da, wegen $(b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc$, immer $b^2 + c^2 \gtreqless 2bc$, also $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc \gtreqless 4bc$, $b + c \gtreqless 2\sqrt{bc}$, $b + c > 2\cos\frac{1}{2}\alpha\sqrt{bc}$ ist; so kann man auch setzen

$$\sin\psi' = \frac{2 \cos\frac{1}{2}\alpha\sqrt{bc}}{b + c}.$$

Dies giebt:

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc(1 + \cos\alpha)$$
$$= (b + c)^2 - 4bc \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2$$
$$= (b + c)^2 - (b + c)^2 \sin\psi'^2$$
$$= (b + c)^2 \cos\psi'^2.$$
$$a = (b + c)\cos\psi'.$$

Auch ist

$$a^2 = b^2(\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2) + c^2(\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2)$$
$$- 2bc(\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2)$$
$$= (b + c)^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + (b - c)^2 \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2,$$

d. h. die Seite a ist der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gleich, dessen Katheten $(b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha$, $(b - c)\cos\frac{1}{2}\alpha$ sind. Dies giebt auch folgende Berechnung von a:

$$a = (b + c)\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{b - c}{b + c}\cot\tfrac{1}{2}a\right)^2},$$
$$\frac{b - c}{b + c}\cot\tfrac{1}{2}\alpha = \mathrm{tang}\,\Theta,$$
$$a = \frac{(b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\Theta}.$$

In den Elementen wird gewöhnlich folgende Auflösung des vorliegenden Falles aus einer Construction abgeleitet. Aus [5] und [6] folgt durch Division augenblicklich

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c}\cot\tfrac{1}{2}\alpha,$$

oder da $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90^0$ ist:

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{b - c}{b + c}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma),$$
$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) : \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = b + c : b - c.$$

Hieraus findet man $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$. Ist nun $\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \delta$, $\frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha = \sigma$; so ergiebt sich leicht $\beta = \sigma + \delta$, $\gamma = \sigma - d$, wodurch β, γ, also auch a, leicht gefunden werden.

Bey dieser Auflösung ist es oft der Fall, daß b, c nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Um nun nicht erst b, c in den Tafeln aufsuchen zu müssen, kann man sich der kleinen von Gauß (Monatl. Corresp. XXVI. 1812. November=Stück) zuerst bekannt gemachten Tafeln, aus log b und log c sogleich log (b + c) und log (b — c)

zu finden, oder auch des größern Werks: Tafel zur bequemen Berechnung des Logarithmen der Summe und Differenz zweier Größen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. (Von C. A. Matthiesen). Altona 1817. bedienen, oder auf folgende Art (Puissant Traité de Géodésie. I. p. 54.) verfahren. Man setze $\frac{b}{c} = \text{tang}\,\varphi$, wo, wenn wir $b > c$ annehmen, $\text{tang}\,\varphi > 1$, $\varphi > 45^0$ ist. Aber

$$\text{tang}\,(\varphi - 45^0) = \frac{\text{tang}\,\varphi - 1}{1 + \text{tang}\,\varphi} = \frac{b - c}{b + c}.$$

Also $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \text{taug}\,(\varphi - 45^0)\,.\,\text{cot}\,\frac{1}{2}\alpha$,
wodurch $\text{tang}\,\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ nur mit Hülfe der Logarithmen von b, c, ohne diese Seiten selbst zu kennen, gefunden wird.

Die Seite a kann man auch nach [5] und [6] mittelst folgender Formeln berechnen:

$$a = \frac{(b + c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)} = \frac{(b - c)\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}$$
$$= \frac{(b + c)\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)} = \frac{(b - c)\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}.$$

15. Gegeben b, c, β | (12. b. β.)
Gesucht α, γ, a |

$$\sin\gamma = \frac{c\,\sin\beta}{b},\quad \alpha = 180^0 - (\beta + \gamma),\quad a = \frac{b\,\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Die Berechnung beruht ganz auf der Berechnung von γ, welcher durch seinen Sinus bestimmt wird. Da nun jeder Sinus zu zwei Winkeln gehört, so hat auch γ im Allgemeinen zwei einander zu 180^0 ergänzende Werthe, und folglich auch α und a. Dieser Fall heißt daher der unbestimmte Fall der ebenen Trigonometrie. Man unterscheide jedoch folgende Fälle. Ist $b > c$, also auch $\beta > \gamma$, so ist $\gamma < 90^0$, und die Aufgabe folglich völlig bestimmt. Ist $b = c$, also auch $\beta = \gamma$, so ist die Aufgabe ebenfalls völlig bestimmt. Ist aber $b < c$, $\beta < \gamma$, so kann γ sowohl $>$ als auch $< 90^0$ seyn, und es giebt folglich zwei Auflösungen.

16. Gegeben a, b, c | (12. c.)
Gesucht α, β, γ |

Nach [2] ist:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b \;\; - c^2}{2ab}.$$

Zur logarithmischen Rechnung werden diese Formeln auf folgende Art bequemer eingerichtet.

$$1 \pm \cos\alpha = \frac{2bc \pm (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc},$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc},$$

$$= \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2bc}$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc}.$$

Setzt man nun $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$, so erhält man leicht:

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{s(s - b)}{ac}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s(s - c)}{ab}}.$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{ac}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{ab}}.$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{s(s - b)}},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{s(s - c)}}.$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

$$\sin\beta = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Letztere Formeln sind nicht so bequem wie die erstern, da die halben Winkel immer spitz sind, bei den letzten Formeln dagegen immer eine besondere Beurtheilung der Art der Winkel erforderlich seyn würde.

Auch folgende Formeln scheinen noch einer Erwähnung zu verdienen:

$$\tang \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)(s-c)}{(s-b)^2 s(s-a)}}$$
$$= \sqrt{\frac{(s-c)^2 s(s-a)}{s^2(s-b)(s-c)}}$$
$$= \frac{s-a}{s-b}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$
$$= \frac{s-c}{s}\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}.$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\beta = \frac{s-a}{s-b}\tang\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s-c}{s}\cot\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{s-a}{s-c}\tang\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{s-b}{s}\cot\tfrac{1}{2}\alpha.$$

17. Bei den rechtwinkligen Dreiecken braucht man nur folgende Fälle zu unterscheiden:

a. Gegeben ein spitzer Winkel und
  - α. die Hypotenuse;
  - β. eine Kathete.

b. Gegeben eine Kathete und
  - α. die Hypotenuse;
  - β. die andere Kathete.

a. α. Gegeben β, a;
Gesucht γ, b, c;

wenn α immer den rechten Winkel bezeichnet.

$$\gamma = 90^0 - \beta,$$
$$b = a\sin\beta,\ c = a\cos\beta \text{ [7. 8.]}.$$

a. β. Gegeben β, b;
Gesucht γ, c, a.

$$\gamma = 90^0 - \beta,$$
$$c = b\tang\gamma = b\cot\beta \text{ [8]},$$
$$a = \frac{b}{\sin\beta} = b\,\text{cosec}\,\beta \text{ [8]}.$$

Auch ist, wenn γ, c schon gefunden, nach [13]:

$$a = \frac{b - c}{\sin(45^\circ - \gamma)} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{b + c}{\cos(45^\circ - \gamma)} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

b. α. Gegeben a, b.

Gesucht β, γ, c.

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\ [8],\ \gamma = 90^\circ - \beta,$$

$$c = a \sin\gamma = a \cos\beta\ [8] = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

b. β. Gegegeben b, c.

Gesucht β, γ, a.

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{b}{c},\ \operatorname{tang}\gamma = \frac{c}{b}\ [8];$$

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \beta) = \frac{c - b}{c + b},\ \operatorname{tang}(45^\circ - \gamma) = \frac{b - c}{b + c}\ [14];$$

$$a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\ [8].$$

Wären alle drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bekannt, so könnte man β, γ auch nach den Formeln [13]:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta = \frac{a - c}{b},\ \cot\tfrac{1}{2}\beta = \frac{a + c}{b};$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{a - b}{c},\ \cot\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{a + b}{c},$$

finden.

Gleichschenklige Dreiecke lassen sich immer in zwei rechtwinklige zerlegen, welches ihre Berechnung erleichtert.

18. Zwischen den Winkeln eines Dreiecks giebt es gewisse Relationen, von denen wir hier einige der merkwürdigsten mittheilen, wobei nur immer zu bemerken, daß $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$ ist.

$$\cos\alpha = -\cos(\beta + \gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma,$$

$$(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2 = (1 - \cos\beta^2)(1 - \cos\gamma^2),$$

woraus man sogleich erhält:

$$o = 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

wie schon in (12.) auf andere Art gefunden. Ferner ist

$$\operatorname{tang}\alpha = -\operatorname{tang}(\beta + \gamma) = -\frac{\operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma}{1 - \operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma},$$

welches, weiter entwickelt, giebt:

$$\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta + \operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta\operatorname{tang}\gamma.$$

Auch ist

$$\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma,$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\beta(1 + \cos\gamma) + \sin\gamma\,(1 + \cos\beta)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 4\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\beta^2$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma\sin(\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma) = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Eben so ist:

$$\cos\alpha = -\cos(\beta + \gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma,$$
$$1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma =$$
$$\cos\beta(1 - \cos\gamma) + 1 + \cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$
$$= 2(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\beta^2)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 2\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2$$
$$+ 4\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= 2 + 4\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos(\tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Ferner ist

$$\cot\alpha = -\cot(\beta + \gamma) = -\frac{\cot\beta - \tang\gamma}{1 + \cot\beta\tang\gamma},$$
$$\cot\alpha + \cot\alpha\cot\beta\tang\gamma = -\cot\beta + \tang\gamma,$$
$$\cot\alpha(\cot\beta + \cot\gamma) = 1 - \cot\beta\cot\gamma,$$
$$\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma = \cot\alpha - \cot\alpha^2(\cot\beta + \cot\gamma)$$
$$= \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma - (1 + \cot\alpha^2)(\cot\beta + \cot\gamma)$$
$$= \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma - \operatorname{cosec}\alpha \,.\, \frac{\cot\beta + \cot\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$
$$= \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma - \operatorname{cosec}\alpha \,.\, \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta + \gamma)}.$$

Also ist $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma =$
$$\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma + \operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\operatorname{cosec}\gamma.$$

Da $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^0$ ist; so ist $\sin 2\alpha = -\sin(2\beta + 2\gamma)$

$$= -\sin 2\beta\cos 2\gamma - \cos 2\beta\sin 2\gamma$$
$$= -\sin 2\beta + \sin 2\beta(1 - \cos 2\gamma) - \sin 2\gamma + \sin 2\gamma(1 - \cos 2\beta)$$
$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\beta\cos\beta\sin\gamma^2 + 4\sin\gamma\cos\gamma\sin\beta^2$$
$$= 4\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta + \gamma) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Eben so ist $\cos 2\alpha = \cos(2\beta + 2\gamma) = \cos 2\beta\cos 2\gamma - \sin 2\beta\sin 2\gamma,$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \cos 2\beta(1 + \cos 2\gamma) + \cos 2\gamma - \sin 2\beta\sin 2\gamma,$$
$$1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma =$$
$$(1 + \cos 2\beta)(1 + \cos 2\gamma) - 4\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma$$
$$= 4\cos\beta\cos\gamma\cos(\beta + \gamma) = -4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Aehnliche Relationen lassen sich mehrere finden. M. s. z. B. Lehrbuch der Geom. und Trig. v. Crelle. Berlin 1826. I. S. 422.

Einige Anwendungen,

19. Die Höhe des Dreiecks in Bezug auf die Seite c sey $= c'$; so liegen α, b, c' offenbar in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse $=$ b ist. Also ist $c' = b \sin\alpha$, und folglich der Inhalt des Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel $= \frac{1}{2} cc' = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$. Setzt man für $\sin\alpha$ den Ausdruck in (16.), so erhält man den Inhalt durch die drei Seiten

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Sind eine Seite c und die beiden anliegenden Winkel α, β gegeben; so ist nach [4]:

$$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{c \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$\triangle = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha+\beta)} = \frac{c^2}{2(\cot\alpha + \cot\beta)},$$

wenn wir den Inhalt immer durch $\triangle$ bezeichnen. Sind c, β, γ gegeben, so hat man

$$\triangle = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma} = \frac{c^2 \sin\beta \sin(\beta+\gamma)}{2 \sin\gamma}.$$

Sind b, c, β, d. i. zwei Seiten und ein Gegenwinkel, gegeben; so ist nach [2]:

$$(a - c\cos\beta)^2 = a^2 - 2ac\cos\beta + c^2\cos\beta^2$$
$$= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta - c^2\sin\beta^2 = b^2 - c^2\sin\beta^2,$$

woraus

$$a = c\cos\beta \pm \sqrt{b^2 - c^2\sin\beta^2}.$$

Also $\triangle = \frac{1}{2} ac \sin\beta$

$$= \tfrac{1}{2} c \sin\beta (c\cos\beta \pm \sqrt{b^2 - c^2\sin\beta^2}).$$

Das doppelte Zeichen zeigt einen doppelten Werth des Inhalts an. Für $b > c$ ist bekanntlich nur ein Dreieck möglich (15.), und in der That ist in diesem Falle $b^2 - c^2\sin\beta^2 > c^2 - c^2\sin\beta^2 > c^2\cos\beta^2$, $\sqrt{b^2 - c^2\sin\beta^2} > c\cos\beta$, so daß also nur das obere Zeichen gelten kann, da das untere einen negativen Werth von $\triangle$ geben würde, welcher hier keine Bedeutung haben kann. Für $b = c$ ist β nothwendig spitz, $\cos\beta$ positiv, und $b^2 - c^2\sin\beta^2 = c^2\cos\beta^2$. Wollte man also

das untere Zeichen nehmen, so würde $\Delta = 0$. Also muß man das obere nehmen, und es ist in diesem Falle $\Delta = \frac{1}{2} b^2 \sin 2\beta$. Ist endlich $b < c$, so ist, da $c \sin\beta$ die Höhe des Dreiecks in Bezug auf die Seite a ist, nie $c \sin\beta > b$. Also $b^2 - c^2 \sin\beta^2 < c^2 - c^2 \sin\beta^2$, $< c^2 \cos\beta^2$, $\sqrt{b^2 - c^2 \sin\beta^2} < c \cos\beta$. Demnach sind in diesem Falle beide Zeichen brauchbar, und es giebt, wie in (16.) zwei Dreiecke, zwei Werthe von Δ. Nur für $c \sin\beta = b$, wo das Dreieck rechtwinklig wird, giebt es nur einen Werth, $= \frac{1}{2} c^2 \sin\beta \cos\beta = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\beta$.

20. Addirt man die Gleichungen

$$a \sin\alpha = a \sin\alpha,$$
$$b \sin\alpha = a \sin\beta,$$
$$c \sin\alpha = a \sin\gamma,$$

zu einander; so erhält man

$$(a + b + c) \sin\alpha = a(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

oder nach (18.) für $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$:

$$a = \frac{2s \sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma} = \frac{4s \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha}{4 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma},$$

d. i.

$$a = \frac{s \sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma},$$
$$b = \frac{s \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\gamma},$$
$$c = \frac{s \sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Da $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$ (19.) ist; so erhält man leicht hieraus:

$$\Delta = s^2 \tang\tfrac{1}{2}\alpha \tang\tfrac{1}{2}\beta \tang\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$s = \sqrt{\Delta \cot\tfrac{1}{2}\alpha \cot\tfrac{1}{2}\beta \cot\tfrac{1}{2}\gamma}$$
$$= \sqrt{\Delta (\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma)}.$$

(Goniometrie. 57.)

Nach (19.) ist

$$a^2 = 2\Delta (\cot\beta + \cot\gamma),$$
$$b^2 = 2\Delta (\cot\alpha + \cot\gamma),$$
$$c^2 = 2\Delta (\cot\alpha + \cot\beta),$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\Delta (\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma),$$
$$\Delta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma)}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck von Δ mit dem vorher

gefundenen, so erhält man, wenn man statt der Tangenten die Cotangenten einführt:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha \cot\frac{1}{2}\beta \cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma}$$

$$= \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma}.$$

21. Seyen r, r' die Halbmesser des um und in das Dreieck beschriebenen Kreises. In Fig. 46. ist offenbar $\angle\delta = 2\gamma$, $\angle\alpha\beta\delta = 90^0 - \gamma$. Also $c : r = \sin 2\gamma : \cos\gamma$.

$$r = \frac{c \cos\gamma}{\sin 2\gamma} = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

In Fig. 47. ist $\angle\delta\alpha\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle\delta\beta\varepsilon = \frac{1}{2}\beta$. Also $r'(\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta) = c$, und folglich

$$r' = \frac{c \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

da $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Also

$$\frac{r'}{r} = 4\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma$$

$$= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 \quad (18.)$$

$$\frac{r+r'}{r} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

Auch ist wie vorher:

$$r'(\cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = a,$$

$$r'(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = b,$$

$$r'(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta) = c;$$

$$2r'(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = a+b+c,$$

$$\frac{r'(a+b+c)^2}{2\Delta} = a+b+c \quad (20.)$$

$$r' = \frac{2\Delta}{a+b+c}.$$

Aber $2\Delta = ab\sin\gamma$ (19.). Also

$$r = \frac{abc}{2ab\sin\gamma} = \frac{abc}{4\Delta}.$$

$$2rr' = \frac{abc}{a+b+c}.$$

Auch ist

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

$$r' = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a+b+c}.$$

Sind in Fig. 48. δ, ε die Mittelpunkte des um und in das Dreieck beschriebenen Kreises; so ist, wenn $\delta\zeta$, $\varepsilon\vartheta$ auf $\alpha\beta$ senkrecht sind, und $\delta\eta$ mit $\alpha\beta$ parallel ist, weil $\angle\zeta\delta\alpha$, als halber Centralwinkel, $=\gamma$ ist, für $\delta\eta = x$, $\varepsilon\eta = y$:

$$x = r'\cot\tfrac{1}{2}\alpha - r\sin\gamma,\ y = r' - r\cos\gamma.$$

Also, für $\delta\varepsilon = d$, $d^2 = x^2 + y^2$

$$= r'^2(1 + \cot\tfrac{1}{2}\alpha^2) - 2rr'(\cos\gamma + \cot\tfrac{1}{2}\alpha\sin\gamma) + r^2$$

$$= \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} - \frac{2rr'\sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} + r^2$$

$$= \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} - \frac{2rr'\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} + r^2,$$

da $\gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 90^0$ ist. Aber

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Also

$$d^2 = \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} + r^2 - 2rr' - \frac{4rr'\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

$$= \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} + r^2 - 2rr' - \frac{rr'}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{r'}{r\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

da nach dem Obigen

$$\frac{r'}{r} = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$d^2 = r^2 - 2rr',\ d = \sqrt{r(r - 2r')},\ r:d = d:r - 2r'.$$

Viele Sätze vom Dreieck, trigonometrisch bewiesen, findet man in folgenden Schriften: Ueber einige Eigenschaften des ebenen Dreiecks, von Crelle. Berlin. 1816. Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von Feuerbach. Nürnberg. 1822. De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis, auctore C. F. A. Jacobi. Numburgi. 1825. 4. Aufgaben über ebene Dreiecke, worin Summen oder Differenzen von Seiten oder Winkeln gegeben sind, von Kroll. Halle. 1826.

22. Um die Anwendung des trigonometrischen Calculs bei den Beweisen geometrischer Sätze zu zeigen, wählen wir den schon Thl. IV. S. 876. synthetisch bewiesenen, von Monge gefundenen Satz, daß die drei Durchschnittspunkte A, A', A'' (Fig. 49.) von je zwei der an drei Kreise gezogenen sechs äußern Tangententen in einer geraden

Linie liegen. Die Seiten und Winkel des Dreiecks CC'C'' seyen c, c', c'' und C, C', C'', die Halbmesser der gegebenen Kreise r, r', r''; die Winkel AA'C; A''A'C aber φ, φ'. Es ist offenbar

$$A'C : A'C' = r : r',$$
$$A'C : A'C + c'' = r : r',$$
$$A'C : c'' = r : r' -$$
$$A'C = \frac{c''r}{r'-r}, \quad A'C' =$$

und ganz eben so:

$$AC = \frac{c'r}{r''-r}, \quad A''C' =$$

Könnte man nun zeigen, daß tang
wäre der Satz bewiesen, da dan
Da aber

$$\text{tang}(\varphi + \varphi') = \frac{\text{tang}\,\varphi +}{1 - \text{tang}\,\varphi\ \text{t}}$$

ist, so braucht man nur zu zeigen, daß tan
Dieser Zähler ist aber, wenn man für die
nometrischen Ausdrücke durch zwei Seite
senen Winkel in den Dreiecken ACA', A

$$c'r(r'-r)\{c''r'(r'-r'') - cr'(r' -$$
$$+ cr'(r'-r)\{c''r(r''-r) - c'r(r' -$$
$$= c'r(r'-r)\{c''r'(r'-r'') - cr'(r'-r)\,c$$
$$+ cr'(r'-r)\{c''r(r''-r) - c'r(r'-r)\,c$$

Also braucht man bloß zu zeigen, daß

$$c'r\{c''r'(r'-r'') - cr'(r'-r)\cos C'\} \cdot \frac{}{c}$$
$$+ cr'\{c''r(r''-r) - c'r(r'-r)\cos C\},$$

oder

$$cc'r\{c''r'(r'-r'') - cr'(r'-r)\cos C'\}$$
$$+ cc'r'\{c''r(r''-r) - c'r(r'-r)\cos C\},$$

oder

$$r\{c''r'(r'-r'') - cr'(r'-r)\cos C'\}$$
$$+ r'\{c''r(r''-r) - c'r(r'-r)\cos C\}$$

$= 0$ ist. Letztere Größe ist aber, wenn man das Resultat durch rr' dividirt, $=$

$$r'c'' - c(r'-r)\cos C' - rc'' - c'(r'-r)\cos C$$
$$= (r'-r)(c'' - c\cos C' - c'\cos C),$$

welches $= 0$ ist, wenn ein Factor dieses Productes $= 0$ ist. Nach [3] ist aber

$$c \cos C' + c' \cos C = c'',$$

also wirklich der zweite Factor = o. Folglich ist $\tang(\varphi + \varphi') = o$, $\varphi + \varphi' = 180^0$, da es offenbar nicht = o seyn kann. Also ist AA′A″ eine gerade Linie. Noch einen Beweis s. m. in dem Art. Transversale. (26.)

Sehr viele Anwendungen der Trigonometrie, auch auf Geodäsie, findet man in folgenden Werken: M. Hirsch geometr. Aufgaben. Erste Samml. T. Mayers praktische Geometrie. Lamberts Beiträge zur Mathem. Erste Samml. Pfleiderers Trigonometrie. Hindenburgs Archiv. Heft II. S. 318. Vorzüglich die drei Werke von Puissant: Recueil de div. prop. de Géom. resol. et demontr. par l'Analyse. Paris. 1809; Traité de Géodésie. 2 Tom. Paris. 1819. 4.; Traité de Topographie. Paris. 1820. 4. Auch Cagnol: Trigonométrie traduit par Chompré. Paris. 1808. 4. Schulz Taschenbuch der Meßkunst. 2 Thle.

23. Die Seiten und Winkel eines Dreiecks lassen sich auch aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; x′, y′, z′; x″, y″, z″ seiner Spitzen bestimmen. Für die Seite $\alpha\beta$ (Fig. 50.) seyen $\alpha a'$, $\beta a''$ auf der Ebene der xy; a′c′, a″c″ auf der Axe der x, und a′b′, a″b″ auf der Axe der y senkrecht; so ist, wenn αd mit a′a″ parallel, also auf $\beta a''$ senkrecht ist:

$$\begin{aligned}\alpha\beta^2 &= \beta d^2 + \alpha d^2 = \beta d^2 + a'a''^2 \\ &= \beta d^2 + b'b''^2 + c'c''^2 \\ &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.\end{aligned}$$

Die drei Seiten unseres Dreiecks sind also:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2} \\ b &= \sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2} \\ c &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.\end{aligned}$$

Da nun $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ist, so erhält man für

$$\frac{y - y'}{x - x'} = p,\ \frac{y - y''}{x - x''} = p';$$

$$\frac{z - z'}{x - x'} = q,\ \frac{z - z''}{x - x''} = q'.$$

$$\cos\alpha = \frac{1 + pp' + qq'}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)(1 + p'^2 + q'^2)}}$$

Linie liegen. Die Seiten und Winkel des Dreiecks $CC'C''$ seyen c, c', c'' und C, C', C'', die Halbmesser der gegebenen Kreise r, r', r''; die Winkel $AA'C$; $A''A'C$ aber φ, φ'. Es ist offenbar

$$A'C : A'C' = r : r',$$
$$A'C : A'C + c'' = r : r',$$
$$A'C : c'' = r : r' - r,$$
$$A'C = \frac{c''r}{r' - r}, \quad A'C' = \frac{c''r'}{r' - r},$$

und ganz eben so:

$$AC = \frac{c'r}{r'' - r}, \quad A''C' = \frac{cr'}{r' - r''}.$$

Könnte man nun zeigen, daß $\tang(\varphi + \varphi') = 0$ ist, so wäre der Satz bewiesen, da dann $\varphi + \varphi' = 180^0$. Da aber

$$\tang(\varphi + \varphi') = \frac{\tang\varphi + \tang\varphi'}{1 - \tang\varphi \tang\varphi'}$$

ist, so braucht man nur zu zeigen, daß $\tang\varphi + \tang\varphi' = 0$ ist. Dieser Zähler ist aber, wenn man für die Tangenten ihre trigonometrischen Ausdrücke durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel in den Dreiecken ACA', $A'C'A''$ setzt, $=$

$$c'r(r' - r)\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}\sin C$$
$$+ cr'(r' - r)\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}\sin C'$$
$$= c'r(r' - r)\left\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\right\} \cdot \frac{c\sin C'}{c'}$$
$$+ cr'(r' - r)\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}\sin C'$$

Also braucht man bloß zu zeigen, daß

$$c'r\left\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\right\} \cdot \frac{c}{c'}$$
$$+ cr'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\},$$

oder

$$cc'r\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}$$
$$+ cc'r'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\},$$

oder

$$r\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}$$
$$+ r'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}$$

$= 0$ ist. Letztere Größe ist aber, wenn man das Resultat durch rr' dividirt, $=$

$$r'c'' - c(r' - r)\cos C' - rc'' - c'(r' - r)\cos C$$
$$= (r' - r)(c'' - c\cos C' - c'\cos C),$$

welches $= 0$ ist, wenn ein Factor dieses Productes $= 0$ ist. Nach [3] ist aber

$$c \cos C' + c' \cos C = c'',$$

also wirklich der zweite Factor $= 0$. Folglich ist $\tan g(\varphi + \varphi') = 0$, $\varphi + \varphi' = 180^0$, da es offenbar nicht $= 0$ seyn kann. Also ist $AA'A''$ eine gerade Linie. Noch einen Beweis s. m. in dem Art. Transversale. (26.)

Sehr viele Anwendungen der Trigonometrie, auch auf Geodäsie, findet man in folgenden Werken: M. Hirsch geometr. Aufgaben. Erste Samml. T. Mayers praktische Geometrie. Lamberts Beiträge zur Mathem. Erste Samml. Pfleiderers Trigonometrie. Hindenburgs Archiv. Heft II. S. 318. Vorzüglich die drei Werke von Puissant: Recueil de div. prop. de Géom. resol. et demontr. par l'Analyse. Paris. 1809; Traité de Géodésie. 2 Tom. Paris. 1819. 4.; Traité de Topographie. Paris. 1820. 4. Auch Cagnol' Trigonométrie traduit par Chompré. Paris. 1808. 4. Schulz Taschenbuch der Meßkunst. 2 Thle.

23. Die Seiten und Winkel eines Dreiecks lassen sich auch aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' seiner Spitzen bestimmen. Für die Seite $\alpha\beta$ (Fig. 50.) seyen $\alpha a'$, $\beta a''$ auf der Ebene der xy; $a'c'$, $a''c''$ auf der Axe der x, und $a'b'$, $a''b''$ auf der Axe der y senkrecht; so ist, wenn αd mit $a'a''$ parallel, also auf $\beta a''$ senkrecht ist:

$$\begin{aligned}\alpha\beta^2 &= \beta d^2 + \alpha d^2 = \beta d^2 + a'a''^2 \\ &= \beta d^2 + b'b''^2 + c'c''^2 \\ &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.\end{aligned}$$

Die drei Seiten unseres Dreiecks sind also:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2} \\ b &= \sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2} \\ c &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.\end{aligned}$$

Da nun $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ist, so erhält man für

$$\frac{y - y'}{x - x'} = p, \quad \frac{y - y''}{x - x''} = p';$$

$$\frac{z - z'}{x - x'} = q, \quad \frac{z - z''}{x - x''} = q'.$$

$$\cos\alpha = \frac{1 + pp' + qq'}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)(1 + p'^2 + q'^2)}}$$

Linie liegen. Die Seiten und Winkel des Dreiecks CC′C″ seyen c, c′, c″ und C, C′, C″, die Halbmesser der gegebenen Kreise r, r′, r″; die Winkel AA′C; A″A′C aber φ, φ'. Es ist offenbar

$$A'C : A'C' = r : r',$$
$$A'C : A'C + c'' = r : r',$$
$$A'C : c'' = r : r' - r,$$
$$A'C = \frac{c''r}{r' - r}, \quad A'C' = \frac{c''r'}{r' - r},$$

und ganz eben so:

$$AC = \frac{c'r}{r'' - r}, \quad A''C' = \frac{cr'}{r' - r''}.$$

Könnte man nun zeigen, daß $\tang(\varphi + \varphi') = 0$ ist, so wäre der Satz bewiesen, da dann $\varphi + \varphi' = 180^0$. Da aber

$$\tang(\varphi + \varphi') = \frac{\tang\varphi + \tang\varphi'}{1 - \tang\varphi \tang\varphi'}$$

ist, so braucht man nur zu zeigen, daß $\tang\varphi + \tang\varphi' = 0$ ist. Dieser Zähler ist aber, wenn man für die Tangenten ihre trigonometrischen Ausdrücke durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel in den Dreiecken ACA′, A′C′A″ setzt, =

$$c'r(r' - r)\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}\sin C$$
$$+ cr'(r' - r)\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}\sin C'$$
$$= c'r(r' - r)\left\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\right\}\cdot\frac{c\sin C'}{c'}$$
$$+ cr'(r' - r)\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}\sin C'$$

Also braucht man bloß zu zeigen, daß

$$c'r\left\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\right\}\cdot\frac{c}{c'}$$
$$+ cr'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\},$$

oder

$$cc'r\,\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}$$
$$+ cc'r'\,\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\},$$

oder

$$r\,\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}$$
$$+ r'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}$$

= 0 ist. Letztere Größe ist aber, wenn man das Resultat durch rr' dividirt, =

$$r'c'' - c(r' - r)\cos C' - rc'' - c'(r' - r)\cos C$$
$$= (r' - r)(c'' - c\cos C' - c'\cos C),$$

welches = 0 ist, wenn ein Factor dieses Productes = 0 ist. Nach [3] ist aber

$$c \cos C' + c' \cos C = c'',$$

also wirklich der zweite Factor $= 0$. Folglich ist $\tang(\varphi + \varphi') = 0$, $\varphi + \varphi' = 180^0$, da es offenbar nicht $= 0$ seyn kann. Also ist $AA'A''$ eine gerade Linie. Noch einen Beweis s. m. in dem Art. Transversale. (26.)

Sehr viele Anwendungen der Trigonometrie, auch auf Geodäsie, findet man in folgenden Werken: M. Hirsch geometr. Aufgaben. Erste Samml. T. Mayers praktische Geometrie. Lamberts Beiträge zur Mathem. Erste Samml. Pfleiderers Trigonometrie. Hindenburgs Archiv. Heft II. S. 318. Vorzüglich die drei Werke von Puissant: Recueil de div. prop. de Géom. resol. et demontr. par l'Analyse. Paris. 1809; Traité de Géodésie. 2 Tom. Paris. 1819. 4.; Traité de Topographie. Paris. 1820. 4. Auch Cagnol: Trigonométrie traduit par Chompré. Paris. 1808. 4. Schulz Taschenbuch der Meßkunst. 2 Thle.

23. Die Seiten und Winkel eines Dreiecks lassen sich auch aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' seiner Spitzen bestimmen. Für die Seite $\alpha\beta$ (Fig. 50.) seyen $\alpha a'$, $\beta a''$ auf der Ebene der xy; a'c', a''c'' auf der Axe der x, und a'b', a''b'' auf der Axe der y senkrecht; so ist, wenn αd mit a'a'' parallel, also auf $\beta a''$ senkrecht ist:

$$\begin{aligned}\alpha\beta^2 &= \beta d^2 + \alpha d^2 = \beta d^2 + a'a''^2 \\ &= \beta d^2 + b'b''^2 + c'c''^2 \\ &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.\end{aligned}$$

Die drei Seiten unseres Dreiecks sind also:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2} \\ b &= \sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2} \\ c &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.\end{aligned}$$

Da nun $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ist, so erhält man für

$$\frac{y - y'}{x - x'} = p, \quad \frac{y - y''}{x - x''} = p';$$

$$\frac{z - z'}{x - x'} = q, \quad \frac{z - z''}{x - x''} = q'.$$

$$\cos\alpha = \frac{1 + pp' + qq'}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)(1 + p'^2 + q'^2)}}$$

Linie liegen. Die Seiten und Winkel des Dreiecks $CC'C''$ seyen c, c', c'' und C, C', C'', die Halbmesser der gegebenen Kreise r, r', r''; die Winkel $AA'C$; $A''A'C$ aber φ, φ'. Es ist offenbar

$$A'C : A'C' = r : r',$$
$$A'C : A'C + c'' = r : r',$$
$$A'C : c'' = r : r' - r,$$
$$A'C = \frac{c''r}{r' - r}, \quad A'C' = \frac{c''r'}{r' - r},$$

und ganz eben so:

$$AC = \frac{c'r}{r'' - r}, \quad A''C' = \frac{cr'}{r' - r''}.$$

Könnte man nun zeigen, daß $\tang(\varphi + \varphi') = 0$ ist, so wäre der Satz bewiesen, da dann $\varphi + \varphi' = 180^0$. Da aber

$$\tang(\varphi + \varphi') = \frac{\tang\varphi + \tang\varphi'}{1 - \tang\varphi \tang\varphi'}$$

ist, so braucht man nur zu zeigen, daß $\tang\varphi + \tang\varphi' = 0$ ist. Dieser Zähler ist aber, wenn man für die Tangenten ihre trigonometrischen Ausdrücke durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel in den Dreiecken ACA', $A'C'A''$ setzt, $=$

$$\begin{aligned} & c'r(r' - r)\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}\sin C \\ + & cr'(r' - r)\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}\sin C' \\ = & c'r(r' - r)\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\} \cdot \frac{c \sin C'}{c'} \\ + & cr'(r' - r)\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}\sin C' \end{aligned}$$

Also braucht man bloß zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} & c'r\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\} \cdot \frac{c}{c'} \\ + & cr'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & cc'r\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\} \\ + & cc'r'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & r\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\} \\ + & r'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\} \end{aligned}$$

$= 0$ ist. Letztere Größe ist aber, wenn man das Resultat durch rr' dividirt, $=$

$$\begin{aligned} & r'c'' - c(r' - r)\cos C' - rc'' - c'(r' - r)\cos C \\ & = (r' - r)(c'' - c\cos C' - c'\cos C), \end{aligned}$$

welches $= 0$ ist, wenn ein Factor dieses Productes $= 0$ ist. Nach [3] ist aber

$$c \cos C' + c' \cos C = c'',$$

also wirklich der zweite Factor $= 0$. Folglich ist $\tan g(\varphi + \varphi') = 0$, $\varphi + \varphi' = 180^0$, da es offenbar nicht $= 0$ seyn kann. Also ist AA'A'' eine gerade Linie. Noch einen Beweis s. m. in dem Art. Transversale. (26.)

Sehr viele Anwendungen der Trigonometrie, auch auf Geodäsie, findet man in folgenden Werken: M. Hirsch geometr. Aufgaben. Erste Samml. T. Mayers praktische Geometrie. Lamberts Beiträge zur Mathem. Erste Samml. Pfleiderers Trigonometrie. Hindenburgs Archiv. Heft II. S. 318. Vorzüglich die drei Werke von Puissant: Recueil de div. prop. de Géom. resol. et demontr. par l'Analyse. Paris. 1809; Traité de Géodésie. 2 Tom. Paris. 1819. 4.; Traité de Topographie. Paris. 1820. 4. Auch Cagnol: Trigonométrie traduit par Chompré. Paris. 1808. 4. Schulz Taschenbuch der Meßkunst. 2 Thle.

23. Die Seiten und Winkel eines Dreiecks lassen sich auch aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' seiner Spitzen bestimmen. Für die Seite $\alpha\beta$ (Fig. 50.) seyen $\alpha a'$, $\beta a''$ auf der Ebene der xy; a'c', a''c'' auf der Axe der x, und a'b', a''b'' auf der Axe der y senkrecht; so ist, wenn αd mit a'a'' parallel, also auf $\beta a''$ senkrecht ist:

$$\begin{aligned}\alpha\beta^2 &= \beta d^2 + \alpha d^2 = \beta d^2 + a'a''^2 \\ &= \beta d^2 + b'b''^2 + c'c''^2 \\ &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.\end{aligned}$$

Die drei Seiten unseres Dreiecks sind also:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2} \\ b &= \sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2} \\ c &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.\end{aligned}$$

Da nun $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ist, so erhält man für

$$\frac{y - y'}{x - x'} = p, \quad \frac{y - y''}{x - x''} = p';$$

$$\frac{z - z'}{x - x'} = q, \quad \frac{z - z''}{x - x''} = q'.$$

$$\cos \alpha = \frac{1 + pp' + qq'}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)(1 + p'^2 + q'^2)}}$$

gefundenen, so erhält man, wenn man statt der Tangenten die Cotangenten einführt:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha \cot\frac{1}{2}\beta \cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma}$$
$$= \frac{\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta + \cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma}.$$

21. Seyen r, r' die Halbmesser des um und in das Dreieck beschriebenen Kreises. In Fig. 46. ist offenbar $\angle\delta = 2\gamma$, $\angle\alpha\beta\delta = 90^\circ - \gamma$. Also $c : r = \sin 2\gamma : \cos\gamma$.

$$r = \frac{c\cos\gamma}{\sin 2\gamma} = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

In Fig. 47. ist $\angle\delta\alpha\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha$, $\angle\delta\beta\varepsilon = \frac{1}{2}\beta$. Also $r'(\cot\frac{1}{2}\alpha + \cot\frac{1}{2}\beta) = c$, und folglich

$$r' = \frac{c\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

da $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Also

$$\frac{r'}{r} = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 \quad (18.)$$
$$\frac{r+r'}{r} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

Auch ist wie vorher:

$$r'(\cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = a,$$
$$r'(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = b,$$
$$r'(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta) = c;$$
$$2r'(\cot\tfrac{1}{2}\alpha + \cot\tfrac{1}{2}\beta + \cot\tfrac{1}{2}\gamma) = a+b+c,$$
$$\frac{r'(a+b+c)^2}{2\Delta} = a+b+c \quad (20.)$$
$$r' = \frac{2\Delta}{a+b+c}.$$

Aber $2\Delta = ab\sin\gamma$ (19.). Also

$$r = \frac{abc}{2ab\sin\gamma} = \frac{abc}{4\Delta}.$$
$$2rr' = \frac{abc}{a+b+c}.$$

Auch ist

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$
$$r' = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a+b+c}.$$

Sind in Fig. 48. δ, ε die Mittelpunkte des um und in das Dreieck beschriebenen Kreises; so ist, wenn $\delta\zeta$, $\varepsilon\vartheta$ auf $\alpha\beta$ senkrecht sind, und $\delta\eta$ mit $\alpha\beta$ parallel ist, weil $\angle\zeta\delta\alpha$, als halber Centralwinkel, $= \gamma$ ist, für $\delta\eta = \mathrm{x}$, $\varepsilon\eta = \mathrm{y}$:

$$x = r' \cot \tfrac{1}{2}\alpha - r \sin\gamma,\ y = r' - r\cos\gamma.$$

Also, für $\delta\varepsilon = \mathrm{d}$, $\mathrm{d}^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$

$$= r'^2(1 + \cot \tfrac{1}{2}\alpha^2) - 2rr'(\cos\gamma + \cot\tfrac{1}{2}\alpha \sin\gamma) + r^2$$

$$= \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} - \frac{2rr' \sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} + r^2$$

$$= \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} - \frac{2rr' \cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha} + r^2,$$

da $\gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = 90^0$ ist. Aber

$$\cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Also

$$d^2 = \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} + r^2 - 2rr' - \frac{4rr' \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

$$= \frac{r'^2}{\sin\frac{1}{2}\alpha^2} + r^2 - 2rr' - \frac{rr'}{\sin\frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{r'}{r\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

da nach dem Obigen

$$\frac{r'}{r} = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$d^2 = r^2 - 2rr',\ d = \sqrt{r(r - 2r')},\ r:d = d:r - 2r'.$$

Viele Sätze vom Dreieck, trigonometrisch bewiesen, findet man in folgenden Schriften: Ueber einige Eigenschaften des ebenen Dreiecks, von Crelle. Berlin. 1816. Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks von Feuerbach. Nürnberg. 1822. De triangulorum rectilineorum proprietatibus quibusdam nondum satis cognitis, auctore C. F. A. Jacobi. Numburgi. 1825. 4. Aufgaben über ebene Dreiecke, worin Summen oder Differenzen von Seiten oder Winkeln gegeben sind, von Kroll. Halle. 1826.

22. Um die Anwendung des trigonometrischen Calculs bei den Beweisen geometrischer Sätze zu zeigen, wählen wir den schon Thl. IV. S. 876. synthetisch bewiesenen, von Monge gefundenen Satz, daß die drei Durchschnittspunkte A, A', A'' (Fig. 49.) von je zwei der an drei Kreise gezogenen sechs äußern Tangententen in einer geraden

Linie liegen. Die Seiten und Winkel des Dreiecks $CC'C''$ seyen c, c', c'' und C, C', C'', die Halbmesser der gegebenen Kreise r, r', r''; die Winkel $AA'C$; $A''A'C$ aber φ, φ'. Es ist offenbar

$$A'C : A'C' = r : r',$$
$$A'C : A'C + c'' = r : r',$$
$$A'C : c'' = r : r' - r,$$
$$A'C = \frac{c''r}{r' - r}, \quad A'C' = \frac{c''r'}{r' - r},$$

und ganz eben so:

$$AC = \frac{c'r}{r'' - r}, \quad A''C' = \frac{cr'}{r' - r''}.$$

Könnte man nun zeigen, daß $\operatorname{tang}(\varphi + \varphi') = 0$ ist, so wäre der Satz bewiesen, da dann $\varphi + \varphi' = 180^0$. Da aber

$$\operatorname{tang}(\varphi + \varphi') = \frac{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi'}{1 - \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi'}$$

ist, so braucht man nur zu zeigen, daß $\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi' = 0$ ist. Dieser Zähler ist aber, wenn man für die Tangenten ihre trigonometrischen Ausdrücke durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel in den Dreiecken ACA', $A'C'A''$ setzt, =

$$c'r(r' - r)\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}\sin C$$
$$+ cr'(r' - r)\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}\sin C'$$
$$= c'r(r' - r)\left\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\right\} \cdot \frac{c\sin C'}{c'}$$
$$+ cr'(r' - r)\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}\sin C'$$

Also braucht man bloß zu zeigen, daß

$$c'r\left\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\right\} \cdot \frac{c}{c'}$$
$$+ cr'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\},$$

oder

$$cc'r\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}$$
$$+ cc'r'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\},$$

oder

$$r\{c''r'(r' - r'') - cr'(r' - r)\cos C'\}$$
$$+ r'\{c''r(r'' - r) - c'r(r' - r)\cos C\}$$

$= 0$ ist. Letztere Größe ist aber, wenn man das Resultat durch rr' dividirt, =

$$r'c'' - c(r' - r)\cos C' - rc'' - c'(r' - r)\cos C$$
$$= (r' - r)(c'' - c\cos C' - c'\cos C),$$

welches $= 0$ ist, wenn ein Factor dieses Productes $= 0$ ist. Nach [3] ist aber

$$c \cos C' + c' \cos C = c'',$$

also wirklich der zweite Factor $= 0$. Folglich ist $\tang(\varphi + \varphi') = 0$, $\varphi + \varphi' = 180^0$, da es offenbar nicht $= 0$ seyn kann. Also ist AA'A'' eine gerade Linie. Noch einen Beweis s. m. in dem Art. Transversale. (26.)

Sehr viele Anwendungen der Trigonometrie, auch auf Geodäsie, findet man in folgenden Werken: M. Hirsch geometr. Aufgaben. Erste Samml. T. Mayers praktische Geometrie. Lamberts Beiträge zur Mathem. Erste Samml. Pfleiderers Trigonometrie. Hindenburgs Archiv. Heft II. S. 318. Vorzüglich die drei Werke von Puissant: Recueil de div. prop. de Géom. resol. et demontr. par l'Analyse. Paris. 1809; Traité de Géodésie. 2 Tom. Paris. 1819. 4.; Traité de Topographie. Paris. 1820. 4. Auch Cagnol: Trigonométrie traduit par Chompré. Paris. 1808. 4. Schulz Taschenbuch der Meßkunst. 2 Thle.

23. Die Seiten und Winkel eines Dreiecks lassen sich auch aus den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' seiner Spitzen bestimmen. Für die Seite $\alpha\beta$ (Fig. 50.) seyen αa', βa'' auf der Ebene der xy; a'c', a''c'' auf der Axe der x, und a'b', a''b'' auf der Axe der y senkrecht; so ist, wenn αd mit a'a'' parallel, also auf βa'' senkrecht ist:

$$\begin{aligned} \alpha\beta^2 &= \beta d^2 + \alpha d^2 = \beta d^2 + a'a''^2 \\ &= \beta d^2 + b'b''^2 + c'c''^2 \\ &= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2. \end{aligned}$$

Die drei Seiten unseres Dreiecks sind also:

$$a = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}$$
$$b = \sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2}$$
$$c = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Da nun $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ist, so erhält man für

$$\frac{y - y'}{x - x'} = p, \; \frac{y - y''}{x - x''} = p';$$

$$\frac{z - z'}{x - x'} = q, \; \frac{z - z''}{x - x''} = q'.$$

$$\cos\alpha = \frac{1 + pp' + qq'}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)(1 + p'^2 + q'^2)}}$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(p-p')^2+(q-q')^2+(pq'-p'q)^2}{(1+p^2+q^2)(1+p'^2+q'^2)}}$$

$$\tang\alpha = \frac{\sqrt{(p-p')^2+(q-q')^2+(pq'-p'q)^2}}{1+pp'+qq'}.$$

Liegen die Coordinaten in einer Ebene; so ist $z = z' = z'' = 0$, $q = q' = 0$. Also

$$\cos\alpha = \frac{1+pp'}{\sqrt{(1+p^2)(1+p'^2)}},$$

$$\sin\alpha = \frac{p-p'}{\sqrt{(1+p^2)(1+p'^2)}},$$

$$\tang\alpha = \frac{p-p'}{1+pp'}.$$

Auflösung der Dreiecke in besondern Fällen.

24. Wir wollen nun noch einige besondere Fälle betrachten, welche bei der Berechnung der Dreiecke vorkommen können, indem wir Formeln aufsuchen, durch welche in gewissen Fällen theils die Rechnung erleichtert, theils ein genaueres Resultat gefunden werden kann. Da nämlich sowohl die Cosinus sehr kleiner, als auch die Sinus der dem Quadranten nahe kommenden Bögen, sich mit denselben nur sehr wenig ändern, so daß die Aenderung nicht immer schon in der siebenten Decimalstelle bemerkbar wird, bis wohin die gewöhnlichen Tafeln doch nur reichen; so wird das Bedürfniß fühlbar, im Besitze von Formeln zu seyn, welche in solchen Fällen eine genauere Rechnung gewähren.

25. Sollen in einem rechtwinkligen Dreieck b, c aus a, β bestimmt werden; so suche man, wenn β sehr nahe $= 90^0$ ist, zuerst $c = a\cos\beta$, und dann b aus der Formel $b = \sqrt{(a-c)(a+c)}$, oder aus der Formel $a - b = c\tang\frac{1}{2}\gamma = c\tang(45^0 - \frac{1}{2}\beta)$ [13.]. Ist β sehr klein, so findet man c mit mehr Genauigkeit aus der Formel

$$c = a(\cos\tfrac{1}{2}\beta^2 - \sin\tfrac{1}{2}\beta^2)$$
$$= a - 2a\sin\tfrac{1}{2}\beta^2 = a - a\sin\beta\ \tang\tfrac{1}{2}\beta.$$

Soll a aus b, β gefunden werden, so erhält man, wenn

β nahe $= 90^0$ ist, a genauer als nach der gewöhnlichen Formel auf folgende Art:

$$a = \frac{b}{\sin\beta} = b + b \, . \, \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \, . \, \frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$$
$$= b + b \cot\beta \tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta). \text{ (Goniometrie. 39.)}$$

Auch ist

$$a = b + b \tang\gamma \cot\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Soll aus den wenig von einander verschiedenen Seiten a, b der Winkel β gefunden werden, so kommt β dem rechten Winkel sehr nahe, und die Formel $\sin\beta = \frac{b}{a}$ giebt β nicht hinreichend genau. Nach [13] hat man

$$c \tang\tfrac{1}{2}\gamma = a - b, \quad c \cot\tfrac{1}{2}\gamma = a + b.$$

Also durch Division

$$\tang\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{a-b}{a+b}, \quad \tang\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

Folglich hat man

$$\tang(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

$$\sin(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{a-b}{2a}},$$

$$\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) = \sqrt{\frac{a+b}{2a}},$$

zur genauern Berechnung von β.

26. Mit Vortheil kann man an die Stelle der meisten so eben gefundenen Formeln Näherungsformeln setzen, wobei wir sogleich hier ein für alle Mal auf die in dem Artikel Cyclometrie entwickelten Reihen verweisen. Ist z. B. in der Formel $c = a\cos\beta$ der Winkel β sehr klein; so ist, wenn β in Theilen des Radius ausgedrückt ist:

$$c = a - \frac{a\beta^2}{1.2} + \frac{a\beta^4}{1\ldots4} - \ldots$$

Ist β in Secunden ausgedrückt, so erhellet leicht, daß, wenn $\varrho = 206264,8062471$ (S. Thl. I. S. 643.) die Anzahl der in einem, dem Halbmesser gleichen, Bogen enthaltenen Secunden bezeichnet:

$$c = a - \tfrac{1}{2} a \left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^2 + \tfrac{1}{24} a \left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^4 - \ldots$$

Die Reihe convergirt desto stärker, je kleiner β ist. Setzt

man $\frac{1}{24}\left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^4 = 0{,}000001$, so ergiebt sich leicht $\beta = 4^0\ 37''$, so daß man also, wenn β nicht $> 4^0$ ist, mit einem Fehler $< 0{,}000001 \,.\, a$, setzen kann:

$$c = a - \tfrac{1}{2}\, a \left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^2.$$

Ist γ sehr klein, also β nahe $= 90^0$, so ist in Theilen des Radius:

$$c = a \sin\gamma = a\gamma - \tfrac{1}{6}\, a\gamma^3 + \tfrac{1}{120}\, a\gamma^5 - \ldots,$$

oder, wenn γ in Secunden ausgedrückt ist:

$$c = a\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right) - \tfrac{1}{6}\, a\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)^3 + \tfrac{1}{120}\, a\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)^5 - \ldots$$

Für $\gamma = 1^0$ ist das zweite Glied noch nicht $= 0{,}000001 \,.\, a$, für $\gamma = 30'$ noch nicht $= 0{,}000001 \,.\, \frac{a}{8}$. Kann man also solche Fehler vernachlässigen, so ist hinreichend genau $c = a\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)$.

Da $\sin\beta = \frac{b}{a}$ ist, so ist in Theilen des Halbmessers:

$$\beta = \frac{b}{a} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \tfrac{3}{40}\left(\frac{b}{a}\right)^5 + \ldots.$$

und in Secunden:

$$\beta = \frac{b}{a}\,\varrho + \tfrac{1}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^3 .\,\varrho + \tfrac{3}{40}\left(\frac{b}{a}\right)^5 .\,\varrho + \ldots$$

Setzt man das zweite Glied $= 0'',001$, oder $= 0'',0001$; so erhält man $\frac{b}{a} = \frac{1}{325{,}15}$ oder $= \frac{1}{700{,}52}$. Ist also $\frac{b}{a}$ nicht $> \frac{1}{325}$ oder $\frac{1}{701}$, so giebt die Formel $\beta = \frac{b}{a}\,\varrho$ den Winkel β bis auf $0'',001$ oder $0'',0001$ genau.

Soll β aus a, c gefunden werden, so ist nach (25.)

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = \left(\frac{a - c}{a + c}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Also nach der Reihe für den Bogen durch die Tangente in Theilen des Halbmessers:

$$\tfrac{1}{2}\beta = \left(\frac{a - c}{a + c}\right)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{a - c}{a + c}\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a - c}{a + c}\right)^{\frac{5}{2}} - \ldots,$$

und in Secunden:

$$\beta = \left\{1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{a - c}{a + c}\right) + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a - c}{a + c}\right)^2 - \ldots\right\} .\, 2\varrho \sqrt{\frac{a - c}{a + c}}\,.$$

Sind a, c sehr wenig von einander verschieden, so kann man $\beta = 2\varrho\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^{\frac{1}{2}}$ setzen, und des zweiten Gliedes sich zur Schätzung des Fehlers bedienen.

27. Ist in einem schiefwinkligen Dreieck, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind, ein Winkel, z. B. β sehr klein; so kann man b mit Vortheil nach der Formel

$$b = \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}(\beta - \tfrac{1}{6}\beta^3 + \tfrac{1}{120}\beta^5 - \ldots)$$
$$= \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}\left\{\frac{\beta}{\varrho} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^3 + \tfrac{1}{120}\left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^5 - \ldots\right\}$$

berechnen. Sind beide Winkel β, γ sehr klein; so hat man

$$b = a\,.\,\frac{\beta - \frac{1}{6}\beta^3 + \frac{1}{120}\beta^5 - \ldots}{\beta+\gamma - \frac{1}{6}(\beta+\gamma)^3 + \frac{1}{120}(\beta+\gamma)^5 - \ldots}$$
$$= a\left\{\beta - \tfrac{1}{6}\beta^3 + \ldots\right\}.\left\{\frac{1}{\beta+\gamma} + \tfrac{1}{6}(\beta+\gamma) + \ldots\right\}$$
$$= \frac{a\beta}{\beta+\gamma}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\beta^2 + \ldots\right\}.\left\{1 + \tfrac{1}{6}(\beta+\gamma)^2 + \ldots\right\}$$
$$= \frac{a\beta}{\beta+\gamma}\left\{1 + \tfrac{1}{6}(2\beta\gamma + \gamma^2\right\},$$

mit Vernachlässigung der Glieder von der vierten Ordnung. Eben so ist

$$c = \frac{a\gamma}{\beta+\gamma}\left\{1 + \tfrac{1}{6}(2\beta\gamma + \beta^2)\right\},$$

oder, wenn β, γ in Secunden ausgedrückt sind:

$$b = \frac{a\beta}{\beta+\gamma}\left\{1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\beta+\gamma}{\varrho}\right)\frac{\gamma}{\varrho}\right\},$$
$$c = \frac{a\gamma}{\beta+\gamma}\left\{1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\gamma+\beta}{\varrho}\right)\frac{\beta}{\varrho}\right\},$$

woraus leicht folgt:

$$b + c - a = \frac{a\beta\gamma}{2\varrho^2}.$$

Kommt z. B. β dem rechten Winkel sehr nahe, so ist für $\frac{1}{2}\pi = \pi'$ der Bogen $\pi' - \beta = \beta'$ sehr klein, und folglich $b = \frac{a\cos\beta'}{\sin(\beta+\gamma)}$

$$= \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}\left\{1 - \tfrac{1}{2}\beta'^2 + \tfrac{1}{24}\beta'^4 + \ldots\right\}$$
$$= \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)}\left\{1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\varrho}\right)^2 + \tfrac{1}{24}\left(\frac{\beta'}{\varrho}\right)^4 - \ldots\right\}$$

Ist auch γ nahe $= 90^0$, so ist, für $\pi' - \gamma = \gamma'$,

$$b = \frac{a \cos \beta'}{\sin(\pi - \beta - \gamma)} = \frac{a \cos \beta'}{\sin(\pi' - \beta + \pi' - \gamma)}$$
$$= \frac{a \cos \beta'}{\sin(\beta' + \gamma')}.$$

Substituirt man nun für den Sinus und Cosinus wieder die trigonometrischen Reihen, so erhält man wie oben, mit Vernachlässigung der Glieder dritter Ordnung, wenn β', γ' in Secunden ausgedrückt sind:

$$b = \frac{a\varrho}{\beta' + \gamma'} \left\{ 1 - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\beta'}{\varrho} \left(\frac{\beta' - \gamma'}{\varrho} \right) + \tfrac{1}{6} \cdot \left(\frac{\gamma'}{\varrho} \right)^2 \right\}$$
$$c = \frac{a\varrho}{\beta' + \gamma'} \left\{ 1 - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\gamma'}{\varrho} \left(\frac{\gamma' - \beta'}{\varrho} \right) + \tfrac{1}{6} \left(\frac{\beta'}{\varrho} \right)^2 \right\}$$

Wäre β nahe $= 180^0$, so setze man $\sin \beta = \sin(\pi - \beta)$, wo $\pi - \beta$ sehr klein ist, und verfahre wie vorher.

28. Wenn in dem Falle, wo b, c, α gegeben sind, α sehr klein ist, also b, c wenig von einander verschieden sind; so bestimme man wie in (14.) ψ aus der Formel

$$\tang \psi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{bc}}{b - c}.$$

Dann ist

$$a = \frac{b - c}{\cos \psi}.$$

Diese Formel kann man aber auch so darstellen:

$$a = (b - c) \left\{ 1 + \frac{1 - \cos \psi}{\cos \psi} \right\}$$
$$= (b - c)(1 + \tang \psi \tang \tfrac{1}{2} \psi)$$
$$= b - c + 2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha \tang \tfrac{1}{2} \psi \sqrt{bc}.$$

Ist aber α sehr stumpf, also a von b + c wenig verschieden; so bestimme man wie a. a. O. ψ' aus der Formel

$$\sin \psi' = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \alpha \sqrt{bc}}{b + c}.$$

Dann ist

$$a = (b + c) \cos \psi',$$

oder

$$a = (b + c)(1 + \cos \psi' - 1)$$
$$= b + c - (b + c)(1 - \cos \psi')$$
$$= b + c - (b + c) \sin \psi' \tang \tfrac{1}{2} \psi'$$
$$= b + c - 2 \cos \tfrac{1}{2} \alpha \tang \tfrac{1}{2} \psi' \sqrt{bc}.$$

Hat man nun a, so erhält man β, γ aus den in (16) zuletzt bewiesenen Formeln.

Da α sehr stumpf ist, so ist für $\alpha = 180^0 - \Theta$, Θ sehr klein. Also nach [2]:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \Theta$$
$$= b^2 + c^2 + 2bc(1 - \tfrac{1}{2}\Theta^2 + \tfrac{1}{24}\Theta^4 - ..),$$

woraus mit Vernachlässigung der vierten Potenzen von Θ:

$$a^2 = (b + c)^2 - bc\Theta^2,$$
$$a = b + c - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{bc\Theta^2}{(b + c)\varrho^2},$$

wenn Θ in Secunden gegeben ist.

Ferner ist nach (14.)

$$\text{tang}\,\beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha} = \frac{b \sin \Theta}{c + b \cos \Theta}$$
$$= \frac{b(\Theta - \frac{1}{6}\Theta^3)}{c + b(1 - \frac{1}{2}\Theta^2)} = \frac{b\Theta}{b + c} \cdot \frac{1 - \frac{1}{6}\Theta^2}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b + c}\right)\Theta^2}$$
$$= \frac{b\Theta}{b + c}\left\{1 + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{(2b - c)\Theta^2}{b + c}\right\}.$$

Also nach der Reihe für den Winkel durch die Tangente:

$$\beta = \frac{b\Theta}{b + c}\left\{1 + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{(b - c)c\Theta^2}{(b + c)^2}\right\},$$

immer mit Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung. Ist also α sehr stumpf, und Θ in Secunden gegeben, so ist:

$$a = b + c - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{bc}{b + c}\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2,$$
$$\beta = \frac{b\Theta}{b + c}\left\{1 + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{(b - c)c}{(b + c)^2} \cdot \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2\right\},$$
$$\gamma = \frac{c\Theta}{b + c}\left\{1 - \tfrac{1}{6} \cdot \frac{(b - c)b}{(b + c)^2} \cdot \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)^2\right\}.$$

29. Durch Reihen kann man den vorigen Fall auch so auflösen:

$$\text{tang}\,\beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \quad (14.)$$

Also, wenn man für die Sinus und Cosinus die imaginären Exponentialausdrücke Thl. I. S. 877. setzt, nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{e^{2\beta\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2\beta\sqrt{-1}}+1)\sqrt{-1}},$$

$$\frac{b\sin\alpha}{c-b\cos\alpha} = \frac{b\,(e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}})}{\{2c - b\,(e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}})\}\sqrt{-1}}.$$

Diese Ausdrücke einander gleich gesetzt, und übers Kreutz multiplicirt:

$$e^{2\beta\sqrt{-1}} = \frac{c - b e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{c - b e^{\alpha\sqrt{-1}}}.$$

Folglich nach der Reihe Thl. III. S. 492.:

$$2\beta\sqrt{-1} = \mathrm{logn}(c - b e^{-\alpha\sqrt{-1}}) - \mathrm{logn}(c - b e^{\alpha\sqrt{-1}})$$
$$= \mathrm{logn}\left(1 - \frac{b}{c}e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right) - \mathrm{logn}\left(1 - \frac{b}{c}e^{\alpha\sqrt{-1}}\right)$$

$$\beta = \frac{b}{c}\cdot\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$
$$+ \frac{b^2}{2c^2}\cdot\frac{e^{2\alpha\sqrt{-1}} - e^{-2\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$
$$+ \frac{b^3}{3c^3}\cdot\frac{e^{3\alpha\sqrt{-1}} - e^{-3\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \ldots.$$

d. i.

$$\beta = \frac{b}{c}\sin\alpha + \frac{b^2}{2c^2}\sin 2\alpha + \frac{b^3}{3c^3}\sin 3\alpha + \ldots,$$

und eben so:

$$\gamma = \frac{c}{b}\sin\alpha + \frac{c^2}{2b^2}\sin 2\alpha + \frac{c^3}{3b^3}\sin 3\alpha + \ldots$$

Multiplicirt man diese beiden Reihen mit ρ, so erhält man β, γ in Secunden. Nach Puissant (Traité de Géodésie. I. p. 104.) sind diese Reihen zuerst von Delambre gefunden. M. s. auch Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, par Delambre. Paris, an 7. p. 111. Eine derselben convergirt immer.

Die Ausziehung der Quadratwurzel nach dem binomischen Lehrsatze giebt mittelst [2]:

$$a = b - c\cos\alpha + \frac{c^2}{2b}\sin\alpha^2 + \frac{c^3}{2b^2}\sin\alpha^2\cos\alpha + \ldots$$

eine nach keinem leicht in die Augen fallenden Gesetze fortschreitende Reihe. Dagegen ist

$$a^2 = b^2 - 2bc \cdot \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2} + c^2$$
$$= b(b - ce^{\alpha\sqrt{-1}}) + c^2 - bce^{-\alpha\sqrt{-1}}$$
$$= b(b - ce^{\alpha\sqrt{-1}}) + c^2 \cdot e^{\alpha\sqrt{-1}} \cdot e^{-\alpha\sqrt{-1}} - bce^{-\alpha\sqrt{-1}}$$
$$= (b - ce^{\alpha\sqrt{-1}})(b - ce^{-\alpha\sqrt{-1}}).$$
$$2 \operatorname{logn} a = 2 \operatorname{logn} b + \operatorname{logn}\left(1 - \frac{c}{b} e^{\alpha\sqrt{-1}}\right)$$
$$+ \operatorname{logn}\left(1 - \frac{c}{b} e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right)$$

Also, wenn man die Logarithmen nach der Reihe Thl. III. S. 492. entwickelt:

$$\operatorname{logn} a = \operatorname{logn} b - \frac{c}{b} \cdot \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2}$$
$$- \frac{c^2}{2b^2} \cdot \frac{e^{2\alpha\sqrt{-1}} + e^{-2\alpha\sqrt{-1}}}{2}$$
$$- \frac{c^3}{3b^3} \cdot \frac{e^{3\alpha\sqrt{-1}} + e^{-3\alpha\sqrt{-1}}}{2}$$
$$- \ldots\ldots\ldots$$

$$\log a = \log b - M \left\{\frac{c}{b} \cos\alpha + \frac{c^2}{2b^2} \cos 2\alpha + \frac{c^3}{3b^3} \cos 3\alpha + \ldots\right\},$$

und eben so:

$$\log a = \log c - M \left\{\frac{b}{c} \cos\alpha + \frac{b^2}{2c^2} \cos 2\alpha + \frac{b^3}{3c^3} \cos 3\alpha + \ldots\right\}.$$

Die eine dieser beiden Reihen convergirt immer. Puissant a. a. O. p. 105. eignet sie Legendre zu. M. s. auch dessen Élém. de Géom. p. 420.

30. Soll γ nach der Formel $\sin\gamma = \frac{c \sin\beta}{b}$ bestimmt werden; so ist

$$\sin\gamma = \frac{c}{b} (\beta - \tfrac{1}{6}\beta^3 + \tfrac{1}{120}\beta^5 - \ldots).$$

Also, wenn β sehr klein ist:

$$\sin\gamma = \frac{c}{b} (\beta - \tfrac{1}{6}\beta^3).$$

Folglich nach der Reihe für den Bogen durch den Sinus, wenn man bei dem zweiten Gliede stehen bleibt:

$$\gamma = \frac{c}{b} \beta \left\{1 - \frac{(b^2 - c^2)\beta^2}{6b^2}\right\}$$
$$= \frac{c}{b} \beta \left\{1 - \frac{b^2 - c^2}{6b^2} \cdot \left(\frac{\beta}{\varrho}\right)^2\right\}.$$

Für $c < b$ ist $\gamma < 90^0$, und folglich die Aufgabe völlig bestimmt. Ist β nahe $= 180^0$, so setze man $\pi - \beta$ statt β, welches verstattet ist, weil $\sin\beta = \sin(\pi - \beta)$. Für $c > b$ giebt es zwei Werthe von γ. Hat man mittelst obiger Formeln einen gefunden, so ist der andere $= 180^0 - \gamma$. Um a nach der Formel

$$a = \frac{b \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{b \sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

zu finden, bediene man sich der Methode in (27.).

Ist b nahe $= c\sin\beta$, so ist $\sin\gamma$ nahe $= 1$, γ nahe $= 90^0$, und wird also durch die Formeln $\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}$ nicht genau genug gefunden. Man kann in diesem Falle φ aus der Formel

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{c\sin\beta}{b}$$

berechnen; so ist

$$\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\gamma) = \sqrt{\frac{1 - \sin\gamma}{1 + \sin\gamma}} \text{ (Thl. II. S. 522.)}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tang}\varphi}{1 + \operatorname{tang}\varphi}} = \sqrt{\operatorname{tang}(45^0 - \varphi)},$$

(Thl. II. S. 523.), woraus man $45^0 - \frac{1}{2}\gamma$, also auch γ, hinlänglich genau findet.

Berechnung der Winkel aus den Seiten ohne trigonometrische Tafeln.

31. Jedes schiefwinklige Dreieck, dessen Seiten gegeben sind, läßt sich immer in zwei rechtwinklige zerlegen, deren Seiten ebenfalls gegeben sind. Ist nämlich $\gamma\delta = x$, $\alpha\delta = y$, $\beta\delta = z$ (Fig. 51.); so erhält man aus den Gleichungen:

$$x^2 = b^2 - y^2 = a^2 - (c - y)^2 = a^2 - z^2 = b^2 - (c - z)^2$$

für $a + b + c = s$ leicht:

$$x = \frac{1}{2c}\sqrt{s(s - 2a)(s - 2b)(s - 2c)},$$

$$y = \frac{s(s - 2a)}{2c} - b,\ z = \frac{s(s - 2b)}{2c} - a,$$

so daß unsere Aufgabe sich also auf die Berechnung der

Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks aus seinen Seiten reducirt.

32. Wenn $\tang\varphi = x$ gesetzt wird; so ist (Umformung der Reihen. 16.)

$$\varphi = \frac{x}{1+x^2}\left\{1 + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$= \sin\varphi\,\cos\varphi\left(1 + \tfrac{2}{3}\sin\varphi^2 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\sin\varphi^4 + \ldots\right).$$

Entwickelt man diese Reihe in einen Kettenbruch (M. s. diesen Artikel. 60.); so erhält man:

$$\varphi = \cfrac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{1 - \cfrac{\frac{1\,.\,2}{1\,.\,3}\sin\varphi^2}{1 - \cfrac{\frac{1\,.\,2}{3\,.\,5}\sin\varphi^2}{1 - \cfrac{\frac{3\,.\,4}{5\,.\,7}\sin\varphi^2}{1 - \cfrac{\frac{3\,.\,4}{7\,.\,9}\sin\varphi^2}{1 - \ldots\ldots}}}}}$$

Der zweite Näherungswerth giebt:

$$\varphi = \frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{1 - \frac{2}{3}\sin\varphi^2} = \frac{3\sin 2\varphi}{2(2+\cos 2\varphi)},$$

eine schon von Willebrord Snellius gefundene Formel. S. Thl. I. S. 650. Da nun in einem Dreiecke, wo $\alpha = 90^0$ ist, $\sin\beta = \frac{b}{a}$, $\cos\beta = \frac{c}{a}$ ist; so giebt diese Formel für $2\varphi = \beta$:

$$\beta = \frac{3b}{2a+c},$$

in Theilen des Halbmessers; und in Graden nach Thl. I. S. 643.:

$$\beta = \frac{3b}{2a+c}\,.\,57^0{,}2957.$$

Zieht man

$$\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{1-\frac{2}{3}\sin\varphi^2} = \sin\varphi\,\cos\varphi\left(1 + \tfrac{2}{3}\sin\varphi^2 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,6}\sin\varphi^4 + \ldots\right)$$

von der obigen Reihe für φ ab; so erhält man leicht:

$$\varphi = \frac{3\sin 2\varphi}{2(2+\cos 2\varphi)} + \tfrac{4}{45}\varphi^5 + \ldots,$$

$$\beta = \frac{3b}{2a+c} + \tfrac{1}{180}\beta^5 + \ldots,$$

und der Fehler bei Snellius Regel beträgt also nahe $+\frac{1}{180}\beta^5$, in Theilen des Halbmessers. Nach Kästners G. d. M. I. S. 415. kannte auch schon der Kardinal Nicolaus de Cusa diese Regel. Snellius Beweis ist nach Huygens in der Schrift de circuli magnitudine inventa. Lugd. 1654. 4., wo er selbst einen Beweis giebt, ungenügend. In Lamberts Beiträgen. II. Abh. IX. §. 11. ist die Formel aus einem allgemeinern Satze abgeleitet. Wiederholt ist sie in Tables des sinus, tangentes, etc., par A. Girard. A la Haye. 1626., wo aber Girard noch eine andere Formel mittheilt, welche den Winkel zu groß giebt. Es ist nämlich (Thl. I. S. 618.)

$$\beta = \sin\beta + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin\beta^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\sin\beta^5}{5} + \ldots,$$

$$\frac{\tang\beta + 2\sin\beta}{3} = \frac{\sin\beta(1 - \sin\beta^2)^{-\frac{1}{2}} + 2\sin\beta}{3}$$

$$= \sin\beta + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sin\beta^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\sin\beta^5}{3} + \ldots,$$

woraus leicht durch Subtraction:

$$\beta = \frac{\tang\beta + 2\sin\beta}{3} - \tfrac{1}{20}\beta^5 - \ldots$$

Also näherungsweise:

$$\beta = \frac{\tang\beta + 2\sin\beta}{3} = \frac{b(a + 2c)}{3ac}$$

in Theilen des Radius; und in Graden:

$$\beta = \frac{b(a + 2c)}{3ac} \cdot 57^0{,}2957.$$

Der Fehler ist ungefähr $= -\frac{1}{20}\beta^5$, d. i. etwa neunmal so groß, als bei Snellius Formel, und negativ. Soll bei Snellius Formel der Fehler noch keine Minute betragen; so muß $\frac{1}{180}\beta^5 < \frac{\pi}{180 . 60}$ seyn; woraus man $\beta < 31^0\ 46'$ erhält, und da der Fehler für ein halb so großes β, 32mal kleiner wird, so folgt, daß derselbe für $\beta < 15^0\ 53'$ noch nicht $2''$ ausmacht. Nimmt man aus beiden Formeln das Mittel, so giebt die Formel, welche man erhält, den Winkel ebenfalls zu groß. Noch eine Formel s. m. in Lamberts Zusätzen zu den log. und trig. Tafeln. S. 151.

33. Eine Formel, welche bloß die Kenntniß der beiden Katheten erfordert, hat Olbers in der monatl. Correspondenz. Dec. 1807. Febr. 1808. gegeben. Es ist nämlich

$$\varphi = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1 - \frac{2}{3}\sin\varphi^2} + \tfrac{4}{45}\varphi^5 + \ldots$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 - \frac{2}{3}\sin\varphi^2} + \tfrac{4}{45}\varphi^5 + \ldots$$

$$= \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\frac{1}{3}\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2} + \tfrac{4}{45}\varphi^5 + \ldots$$

$$= \frac{3\,\mathrm{tang}\,\varphi}{3 + \mathrm{tang}\,\varphi^2} + \tfrac{4}{45}\varphi^5 + \ldots$$

$$\beta = \frac{3bc}{b^2 + 3c^2} + \tfrac{4}{45}\beta^5 + \ldots$$

Folglich näherungsweise:

$$\beta = \frac{3bc}{b^2 + 3c^2}$$

in Theilen des Radius; und in Graden:

$$\beta = \frac{3bc}{b^2 + 3c^2} \cdot 57^0{,}2957.$$

Der Fehler ist $= \frac{4}{45}\beta^5 = \frac{16}{180}\beta^5$, also ungefähr 16mal so groß wie bei Snellius Formel. Man erhält die Formel auch aus dem Kettenbruche für Arc tang x in Thl. IV. S. 97. Die Näherung wird weiter getrieben, wenn man nicht schon die fünften Potenzen von β vernachlässigt.

34. M. s. über den hier behandelten Gegenstand auch Navigation new modell'd. London. 1715. von Henry Wilson. Der Rec. in den Act. Erud. 1716. p. 165. sagt, das Buch sey wegen dieser Regeln geschrieben. Auch Gietermaker t'vergulde Licht der Zeewart. Amst. 1693. 4. Kästners geom. Abh. I. S. 157. ff.; einen Aufsatz von Voll in der Isis von Oken. Fünftes Heft. 1826. S. 493., und besonders Mollweide Auflösung ebener Dreiecke ohne Hülfe der trig. Tafeln, vorzüglich zum Gebrauche der Schiffer. Monatl. Corresp. Jul. 1807. S. 18. Lagny in den Mém. de Paris. 1725. giebt die Winkel in unendlichen Reihen. Gebrauchen wir die transformirte Reihe in (32); so ist für

$$x = \mathrm{tang}\,\beta = \frac{b}{c}, \quad \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{b^2}{b^2 + c^2},$$

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{bc}{b^2+c^2}:$$

$$\beta' = \frac{bc}{b^2+c^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\left(\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)^2 + \ldots\right\},$$

eine stärker convergirende Reihe als die von Lagny gegebene.

Rationale Dreiecke sind solche rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten alle drei rational sind. Das Auffinden solcher Dreiecke gründet sich auf die Bemerkung, daß, wenn $\tang \frac{1}{2}\beta$ rational ist, immer auch $\sin\beta$, $\cos\beta$ rational sind, da für $\tang\frac{1}{2}\beta = \frac{m}{n}$:

$$\sin\beta = \frac{2mn}{m^2+n^2},\ \cos\beta = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}.$$

Die Sekante ist ebenfalls rational:

$$\sec\beta = \frac{m^2+n^2}{n^2-m^2} = \frac{1}{\cos\beta}.$$

Nimmt man nun für m und n irgend zwei ganze Zahlen an; so läßt sich β aus der Gleichung $\tang\frac{1}{2}\beta = \frac{m}{n}$ bestimmen, da die Tangente jeden Werth haben kann, nur muß immer $m < n$ seyn, damit $\frac{1}{2}\beta < 45^0$, $\beta < 90^0$ ist. Setzt man nun die Hypotenuse $a = m^2 + n^2$; so sind die Catheten $= a\sin\beta = 2mn$, und $= a\cos\beta = n^2 - m^2$ ebenfalls in ganzen Zahlen ausgedrückt. Die, Rationale Trigonometrie überschriebene, Tafel in Schulze's Samml. logarithmischer u. a. Tafeln. II. Berlin. 1778. S. 308. dient zur Erleichterung obiger Rechnung. Kästners geom. Abh. I. S. 172. Anal. endl. Gr. S. 112.

Differentialformeln für ebene Dreiecke.

35. Sind die zur Bestimmung eines Dreiecks gemessenen Stücke nicht ganz ohne Fehler; so ist es nöthig, den Einfluß beurtheilen zu können, welchen diese Fehler auf die berechneten Stücke haben. Es erhellet leicht, daß die Entwickelung der Gleichungen zwischen den einzelnen Fehlern eine Aufgabe der Differenzenrechnung ist. Vorausgesetzt aber, daß die Fehler nur sehr klein sind, wie es bei

guten Beobachtungen immer der Fall ist, können Differentiale die Stelle der Differenzen vertreten, und die Untersuchung verfällt also der Rechnung mit partiellen Differentialen, da die Fehler der gemessenen Stücke offenbar als ganz unabhängig von einander zu betrachten sind.

36. Durch partielle Differentiation der Formeln

$$a^2 = b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2,$$

und $a\sin\beta = b\sin\alpha$, und durch Vertauschung der Buchstaben erhält man leicht:

$$a\partial a = (b - c\cos\alpha)\partial b + (c - b\cos\alpha)\partial c + bc\sin\alpha\,\partial\alpha$$
$$= a\cos\gamma\,\partial b + a\cos\beta\,\partial c + bc\sin\alpha\,\partial\alpha$$
$$b\partial b = (a - c\cos\beta)\partial a + (c - a\cos\beta)\partial c + ac\sin\beta\,\partial\beta$$
$$= b\cos\gamma\,\partial a + b\cos\alpha\,\partial c + ac\sin\beta\,\partial\beta$$
$$c\partial c = (a - b\cos\gamma)\partial a + (b - a\cos\gamma)\partial b + ab\sin\gamma\,\partial\gamma$$
$$= c\cos\beta\,\partial a + c\cos\alpha\,\partial b + ab\sin\gamma\,\partial\gamma;$$
$$\sin\beta\,\partial a - \sin\alpha\,\partial b = b\cos\alpha\,\partial\alpha - a\cos\beta\,\partial\beta$$
$$\sin\gamma\,\partial b - \sin\beta\,\partial c = c\cos\beta\,\partial\beta - b\cos\gamma\,\partial\gamma$$
$$\sin\alpha\,\partial c - \sin\gamma\,\partial a = a\cos\gamma\,\partial\gamma - c\cos\alpha\,\partial\alpha.$$

Nimmt man hierzu noch die aus $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ sich leicht ergebende Gleichung

$$\partial\alpha + \partial\beta + \partial\gamma = 0;$$

so hat man die Fundamentalformeln der Fehlerrechnung der ebenen Trigonometrie. Die einzelnen Fälle sind folgende.

37. Gegeben a, β, γ.
Gesucht α, b, c.

$$\partial\alpha = -\partial\beta - \partial\gamma$$
$$\partial b = \frac{\sin\beta\,\partial a - b\cos\alpha\,\partial\alpha + a\cos\beta\,\partial\beta}{\sin\alpha}$$
$$\partial c = \frac{\sin\gamma\,\partial a - c\cos\alpha\,\partial\alpha + a\cos\gamma\,\partial\gamma}{\sin\alpha},$$

mittelst welcher Formeln sich zuerst $\partial\alpha$ und dann ∂b, ∂c berechnen lassen. Man könnte auch $-\partial\beta - \partial\gamma$ für $\partial\alpha$ in die Ausdrücke für ∂b, ∂c setzen.

Da $b\cos\alpha + a\cos\beta = c$ [13]; so erhält man für

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta\sin(\beta+\gamma)} = M,\ \cot(\beta+\gamma) = N$$

leicht:

$$\partial b = \frac{\sin\beta\,\partial a + c\,\partial\beta + b\cos\alpha\,\partial\gamma}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{b\,\partial a}{a} + bM\,\partial\beta - bN\,\partial\gamma$$

$$\frac{\partial b}{b} = \frac{\partial a}{a} + M\,\partial\beta - N\,\partial\gamma;$$

und ganz eben so für

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma\,\sin(\beta+\gamma)} = M',\ \cot(\beta+\gamma) = N:$$

$$\frac{\partial c}{c} = \frac{\partial a}{a} + M'\partial\gamma - N\,\partial\beta.$$

M. s. Mayers prakt. Geom. II. S. 447. Durch diese Formeln wird das Verhältniß von ∂b, ∂c zu b, c bestimmt. Ein Exempel s. m. a. a. O. S. 453.

38. Gegeben b, c, α.

Gesucht β, γ, a.

$$\partial a = \frac{a\cos\gamma\,\partial b + a\cos\beta\,\partial c + bc\sin\alpha\,\partial\alpha}{a}$$

$$= \frac{(b - c\cos\alpha)\,\partial b + (c - b\cos\alpha)\,\partial c + bc\sin\alpha\,\partial\alpha}{\sqrt{b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2}}$$

$$\partial\beta = \frac{b\,\partial b - b\cos\gamma\,\partial a - b\cos\alpha\,\partial c}{ac\sin\beta}$$

$$\partial\gamma = \frac{c\,\partial c - c\cos\beta\,\partial a - c\cos\alpha\,\partial b}{ab\sin\gamma}.$$

Der erste Ausdruck für ∂a giebt auch

$$\frac{\partial a}{a} = \cos\gamma\,.\,\frac{b}{a}\,.\,\frac{\partial b}{b} + \cos\beta\,.\,\frac{c}{a}\,.\,\frac{\partial c}{c} + \frac{bc}{aa}\sin\alpha\,\partial\alpha$$

d. i. für

$$P = \frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha},\ Q = \frac{\sin\gamma\cos\beta}{\sin\alpha},\ R = \frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin\alpha}:$$

$$\frac{\partial a}{a} = P\frac{\partial b}{b} + Q\frac{\partial c}{c} + R\,\partial\alpha.$$

39. Gegeben b, c, β.

Gesucht α, γ, a.

$$\partial a = \frac{b\,\partial b - b\cos\alpha\,\partial c - ac\sin\beta\,\partial\beta}{b\cos\gamma}$$

$$\partial\alpha = \frac{\sin\beta\,\partial a - \sin\alpha\,\partial b + a\cos\beta\,\partial\beta}{b\cos\alpha}$$

$$\partial\gamma = \frac{\sin\beta\,\partial c - \sin\gamma\,\partial b + c\cos\beta\,\partial\beta}{b\cos\gamma}.$$

Die letzte Formel giebt

$$b\cos\gamma\,\partial\gamma + \sin\gamma\,\partial b = c\cos\beta\,\partial\beta + \sin\beta\,\partial c,$$

$$b\cot\gamma\,\partial\gamma + \partial b = \frac{c\cos\beta}{\sin\gamma}\,\partial\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\,\partial c,$$

$$\cot\gamma\,\partial\gamma + \frac{\partial b}{b} = \frac{c\cos\beta}{b\sin\gamma}\,\partial\beta + \frac{\sin\beta}{b\sin\gamma}\,\partial c,$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\,\partial\beta + \frac{b}{bc}\,\partial c = \cot\beta\,\partial\beta + \frac{\partial c}{c}.$$

Durch Substitution des Werthes von ∂a in den Ausdruck für $\partial\alpha$ würde man einen von ∂a unabhängigen Ausdruck für $\partial\alpha$ erhalten können.

40. Gegeben a, b, c.

Gesucht α, β, γ.

Da

$$\partial\alpha = \frac{a\,\partial a - a\cos\gamma\,\partial b - a\cos\beta\,\partial c}{bc\sin\alpha}$$

ist, so ergiebt sich durch Substitution der aus dem Obigen bekannten Ausdrücke für $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ durch die drei Seiten, für $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, zugleich mit Vertauschung der Buchstaben, leicht:

$$\partial\alpha = \frac{2abc\,\partial a - (a^2+b^2-c^2)c\,\partial b - (a^2+c^2-b^2)b\,\partial c}{2bc\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$\partial\beta = \frac{2abc\,\partial b - (a^2+b^2-c^2)c\,\partial a - (b^2+c^2-a^2)a\,\partial c}{2ac\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$\partial\gamma = \frac{2abc\,\partial c - (a^2+c^2-b^2)b\,\partial a - (b^2+c^2-a^2)a\,\partial b}{2ab\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

41. Wichtig sind auch die Gleichungen zwischen den Veränderungen der Stücke eines Dreiecks, wenn zwei Stücke als unveränderlich angenommen werden. Man kann aber als unveränderlich annehmen:

a. Eine Seite und einen anliegenden Winkel.

b. Eine Seite und den gegenüberstehenden Winkel.

c. Zwei Seiten.

d. Zwei Winkel.

42. Unveränderlich a, β } (41. a.)
Veränderlich b, c, α, γ }

Nach der Annahme ist $\partial a = \partial\beta = 0$. Da nun immer $\partial\alpha + \partial\beta + \partial\gamma = 0$ ist, so ist $\partial\alpha + \partial\gamma = 0$, $\partial\alpha = -\partial\gamma$.

Setzt man nun auch in den Gleichungen in (36.) $\partial a = \partial\beta = o$; so erhält man

$$b\,\partial b = b\cos\alpha\,\partial c,$$
$$o = \sin\alpha\,\partial b + b\cos\alpha\,\partial\alpha.$$

Man hat also nach einigen leichten Reductionen folgende Gleichungen:

$$\partial\alpha = -\,\partial\gamma,$$
$$\partial b = \cos\alpha\,\partial c,$$
$$b\,\partial\alpha = -\,\tang\alpha\,\partial b,$$

zwischen ∂b, ∂c, $\partial\alpha$, $\partial\gamma$, aus denen sich, wenn irgend eine dieser Größen als bekannt angenommen wird, die übrigen berechnen lassen.

43. Unveränderlich a, α. Veränderlich b, c, β, γ. (41. b.)

$$\partial a = \partial\alpha = o, \quad \partial\beta + \partial\gamma = o.$$

Aus den Gleichungen in (36.):

$$o = a\cos\gamma\,\partial b + a\cos\beta\,\partial c,$$
$$-\,\sin\alpha\,\partial b = -\,a\cos\beta\,\partial\beta.$$

Folglich nach gehöriger Reduction:

$$\partial\beta = -\,\partial\gamma,$$
$$\cos\beta\,\partial c = -\,\cos\gamma\,\partial b,$$
$$a\cos\beta\,\partial\beta = \sin\alpha\,\partial b.$$

Die letzte Gleichung kann man auch so darstellen:

$$a\sin\beta\,\partial\beta = \sin\alpha\,.\,\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\,\partial b = \sin\alpha\,\tang\beta\,\partial b.$$

Aber $a\sin\beta = b\sin\alpha$. Also

$$b\,\partial\beta = \tang\beta\,\partial b.$$

44. Unveränderlich a, b. Veränderlich α, β, γ, c (41. c.)

Nach der Annahme ist $\partial a = \partial b = o$. Also nach (36.):

$$\partial\alpha + \partial\beta + \partial\gamma = o,$$
$$o = a\cos\beta\,\partial c + bc\sin\alpha\,\partial\alpha,$$
$$o = b\cos\alpha\,\partial c + ac\sin\beta\,\partial\beta,$$
$$c\,\partial c = ab\sin\gamma\,\partial\gamma,$$
$$o = b\cos\alpha\,\partial\alpha - a\cos\beta\,\partial\beta;$$

oder

$$-\,bc\sin\alpha\,\partial\alpha = a\cos\beta\,\partial c,$$
$$-\,ac\sin\beta\,\partial\beta = b\cos\alpha\,\partial c,$$
$$c\,\partial c = ab\sin\gamma\,\partial\gamma,$$
$$a\cos\beta\,\partial\beta = b\cos\alpha\,\partial\alpha.$$

Diese Gleichungen lassen sich aber abkürzen. Es ist nämlich

$$-bc\sin\alpha\sin\beta\,\partial\alpha = a\sin\beta\cos\beta\,\partial c,$$
$$-bc\sin\alpha\,\mathrm{tang}\beta\,\partial\alpha = a\sin\beta\,\partial c,$$
$$b\sin\alpha = a\sin\beta\ [4],$$
$$-c\,\mathrm{tang}\beta\,\partial\alpha = \partial c.$$

Eben so $-c\,\mathrm{tang}\,\alpha\partial\beta = \partial c$. Ferner ist $\partial c = a.\frac{b\sin\gamma}{c}.\partial\gamma = b.\frac{a\sin\gamma}{c}.\partial\gamma = a\sin\beta\partial\gamma = b\sin\alpha\partial\gamma$; und endlich:

$$a\sin\alpha\sin\beta\cos\beta\,\partial\beta = b\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\,\partial\alpha,$$
$$a\sin\beta\,\mathrm{tang}\alpha\,\partial\beta = b\sin\alpha\,\mathrm{tang}\beta\,\partial\alpha,$$
$$a\sin\beta = b\sin\alpha,$$
$$\mathrm{tang}\alpha\,\partial\beta = \mathrm{tang}\beta\,\partial\alpha.$$

Also hat man folgende Gleichungen:

$$\partial\alpha + \partial\beta + \partial\gamma = 0,$$
$$-c\,\mathrm{tang}\beta\,\partial\alpha = \partial c,$$
$$-c\,\mathrm{tang}\alpha\,\partial\beta = \partial c,$$
$$\partial c = a\sin\beta\,\partial\gamma = b\sin\alpha\,\partial\gamma,$$
$$\mathrm{tang}\alpha\,\partial\beta = \mathrm{tang}\beta\,\partial\alpha.$$

45. Unveränderlich α, β. Veränderlich a, b, c. } (41. d.)

Da offenbar auch γ unveränderlich ist, so ist auch $\partial\gamma = 0$, und man hat folglich nach (36.):

$$\partial a = \cos\gamma\partial b + \cos\beta\partial c,$$
$$\partial b = \cos\gamma\partial a + \cos\alpha\partial c,$$
$$\partial c = \cos\beta\partial a + \cos\alpha\partial b.$$
$$\sin\beta\partial a - \sin\alpha\partial b = 0,$$
$$\sin\gamma\partial b - \sin\beta\partial c = 0,$$
$$\sin\alpha\partial c - \sin\gamma\partial a = 0.$$
$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b},$$
$$\frac{\partial b}{\partial c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c},$$
$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a};$$

oder $b\partial a = a\partial b$, $c\partial b = b\partial c$, $a\partial c = c\partial a$.

46. Zu den bei Mayer a. a. O. S. 491. 492. angeführten Schriften, worin dieser Gegenstand theils synthetisch, theils analytisch abgehandelt ist, füge ich nur noch: Aestimatio errorum in mixta mathesi per variatio-

nes partium trianguli plani et sphaerici. Lemgoviae. 1768. Camerer theoria aestimationis error. in triang. planis et sphaericis. Tub. 1783. 4. und Astron. Jahrb. Suppl. I. S. 149. Cagnoli Trigonométrie par Chompré. Paris. 1808. 4. Chap. XII.

II. Sphärische Trigonometrie.

Entwickelung der Grundformeln.

47. Sey $\alpha\beta\gamma$ irgend ein sphärisches Dreieck, das auf der Oberfläche einer Kugel gedacht wird, deren Mittelpunkt O, Radius r ist. Es ist verstattet anzunehmen, daß keine Seite dieses Dreiecks die halbe Peripherie übersteigt, weil es in einem solchen Falle offenbar immer ein Nebendreieck des gegebenen giebt, dessen Seiten die Ergänzungen dieses zu 180°, und alle kleiner als 180° sind. Dieses Dreieck läßt sich statt des gegebenen berechnen. Ueber die geometrische Theorie sphärischer Dreiecke s. m. den Artikel Kugel. (16.) ff.

48. Jedes sphärische Dreieck kann als die Grundfläche einer körperlichen Ecke betrachtet werden, deren Spitze und Kanten der Mittelpunkt O und die Radien $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ sind. Um die Untersuchung in möglichster Allgemeinheit anzustellen, denke man sich durch O drei rechtwinklige Axen gelegt, deren positive Seiten Ox, Oy, Oz seyen. Die Lage von $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ bestimme man durch die von diesen Linien mit Ox, Oy, Oz eingeschlossenen Winkel, indem man diese Winkel von o bis 180° zählt. Man bezeichne diese Winkel durch $\varkappa$, λ, μ; $\varkappa'$, λ', μ'; $\varkappa''$, λ'', μ''.

49. Liege nun $O\alpha$ in irgend einem der acht, durch die drei Axen gebildeten, körperlichen Winkel, und seyen $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 die von $O\alpha$ mit den zunächstliegenden Theilen der drei Axen eingeschlossenen spitzen Winkel. Fällt man von α (Fig. 52.) auf die Ebene der xy das Perpendikel $\alpha\alpha'$, zieht $O\alpha'$, und mit $O\alpha'$ und den Axen der y, x die Parallelen αc, $\alpha'a$, $\alpha'b$; so sind, wenn man noch αa, αb

zieht, die Linien αa, αb, αc auf den Axen der x, y, z senkrecht. (Ebene 14.). Also

$$Oa = O\alpha \,.\, \cos\varkappa_1,\ Ob = O\alpha \,.\, \cos\lambda_1,\ Oc = O\alpha \,.\, \cos\mu_1.$$

Aber $O\alpha^2 = O\alpha'^2 + \alpha\alpha'^2 = Oa^2 + Ob^2 + Oc^2$

$$= O\alpha^2 \,.\, \{\cos\varkappa_1{}^2 + \cos\lambda_1{}^2 + \cos\mu_1{}^2\}$$

$$1 = \cos\varkappa_1{}^2 + \cos\lambda_1{}^2 + \cos\mu_1{}^2.$$

Da nun aber die Winkel $\varkappa$, λ, μ offenbar die Winkel $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 selbst, oder ihre Ergänzungen zu 180° sind; so ist, weil das Vorzeichen einer Größe keinen Einfluß auf das Zeichen ihres Quadrates hat, $\cos\varkappa_1{}^2 = \cos\varkappa^2$, $\cos\lambda_1{}^2 = \cos\lambda^2$, $\cos\mu_1{}^2 = \cos\mu^2$, und folglich:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varkappa^2 + \cos\lambda^2 + \cos\mu^2 = 1 \\ \cos\varkappa'^2 + \cos\lambda'^2 + \cos\mu'^2 = 1 \\ \cos\varkappa''^2 + \cos\lambda''^2 + \cos\mu''^2 = 1 \end{array}\right\} [15]$$

50. Bezeichnet man jetzt durch x, y, z die Coordinaten des Punktes α; so ist (Fig. 52.) $\pm\,\alpha\alpha' = z$. Es ist aber klar, daß $\alpha\alpha'$ über oder unter der Ebene der xy liegt, d. i. positiv oder negativ zu nehmen ist, jenachdem der Winkel $\mu <$ oder $> 180°$ ist. Da nun $\alpha\alpha' = O\alpha \,.\, \cos\mu_1$ (49.) $= r\cos\mu_1$ ist; so ist $\pm\,\alpha\alpha' = z = r\cos\mu$. Also $x = r\cos\varkappa$, $y = r\cos\lambda$, $z = r\cos\mu$, woraus sich nach (49.), wenn die Coordinaten von β und γ durch x', y', z'; x'', y'', z'' bezeichnet werden, augenblicklich ergiebt:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = r^2 \end{array}\right\} [16].$$

51. Die den Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks entsprechenden Sehnen bezeichne man durch a', b', c'; so ist, wenn man sich durch β drei neue, mit den primitiven parallele, Coordinatenaxen gelegt denkt, und die Coordinaten von γ in Bezug auf dieses System durch x_1, y_1, z_1, bezeichnet, nach (50.):

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = a'^2.$$

Augenblicklich erhellet aber, daß, mit gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen, da die Coordinaten des neuen Anfangspunktes x', y', z' sind:

$$x_1 = x'' - x',\ y_1 = y'' - y',\ z_1 = z'' - z';$$

also

$$\left.\begin{array}{l}(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2=a'^2\\(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2=b'^2\\(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=c'^2\end{array}\right\}[17]$$

ist.

52. Entwickelt man diese Gleichungen, so erhält man mit Bezug auf [16] leicht:

$$\left.\begin{array}{l}2r^2-a'^2=2x'x''+2y'y''+2z'z''\\2r^2-b'^2=2xx''+2yy''+2zz''\\2r^2-c'^2=2xx'+2yy'+2zz'\end{array}\right\}[18]$$

53. Setzt man nun in diesen Formeln für die Coordinaten die Ausdrücke in (50.), und bezeichnet eine Größe von der Form

$$\cos\varkappa\,.\,\cos\varkappa'+\cos\lambda\,.\,\cos\lambda'+\cos\mu\,.\,\cos\mu'$$

durch $\varphi(\varkappa, \varkappa')$; so erhält man

$$\left.\begin{array}{l}2r^2-a'^2=2r^2\,.\,\varphi(\varkappa', \varkappa'')\\2r^2-b'^2=2r^2\,.\,\varphi(\varkappa, \varkappa'')\\2r^2-c'^2=2r^2\,.\,\varphi(\varkappa, \varkappa')\end{array}\right\}[19]$$

54. Da nun aber in dem ebenen Dreiecke $\beta O\gamma$ nach [2] offenbar

$$\cos a=\frac{2r^2-a'^2}{2r^2}$$

ist; so ergiebt sich aus den vorhergehenden Formeln sehr leicht:

$$\left.\begin{array}{l}\cos a=\varphi(\varkappa', \varkappa'')\\\cos b=\varphi(\varkappa, \varkappa'')\\\cos c=\varphi(\varkappa, \varkappa')\end{array}\right\}[20]$$

55. Um ferner Ausdrücke für die Winkel des sphärischen Dreiecks zu erhalten, errichte man von O aus auf die Ebenen $\alpha O\beta$, $\alpha O\gamma$ zwei Perpendikel; so werden diese Perpendikel offenbar einem dem Winkel α gleichen Winkel einschließen. Bezeichnen wir nun die von diesen beiden Perpendikeln mit Ox, Oy, Oz eingeschlossenen Winkel durch ε, η, Θ; ε', η', Θ'; so ist, da diese Perpendikel auf $O\alpha$, $O\beta$; $O\alpha$, $O\gamma$ senkrecht sind, und die Formeln [20] offenbar überhaupt den Cosinus eines von zwei Linien im Raume eingeschlossenen Winkels darstellen:

$$o = \cos\varkappa\cos\varepsilon + \cos\lambda\cos\eta + \cos\mu\cos\Theta,$$
$$o = \cos\varkappa'\cos\varepsilon + \cos\lambda'\cos\eta + \cos\mu'\cos\Theta,$$
$$1 = \cos\varepsilon^2 + \cos\eta^2 + \cos\Theta^2 \;[15];$$
$$o = \cos\varkappa\cos\varepsilon' + \cos\lambda\cos\eta' + \cos\mu\cos\Theta',$$
$$o = \cos\varkappa''\cos\varepsilon' + \cos\lambda''\cos\eta' + \cos\mu''\cos\Theta',$$
$$1 = \cos\varepsilon'^2 + \cos\eta'^2 + \cos\Theta'^2 \;[15].$$

Eliminirt man nun aus den ersten beiden Gleichungen zuerst $\cos\eta$, und dann $\cos\Theta$; so ergiebt sich, indem man eine Größe von der Form

$$\cos\varkappa\cos\lambda' - \cos\varkappa'\cos\lambda$$

durch $f(\varkappa, \lambda')$ bezeichnet:

$$\{f(\varkappa, \lambda')\}^2 . \cos\varepsilon^2 = \{f(\lambda, \mu')\}^2 . \cos\Theta^2$$
$$\{f(\varkappa, \mu')\}^2 . \cos\varepsilon^2 = \{f(\lambda, \mu')\}^2 . \cos\eta^2$$
$$\{f(\lambda, \mu')\}^2 . \cos\varepsilon^2 = \{f(\lambda, \mu')\}^2 . \cos\varepsilon^2,$$

woraus sich mittelst der dritten Gleichung leicht ergiebt:

$$\cos\varepsilon^2 = \frac{\{f(\lambda, \mu')\}^2}{\{f(\varkappa, \lambda')\}^2 + \{f(\varkappa, \mu')\}^2 + \{f(\lambda, \mu')\}^2}$$
$$\cos\eta^2 = \frac{\{f(\varkappa, \mu')\}^2}{\{f(\varkappa, \lambda')\}^2 + \{f(\varkappa, \mu')\}^2 + \{f(\lambda, \mu')\}^2}$$
$$\cos\Theta^2 = \frac{\{f(\varkappa, \lambda')\}^2}{\{f(\varkappa, \lambda')\}^2 + \{f(\varkappa, \mu')\}^2 + \{f(\lambda, \mu')\}^2}.$$

Entwickelt man nun den gemeinschaftlichen Nenner dieser Brüche; so erhält man, indem man die Producte $\cos\varkappa^2\cos\varkappa'^2$, $\cos\lambda^2\cos\lambda'^2$, $\cos\mu^2\cos\mu'^2$ zu und von der Entwickelung addirt und subtrahirt, mit Hülfe von [15] und [20], diesen Nenner $= 1 - \{\varphi(\varkappa, \varkappa')\}^2$ $= 1 - \cos c^2 = \sin c^2$, und folglich

$$\left.\begin{aligned}\cos\varepsilon^2 &= \frac{\{f(\lambda, \mu')\}^2}{\sin c^2}\\ \cos\eta^2 &= \frac{\{f(\varkappa, \mu')\}^2}{\sin c^2}\\ \cos\Theta^2 &= \frac{\{f(\varkappa, \lambda')\}^2}{\sin c^2}\end{aligned}\right\}[21]$$

und eben so

$$\left.\begin{aligned}\cos\varepsilon'^2 &= \frac{\{f(\lambda, \mu'')\}^2}{\sin b^2}\\ \cos\eta'^2 &= \frac{\{f(\varkappa, \mu'')\}^2}{\sin b^2}\\ \cos\Theta'^2 &= \frac{\{f(\varkappa, \lambda'')\}^2}{\sin b^2}\end{aligned}\right\}[22]$$

56. Bestimmt man nun hieraus $\cos\varepsilon$, $\cos\eta$, u. s. f.,

so erhält man für jeden Cosinus zwei Werthe, welches sich leicht daraus erklärt, daß von O aus auf jede der beiden Ebenen $\alpha O\beta$, $\alpha O\gamma$ eigentlich zwei Perpendikel errichtet werden können. Obgleich sich nun zwar nicht im Allgemeinen bestimmen läßt, mit welchem Vorzeichen jeder dieser Cosinus zu nehmen ist, damit er den beiden von O ausgehenden Perpendikeln entspricht, deren Winkel dem Winkel α gleich ist; so ist doch Folgendes klar. Sind nämlich die Ausdrücke für $\cos\varepsilon$, $\cos\eta$, $\cos\Theta$ bestimmt; so müssen aus denselben die Ausdrücke für $\cos\varepsilon'$, $\cos\eta'$, $\cos\Theta'$ hervorgehen, wenn man in jenen überall μ'', λ'' statt μ', λ' setzt. Denn sey z. B. einmal

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\lambda\cos\mu' - \cos\lambda'\cos\mu}{\sin c},$$

aber nicht

$$\cos\varepsilon' = \frac{\cos\lambda\cos\mu'' - \cos\lambda''\cos\mu}{\sin b};$$

sondern

$$\cos\varepsilon' = \frac{\cos\lambda''\cos\mu - \cos\lambda\cos\mu''}{\sin b}.$$

Stellt man sich nun vor, daß sich die Linien $O\beta$, $O\gamma$, also auch die Ebenen $\alpha O\beta$, $\alpha O\gamma$ einander nähern, so nähern sich auch die beiden Perpendikel, deren Winkel $= \alpha$ ist, einander immer mehr, und fallen mit den beiden Ebenen gleichzeitig zusammen. Dann nähern sich aber auch die Winkel λ', μ', ε immer mehr den Winkeln λ'', μ'', ε', und werden diesen gleich, wenn die Ebenen zusammenfallen, so daß also offenbar, wenn $\lambda' = \lambda''$, $\mu' = \mu''$ wird, $\cos\varepsilon = \cos\varepsilon'$ werden muß. Unter obiger Annahme würde man aber für diesen Fall, da augenscheinlich auch $b = c$ wird, $\cos\varepsilon = -\cos\varepsilon'$ erhalten. Es ist also zu gleicher Zeit entweder

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\lambda\cos\mu' - \cos\lambda'\cos\mu}{\sin c},$$

$$\cos\varepsilon' = \frac{\cos\lambda\cos\mu'' - \cos\lambda''\cos\mu}{\sin b};$$

oder

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\lambda'\cos\mu - \cos\lambda\cos\mu'}{\sin c},$$

$$\cos \varepsilon' = \frac{\cos\lambda''\cos\mu - \cos\lambda\cos\mu''}{\sin b};$$

oder

$$\cos\varepsilon = \pm\frac{f(\lambda,\mu')}{\sin c},\ \cos\varepsilon' = \pm\frac{f(\lambda,\mu'')}{\sin b};$$

wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen. Also ist immer mit gehöriger Vertauschung der Buchstaben:

$$\left.\begin{aligned}\cos\varepsilon\,.\,\cos\varepsilon' &= \frac{f(\lambda,\mu')\,.\,f(\lambda,\mu'')}{\sin b\sin c}\\ \cos\eta\,.\,\cos\eta' &= \frac{f(\varkappa,\mu')\,.\,f(\varkappa,\mu'')}{\sin b\sin c}\\ \cos\Theta\,.\,\cos\Theta' &= \frac{f(\varkappa,\lambda')\,.\,f(\varkappa,\lambda'')}{\sin b\sin c}\end{aligned}\right\}\ [23]$$

57. Da nun nach [20.]

$$\cos\alpha = \cos\varepsilon\cos\varepsilon' + \cos\eta\cos\eta' + \cos\Theta\cos\Theta'$$

ist; so erhält man aus [23]

$$\begin{aligned}&\cos\alpha\sin b\sin c =\\ &(\cos\lambda\cos\mu' - \cos\lambda'\cos\mu)(\cos\lambda\cos\mu'' - \cos\lambda''\cos\mu)\\ +\ &(\cos\varkappa\cos\mu' - \cos\varkappa'\cos\mu)(\cos\varkappa\cos\mu'' - \cos\varkappa''\cos\mu)\\ +\ &(\cos\varkappa\cos\lambda' - \cos\varkappa'\cos\lambda)(\cos\varkappa\cos\lambda'' - \cos\varkappa''\cos\lambda),\end{aligned}$$

woraus sich, wenn man die Producte entwickelt, und die Ausdrücke $\cos\varkappa^2\cos\varkappa'\cos\varkappa''$, $\cos\lambda^2\cos\lambda'\cos\lambda''$, $\cos\mu^2\cos\mu'\cos\mu''$ zu und von der Entwickelung addirt und subtrahirt, leicht nach [15] ergiebt:

$$\cos\alpha\sin b\sin c = \varphi(\varkappa',\varkappa'') - \varphi(\varkappa,\varkappa'')\,.\,\varphi(\varkappa,\varkappa'),$$

d. i., nach [20], zugleich mit Vertauschung der Buchstaben:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\sin b\sin c &= \cos a - \cos b\cos c\\ \cos\beta\sin a\sin c &= \cos b - \cos a\cos c\\ \cos\gamma\sin a\sin b &= \cos c - \cos a\cos b\end{aligned}\right\}\ [24]$$

Diese Formeln sind von der größten Wichtigkeit, weil sich aus ihnen die ganze sphärische Trigonometrie durch bloße Rechnung ableiten läßt, welches die Weitläufigkeit des obigen Beweises entschuldigen mag. Das Streben nach größter Allgemeinheit hat uns zu demselben geführt, da alle uns sonst bekannt gewordenen Beweise nur für Dreiecke, deren Seiten den Quadranten nicht übersteigen, gelten, und, sollen sie allgemein gemacht werden, ebenfalls weitläufige Betrachtungen erfordern. M. v. jedoch Grund-

lehren d. eb. u. sph. Trig. v. Münchow. Bonn. 1826. S. 131 — 143. Hestermann Trig. sphaer. leges et formulae. Vindob. 1820. 4. Obiger Beweis setzt die Formeln der analytischen Geometrie nicht unmittelbar als bekannt voraus.

Durch Construction kann man diese Formeln, wenn keine Seite den Quadranten übersteigt, leicht auf folgende Art beweisen. Sey $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 53.) das gegebene Dreieck. Man fälle von γ auf $O\alpha$, wenn O der Mittelpunkt der Kugel ist, das Perpendikel $\gamma\delta$, errichte durch δ auf $O\alpha$ das Perpendikel $\delta\varepsilon$, und ziehe $\gamma\varepsilon$; so ist $\angle \gamma\delta\varepsilon = \alpha$. Aber [2]:

$$\gamma\varepsilon^2 = O\gamma^2 + O\varepsilon^2 - 2O\gamma \,.\, O\varepsilon \,.\, \cos a,$$
$$\gamma\varepsilon^2 = \gamma\delta^2 + \delta\varepsilon^2 - 2\gamma\delta \,.\, \delta\varepsilon \,.\, \cos\alpha.$$

Aber, wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet:

$$\gamma\delta = r\sin b,\ \delta\varepsilon = O\delta \,.\, \mathrm{tang}\, c = r\cos b\,\mathrm{tang}\, c;$$
$$O\gamma = r,\quad O\varepsilon = O\delta \,.\, \sec c = r\cos b \sec c.$$

Folglich, wenn man substituirt und mit r^2 aufhebt:

$$1 + \cos b^2 \sec c^2 - 2\cos a\cos b\sec c$$
$$= \sin b^2 + \cos b^2\,\mathrm{tang}\, c^2 - 2\sin b\cos b\,\mathrm{tang}\, c\cos\alpha,$$
$$\sin b^2 + \frac{\cos b^2 \sin c^2}{\cos c^2} - \frac{2\sin b\cos b\sin c\cos\alpha}{\cos c}$$
$$= 1 + \frac{\cos b^2}{\cos c^2} - \frac{2\cos a\cos b}{\cos c},$$
$$\sin b^2\cos c^2 + \cos b^2\sin c^2 - 2\sin b\cos b\sin c\cos c\cos\alpha$$
$$= \cos b^2 + \cos c^2 - 2\cos a\cos b\cos c,$$
$$2\cos a\cos b\cos c = 2\sin b\cos b\sin c\cos c\cos\alpha$$
$$+ \cos b^2(1 - \sin c^2) + \cos c^2(1 - \sin b^2)$$
$$= 2\sin b\cos b\sin c\cos c\cos\alpha + \cos b^2\cos c^2 + \cos c^2\cos b^2$$
$$= 2\sin b\cos b\sin c\cos c\cos\alpha + 2\cos b^2\cos c^2$$
$$\cos a = \sin b\sin c\cos\alpha + \cos b\cos c,$$

woraus die beiden andern Formeln unmittelbar durch Vertauschung der Buchstaben folgen.

58. Es ist also

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$
$$\sin\alpha^2\sin b^2 = \frac{\sin b^2\sin c^2 - (\cos a - \cos b\cos c)^2}{\sin c^2},$$
$$= \frac{(1 - \cos b^2)(1 - \cos c^2) - (\cos a - \cos b\cos c)^2}{\sin c^2},$$
$$= \frac{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin c^2}.$$

Denselben Ausdruck erhält man ganz auf ähnliche Art für $\sin \beta^2 \sin a^2$. Also ist $\sin \alpha^2 \sin b^2 = \sin \beta^2 \sin a^2$, und folglich, da keine Seite, also auch offenbar kein Winkel, $> 180^0$ ist, die Sinus also immer positiv sind:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha \sin b &= \sin\beta \sin a \\ \sin\beta \sin c &= \sin\gamma \sin b \\ \sin\gamma \sin a &= \sin\alpha \sin c \end{aligned}\right\} [25]$$

woraus leicht der bekannte Satz folgt, daß in jedem sphärischen Dreieck die Sinus der Seiten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten.

59. Man denke sich nun ein Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$, dessen Seiten und Winkel die Winkel und Seiten des gegebenen Dreiecks zu 180^0 ergänzen (M. s. Supplementardreieck); so ist

$$\alpha + a' = \beta + b' = \gamma + c' = 180^0;$$
$$a + \alpha' = b + \beta' = c + \gamma' = 180^0;$$
$$\cos a' = -\cos\alpha, \ \cos b' = -\cos\beta, \ \cos c' = -\cos\gamma;$$
$$\cos\alpha' = -\cos a, \ \cos\beta' = -\cos b, \ \cos\gamma' = -\cos c.$$

Aber nach [24.]:

$$\cos\alpha' \sin b' \sin c' = \cos a' - \cos b' \cos c'.$$

Also

$$-\cos a \sin\beta \sin\gamma = -\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \cos a \sin\beta \sin\gamma &= \cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma \\ \cos b \sin\alpha \sin\gamma &= \cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma \\ \cos c \sin\alpha \sin\beta &= \cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta \end{aligned}\right\} [26]$$

Aus der Vergleichung dieser Formeln mit [24] erhellet, daß man immer die Seiten und Winkel gegen einander vertauschen kann, wenn man nur die Cosinus negativ nimmt.

60. Relationen zwischen allen sechs Stücken erhält man auf folgende Art. Nach [24], [25], und bekannten goniometrischen Formeln ist:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cos\alpha$$
$$= \frac{\sin a}{\sin c} \cdot \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$
$$+ \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a + \cos b - \cos a \cos c - \cos b \cos c}{\sin c^2}$$

$$= \frac{(\cos a + \cos b)(1 - \cos c)}{\sin c^2}$$

$$= \frac{\cos a + \cos b}{2 \cos \frac{1}{2} c^2}.$$

Ganz eben so erhält man

$$\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \gamma} = \frac{\cos b - \cos a}{2 \sin \frac{1}{2} c^2},$$

und aus den Formeln [26] auf gleiche Weise:

$$\frac{\sin(a + b)}{\sin c} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2 \sin \frac{1}{2} \gamma^2},$$

$$\frac{\sin(a - b)}{\sin c} = \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2 \cos \frac{1}{2} \gamma^2}.$$

Aber auch nach [25]:

$$\frac{\sin \alpha \pm \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin a \pm \sin b}{\sin c}.$$

Durch eine leichte Transformation (Goniometrie. 28. 35.) ergiebt sich aus den erhaltenen Resultaten:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2} c^2} \quad (1)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2} c^2} \quad (2)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a + b)}{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}\gamma^2} \quad (3)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}\gamma^2} \quad (4)$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \gamma} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\sin c} \quad (5)$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \gamma} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin c} \quad (6)$$

61. Dividirt man nun (5) durch (3), (6) durch (3), (5) durch (1), (6) durch (1); so erhält man:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma^2}{\sin \gamma} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c}{\sin c},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma^2}{\sin \gamma} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2}(a + b)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c}{\sin c},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} c^2}{\sin c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \gamma},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a - b)} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} c^2}{\sin c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\gamma \cos \frac{1}{2}\gamma}{\sin \gamma};$$

woraus sich ferner leicht ergiebt:

$$\left.\begin{aligned}\tan\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\tan\tfrac{1}{2}\gamma &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\\ \tan\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\tan\tfrac{1}{2}\gamma &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\\ \tan\tfrac{1}{2}(a+b)\cot\tfrac{1}{2}c &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\\ \tan\tfrac{1}{2}(a-b)\cot\tfrac{1}{2}c &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\end{aligned}\right\}[27]$$

Diese Relationen zwischen fünf Stücken, aus denen sich überhaupt zwölf Gleichungen durch Vertauschung der Buchstaben ergeben, nennt man die Neperschen Analogien. Mirif. Logar. canonis constructio. pp. 56. 61.

62. Multiplicirt man aber (2) mit (3) und (4), so wie (1) mit (3) und (4); so erhält man:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)^2}{\sin\frac{1}{2}c^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)^2}{\sin\frac{1}{2}c^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2}{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)^2}{\cos\frac{1}{2}c^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)^2}{\cos\frac{1}{2}c^2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c};$$

woraus sich, vermöge (5) und (6), durch beiderseitige Division, und Ausziehung der Quadratwurzel, leicht ergiebt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= \sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma\\ \sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\tfrac{1}{2}c &= \sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\\ \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma\\ \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}c &= \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\end{aligned}\right\}[28]$$

Diese höchst merkwürdige Folge von Gleichungen hat Gauß (Theoria motus corporum coelestium. Hamb. 1809. p. 51. ohne Beweis bekannt gemacht, und sie als solche, die in den Lehrbüchern noch fehlten, besonders empfohlen. Man nennt sie daher in Deutschland gewöhnlich die Gaußi-

schen Gleichungen. Zu bemerken ist aber, daß Mollweide schon im Novemberstück der monatl. Correspondenz S. 398. 399. dieselben Formeln bewiesen, und dabei zugleich bemerkt hat, daß sie in den Systemen der Trigonometrie noch fehlten, obwohl sie eine bequeme Art, eine Seite, ohne einen der an derselben anliegenden Winkel zu kennen, zu finden, an die Hand gäben. Auch bemerkt Mollweide a. a. O. ausdrücklich, daß in der dortigen Bezeichnung $\varphi = \frac{1}{2}(B - C)$, $\psi = \frac{1}{2}(B + C)$ sey, wodurch die dortigen Formeln augenblicklich in die ihnen oben gegebene Gestalt übergehen. Außerdem hat auch Délambre in der Connaissance des tems von 1808. dieselben Formeln bekannt gemacht, weshalb französische Schriftsteller sie gewöhnlich nach ihm benennen. Daß man in obigem Beweise, welches vielleicht einigen Zweifel erregen könnte, die Quadratwurzel nicht auch negativ nehmen darf, erhellet sogleich, wenn man überlegt, daß alle Winkel 180° nicht übersteigen (47.), und daß, in Bezug auf die zweite Gleichung, $\alpha - \beta$ negativ ist, wenn a — b es ist, da dem größern Winkel immer die größere Seite gegenübersteht. Andere Beweise s. in Sniadecki's sph. Trig. A. d. Poln. von Feldt. Lpzg. 1828. S. 20. 21.; Conn. d. tems. 1812. p. 349.; Traité d'Astronomie par Délambre. T. I. p. 157.; Dessen Abrégé d'Astronomie. p. 110.; Annales de Math. III. p. 351. XV. p. 284.; Littrows theoret. und prakt. Astron. I. S. 10.; Puissant Géodésie. I. p. 65. 66.

Allgemeine Auflösung aller Fälle.

63. Folgende Fälle können vorkommen:

a. Gegeben alle drei Seiten.

b. Gegeben zwei Seiten und

α. der eingeschlossene,

β. ein Gegenwinkel.

c. Gegeben eine Seite und

α. die beiden anliegenden Winkel,

β. ein anliegender und der gegenüberstehende Winkel.

d. Gegeben alle drei Winkel.

64. Gegeben a, b, c
Gesucht α, β, γ } (63. a.)

Nach [24] ist

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c},$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Um leichter mit Logarithmen zu rechnen, berechne man den Hülfswinkel φ mittelst der Formel $\cos\varphi = \cos b \cos c$; so hat man

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos\varphi}{\sin b \sin c} = \frac{2 \sin\frac{1}{2}(a + \varphi) \sin\frac{1}{2}(\varphi - a)}{\sin b \sin c}.$$

Eben so für β und γ. Ferner ist, für $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$:

$$1 + \cos\alpha = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{2 \sin\frac{1}{2}(a + b + c) \sin\frac{1}{2}(b + c - a)}{\sin b \sin c};$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{-\cos a + (\cos b \cos c + \sin b \sin c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{-\cos a + \cos(b - c)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{2 \sin\frac{1}{2}(a + b - c) \sin\frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin b \sin c};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s - a)}{\sin b \sin c}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin(s - b) \sin(s - c)}{\sin s \sin(s - a)}},$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s - a) \sin(s - b) \sin(s - c)}}{\sin b \sin c}.$$

Durch Weiterrückung der Buchstaben construirt man leicht

ganz ähnliche Formeln für die übrigen Winkel. Aus diesen Ausdrücken ergeben sich leicht folgende Relationen zwischen allen sechs Stücken:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin a \sin b \sin c},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha \cos\tfrac{1}{2}\beta \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin s \sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a \sin b \sin c},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin s \sqrt{\sin s}}.$$

65. Gegeben b, c, α Gesucht β, γ, a } (63. b. α.)

Nach [24] ist

$$\sin a \cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin c},$$

$$\sin b \cos c \cos\alpha = \frac{\cos a \cos c - \cos b \cos c^2}{\sin c},$$

$$\sin a \cos\beta + \sin b \cos c \cos\alpha = \cos b \sin c;$$

$$\sin a = \frac{\sin b \sin\alpha}{\sin\beta} \; [25];$$

$$\sin b \sin\alpha \cot\beta + \sin b \cos c \cos\alpha = \cos b \sin c,$$

$$\cot\beta = \frac{\cot b \sin c - \cos c \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\cot\gamma = \frac{\cot c \sin b - \cos b \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

woraus β, γ ohne Zweideutigkeit gefunden werden. Da aber diese Formeln zur logarithmischen Rechnung unbequem sind, so berechne man lieber $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ und $\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$ aus den Neperschen Analogien

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}\alpha,$$

woraus man ebenfalls ohne Zweideutigkeit

$$\beta = \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) + \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma),$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) - \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma);$$

erhält. Die Seite a findet man aus

$$\sin a = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin c \sin \alpha}{\sin \gamma},$$

wo aber immer eine besondere Beurtheilung, ob a $<$ oder $> 90^0$, nöthig ist. Diese vermeidet man, wenn man a aus

$$\cot \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma)} \cot \tfrac{1}{2}(b + c)$$
$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\sin \frac{1}{2}(\beta + \gamma)} \cot \tfrac{1}{2}(b - c);$$

bestimmt. Auch kann man sich, da man alle drei Winkel kennt, der Gaußischen Gleichungen zur Berechnung von a bedienen. Auch ist im Supplementardreieck nach (64)

$$\cos \tfrac{1}{2} \alpha' = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a' + b' + c') \sin \frac{1}{2}(b' + c' - a')}{\sin b' \sin c'}},$$

$$\tfrac{1}{2}(a' + b' + c') + \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 270^0,$$
$$\tfrac{1}{2}(b' + c' - a') + \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) = 90^0,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(a' + b' + c') = -\cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(b' + c' - a') = \cos \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha),$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha' + \tfrac{1}{2} a = 90^0,\ b' + \beta = 180^0,\ c' + \gamma = 180^0,$$
$$\cos \tfrac{1}{2} \alpha' = \sin \tfrac{1}{2} a,\ \sin b' = \sin \beta,\ \sin c' = \sin \gamma,$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha)}{\sin \beta \sin \gamma}};$$

woraus ebenfalls a ohne Zweideutigkeit gefunden wird, wenn nach dem Obigen die drei Winkel bekannt sind.

Unmittelbar aus den gegebenen Stücken ist nach [24]

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$= \sin b \cos \alpha \left\{ \sin c + \cos c \cdot \frac{\cot b}{\cos \alpha} \right\}.$$

Ist nun $\tan \varphi = \frac{\cot b}{\cos \alpha}$; so ist

$$\cos a = \frac{\cos b}{\tan \varphi}(\sin c + \cos c \tan \varphi)$$
$$= \frac{\cos b}{\sin \varphi}(\sin c \cos \varphi + \cos c \sin \varphi)$$
$$= \frac{\cos b \sin (c + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Kann a durch den Cosinus nicht mit erforderlicher Genauigkeit berechnet werden; so ist

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c (1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} \alpha^2)$$
$$= \cos (b - c) - 2 \sin b \sin c \sin \tfrac{1}{2} \alpha^2,$$

und folglich, indem man

$$\cos a = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}a^2,$$
$$\cos(b - c) = 1 - 2(\sin\tfrac{1}{2}(b - c))^2$$

setzt:

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = (\sin\tfrac{1}{2}(b - c))^2 . \left\{1 + \frac{\sin b \sin c \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2}{(\sin\tfrac{1}{2}(b - c))^2}\right\}.$$

Sey nun

$$\tang\Theta = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin\tfrac{1}{2}(b - c)}\sqrt{\sin b \sin c};$$

so ist

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}(b - c)\sqrt{1 + \tang\Theta^2}$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}(b - c)\sec\Theta = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(b - c)}{\cos\Theta}.$$

Auch folgende Transformation scheint bemerkenswerth. Man setze

$$\cos a = 2\cos\tfrac{1}{2}a^2 - 1,$$
$$\cos(b - c) = 2(\cos\tfrac{1}{2}(b - c))^2 - 1;$$

so giebt die obige Formel für cos a:

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = (\cos\tfrac{1}{2}(b - c))^2 . \left\{1 - \frac{\sin b \sin c \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2}{(\cos\tfrac{1}{2}(b - c))^2}\right\}.$$

Der negative Theil des binomischen Factors muß < 1 seyn, weil sonst $\cos\tfrac{1}{2}a$ imaginär wäre. Daher kann man setzen

$$\sin\eta = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\alpha}{\cos\tfrac{1}{2}(b - c)}\sqrt{\sin b \sin c}.$$

Also,

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}(b - c)\sqrt{1 - \sin\eta^2}$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}(b - c)\cos\eta.$$

Noch eine Berechnungsart der Seite a lehrt Mollweide in der Zeitschrift für Astronomie. I. S. 459. ohne Beweis, den ich beifügen will. Man setze

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\sin b \sin c} = \sin u;$$

so ist

$$2\sin\tfrac{1}{2}a^2 = 1 - \cos a = 1 - (\sin b \sin c \cos\alpha + \cos b \cos c)$$
$$= 1 - \sin b \sin c(\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2) - \cos b \cos c$$
$$= 1 + \sin b \sin c - 2\sin b \sin c \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - \cos b \cos c$$
$$= 1 - 2\sin u^2 - \cos(b + c)$$
$$= \cos 2u - \cos(b + c)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\sin\left(\frac{b+c}{2}+u\right)\sin\left(\frac{b+c}{2}-u\right)}.$$

Setzt man aber

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\sin b \sin c} = \sin w;$$

so ist

$$\begin{aligned}2\cos\tfrac{1}{2}a^2 &= 1 + \cos a = 1 + \sin b \sin c \cos\alpha + \cos b \cos c\\ &= 1 + \sin b \sin c - 2\sin b \sin c \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 + \cos b \cos c\\ &= 1 - 2\sin w^2 + \cos(b-c)\\ &= \cos 2w + \cos(b-c)\end{aligned}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\cos\left(\frac{b-c}{2}+w\right)\cos\left(\frac{b-c}{2}-w\right)}.$$

$\cos\frac{1}{2}\alpha\sqrt{\sin b \sin c}$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha\sqrt{\sin b \sin c}$ können offenbar nie > 1 seyn, so daß sich also die Hülfswinkel u, w immer bestimmen lassen. Ferner setze man

$$\frac{\sin b \sin c \sin\alpha \cot\frac{1}{2}\alpha}{\sin(b+c)} = \operatorname{tang} y;$$

so ist

$$\operatorname{tang} y = \frac{2\sin b \sin c \cos\frac{1}{2}\alpha^2}{\sin(b+c)} = \frac{2\sin u^2}{\sin(b+c)}.$$

Folglich nach dem Obigen

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}a^2 &= 1 + \sin b \sin c - \operatorname{tang} y \sin(b+c) - \cos b \cos c\\ &= 1 - \frac{\sin y \sin(b+c)}{\cos y} - \cos(b+c)\\ &= \frac{\cos y - \cos(b+c-y)}{\cos y},\end{aligned}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{b+c}{2}-y\right)}{\cos y}}.$$

Aus dem Ausdrucke für $2\sin\frac{1}{2}a^2$ ergiebt sich augenblicklich

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\cos y + \cos(b+c-y)}{\cos y},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{b+c}{2}\right)\cos\left(\frac{b+c}{2}-y\right)}{\cos y}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\operatorname{tang}\left(\frac{b+c}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{b+c}{2}-y\right)}.$$

Endlich setze man noch

$$\frac{\sin b \sin c \sin\alpha \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{\sin(b-c)} = \operatorname{tang} z,$$

$$\tang z = \frac{2 \sin b \sin c \sin \tfrac{1}{2}\alpha^2}{\sin(b-c)}$$
$$= \frac{2 \sin w^2}{\sin(b-c)}.$$

Also nach dem Obigen

$$2 \cos \tfrac{1}{2} a^2 = 1 + \sin b \sin c - \tang z \sin(b-c) + \cos b \cos c$$
$$= 1 - \frac{\sin z \sin(b-c)}{\cos z} + \cos(b-c)$$
$$= \frac{\cos z + \cos(b-c+z)}{\cos z},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{b-c}{2}\right)\cos\left(\frac{b-c}{2}+z\right)}{\cos z}},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a^2 = \frac{\cos z - \cos(b-c+z)}{\cos z},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)\sin\left(\frac{b-c}{2}+z\right)}{\cos z}},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\tang\left(\frac{b-c}{2}\right)\tang\left(\frac{b-c}{2}+z\right)}.$$

Hat man a, so kann man auch β, γ leicht finden. Nach (64.) ist

$$\tang \tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}},$$

$$= \sqrt{\frac{(\sin(s-a))^2 \sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)(\sin(s-b))^2}}$$

$$= \frac{\sin(s-a)}{\sin(s-b)}\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\beta = \frac{\sin(s-a)}{\sin(s-b)} \tang \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin(s-a)}{\sin(s-c)} \tang \tfrac{1}{2}\alpha.$$

M. s. auch Puissant Géodésie I. p. 93. Connaiss. des tems. 1820. p. 346.

Auch die obige Formel für $\cot\beta$, und eben so die für $\cot\gamma$, läßt sich durch Einführung eines Hülfswinkels zur logarithmischen Rechnung bequemer einrichten. Setzt man nämlich $\cos\alpha \tang b = \cot\varphi$, so giebt die Formel

$$\cot\beta \sin\alpha = \cot b \sin c - \cos c \cos\alpha$$

leicht:

$$\frac{\sin\alpha \tang b}{\tang\beta} = \sin c - \cos c \cot\varphi$$

$$= -\frac{\cos(c+\varphi)}{\sin\varphi},$$

$$\tang\beta = -\frac{\sin\alpha\tang b\sin\varphi}{\cos(c+\varphi)},$$

und folglich, wenn man für $\sin\varphi$ seinen Werth einführt:

$$\tang\beta = -\frac{\tang\alpha\cos\varphi}{\cos(c+\varphi)}.$$

Für $\cos\alpha\tang b = \tang\psi$ würde man finden:

$$\cot\beta = \frac{\cot\alpha\sin(c-\psi)}{\sin\psi}.$$

66. Gegeben a, β, γ | (63. c. α.)
Gesucht α, b, c

Man denke sich das Supplementardreieck, so ist nach (65.)

$$\cot\beta' = \frac{\cot b'\sin c' - \cos c'\cos\alpha'}{\sin\alpha'},$$

$$-\cot b = \frac{-\cot\beta\sin\gamma - \cos\gamma\cos a}{\sin a},$$

$$\cot b = \frac{\cot\beta\sin\gamma + \cos\gamma\cos a}{\sin a},$$

$$\cot c = \frac{\cot\gamma\sin\beta + \cos\beta\cos a}{\sin a}.$$

Die Rechnung mit Logarithmen wird erleichtert, wenn man $\cos a\tang\beta = \tang\varphi$ setzt, woraus

$$\frac{\sin a\tang\beta}{\tang b} = \sin\gamma + \cos\gamma\tang\varphi,$$

$$\tang b = \frac{\tang a\sin\varphi}{\sin(\gamma+\varphi)}.$$

Für $\frac{\cot\beta}{\cos a} = \tang\psi$ erhält man:

$$\cot b = \frac{\cot a\cos(\gamma-\psi)}{\cos\psi}.$$

Mit $\cot c$ verfährt man eben so. Indeß lassen sich b, c auch mit Leichtigkeit durch die Neperschen Analogien:

$$\tang\tfrac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}\tang\tfrac{1}{2}a,$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}\tang\tfrac{1}{2}a,$$

ohne Zweideutigkeit finden.

Berechnete man, nachdem b, c gefunden, α nach den Formeln

$$\sin\alpha = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin a \sin\gamma}{\sin c};$$

so würde eine besondere Beurtheilung wegen der Art des Winkels α nöthig seyn, welche vermieden wird, wenn man sich der Neperschen Formeln

$$\tang\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

bedient. Auch ist, weil man nun alle drei Seiten kennt, nach (64.)

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Unmittelbar aus den gegebenen Stücken ergiebt sich α durch die Formel [26]:

$$\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma,$$

welche zur logarithmischen Rechnung bequemer eingerichtet wird, wenn man $\cos a \tang\beta = \cot\Theta$ setzt, woraus man erhält:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta\sin(\gamma-\Theta)}{\sin\Theta}.$$

67. Gegeben α, β, γ } (63. d.)
Gesucht a, b, c }

Nach [26] ist

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$
$$\cos b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma},$$
$$\cos c = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta};$$

und ganz auf ähnliche Art, wie in (64.) in Bezug auf die Seiten, erhält man hier, für $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = s'$, in Bezug auf die Winkel:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos(s'-\beta)\cos(s'-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos s'\cos(s'-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$
$$\tang\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos s'\cos(s'-\alpha)}{\cos(s'-\beta)\cos(s'-\gamma)}},$$

$$\sin a = \frac{2\sqrt{-\cos s' \cos(s'-\alpha)\cos(s'-\beta)\cos(s'-\gamma)}}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Für $\cos\beta\cos\gamma = \cos\varphi$ erhält man

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\varphi}{\sin\beta\sin\gamma}$$
$$= \frac{2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\varphi)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\varphi)}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

68. Gegeben a, b, α | (63. b. β.)
Gesucht β, c, γ |

Man suche zuerst β nach der Formel

$$\sin\beta = \frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a},$$

und dann c, γ nach den Neperschen Formeln:

$$\cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cot\tfrac{1}{2}(a+b)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\cot\tfrac{1}{2}(a-b);$$
$$\tang\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

Man kann aber auch c, γ unmittelbar aus den Datis erhalten. Setzt man nämlich $\cos b \tang\alpha = \tang\varphi$; so erhält man mittelst der aus (65.) sich leicht ergebenden Formel

$$\cot a\sin b = \cot\alpha\sin\gamma + \cos b\cos\gamma,$$

nach einigen Reductionen:

$$\sin(\gamma+\varphi) = \frac{\tang b\sin\varphi}{\tang a}.$$

Setzt man dagegen $\cos\alpha\tang b = \tang\psi$; so erhält man aus der Formel

$$\cos b\cos c + \cos\alpha\sin b\sin c = \cos a \ [24]:$$
$$\cos(c-\psi) = \frac{\cos a\cos\psi}{\cos b},$$

Der Winkel β, auf welchem die ganze erste Auflösung beruhet, wird in diesem Falle durch seinen Sinus gefunden. Daher kann β zwei, einander zu 180° ergänzende, Werthe haben, und die Aufgabe also zwei Auflösungen zulassen. Es ist daher nöthig, die möglichen Fälle näher zu bestimmen.

Nach [28] ist

$$\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Da wir nun immer sphärische Dreiecke voraussetzen, von denen keine Seite $> 180^0$ ist; so ist der erste Theil dieser Gleichung, also auch der zweite, offenbar immer positiv. Folglich müssen, da die absoluten Werthe von $\frac{1}{2}(a-b)$, $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ gewiß 90^0 nicht übersteigen, $a-b$ und $\alpha-\beta$ immer von einerlei Zeichen seyn, d. h. der größern Seite muß der größere Winkel gegenüberstehen, und umgekehrt. Ferner folgt aus den beiden letzten Gleichungen [27] leicht durch Division:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(a+b)}{\tang\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Da nun nach dem Vorhergehenden $\frac{1}{2}(a-b)$ und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ immer von einerlei Zeichen, und $< 90^0$ sind; so sind auch $\tang\frac{1}{2}(a-b)$, $\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, also vermöge obiger Gleichung, $\tang\frac{1}{2}(a+b)$, $\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ immer von einerlei Zeichen, so daß also zu gleicher Zeit $\frac{1}{2}(a+b) \gtreqless 90^0$, $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \gtreqless 90^0$ ist, da, für $\frac{1}{2}(a+b) = 90^0$, $\tang\frac{1}{2}(a+b) = \infty$, und folglich auch

$$\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tang\frac{1}{2}(a-b)} \cdot \tang\frac{1}{2}(a+b)$$

$= \infty$, d. i. $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^0$ ist, weil $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ nicht $> 180^0$ seyn kann.

Sei nun 1. $\frac{1}{2}(a+b) = 90^0$; so ist auch $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 90^0$, $\alpha+\beta = 180^0$. Also

a. für $\alpha = 90^0$ auch $\beta = 90^0$;

b. für $\alpha < 90^0$, $\beta > 90^0$;

c. für $\alpha > 90^0$, $\beta < 90^0$.

In diesem Falle ist also die Art von β immer völlig bestimmt.

2. Für $\frac{1}{2}(a+b) < 90^0$ ist auch $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) < 90^0$, $\alpha+\beta < 180^0$. Also

a. für $\alpha = 90^0$, $\beta < 90^0$.

b. Ist $\alpha < 90^0$, so erhellet leicht, daß sich über die

Art von β eine allgemeine Bestimmung nicht geben läßt. Ist indeß der berechnete stumpfe Werth von $\beta \overline{\gtrless} 180^0 - \alpha$; so ist $\alpha + \beta \overline{\gtrless} 180^0$, da doch $\alpha + \beta < 180^0$ seyn muß. Daher ist der spitze Werth von β zu nehmen. Ist der berechnete stumpfe Werth von $\beta < 180^0 - \alpha$, so bleibt die Aufgabe unbestimmt, und es giebt zwei Auflösungen

c. Für $\alpha > 90^0$ ist $\beta < 90^0$ und die Aufgabe bestimmt.

3. Für $\frac{1}{2}(a + b) > 90^0$ ist auch $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) > 90^0$, $\alpha + \beta > 180^0$.

a. Für $\alpha = 90^0$ ist $\beta > 90^0$.

b. Für $\alpha < 90^0$ ist $\beta > 90^0$.

c. Ist $\alpha > 90^0$, so läßt sich keine allgemeine Bestimmung geben. Wenn indeß der berechnete spitze Werth von $\beta \overline{\lessgtr} 180^0 - \alpha$ ist, so ist $\alpha + \beta \overline{\lessgtr} 180^0$, da doch $\alpha + \beta > 180^0$ seyn muß, und man muß folglich den stumpfen Werth von β nehmen. Ist der berechnete spitze Werth von β aber $> 180^0 - \alpha$, so giebt es zwei Auflösungen, da offenbar für beide Werthe $\alpha + \beta > 180^0$.

69. Gegeben a, α, β \
Gesucht b, c, γ } (63. c. β.)

Man suche b nach der Formel

$$\sin b = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha},$$

und c, γ wie in (68.). Man kann aber c, γ auch unmittelbar aus den Datis finden. Aus (65.) ergiebt sich nämlich leicht:

$$\cot a \sin c = \cot\alpha \sin\beta + \cos\beta \cos c.$$

Hieraus erhält man für $\cos\beta \tang a = \tang\varphi$:

$$\sin(c - \varphi) = \frac{\tang\beta \sin\varphi}{\tang\alpha}.$$

Eben so giebt die Formel

$$\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma$$

für $\frac{\cot\beta}{\cos a} = \tang\psi$:

$$\sin(\gamma - \psi) = \frac{\cos\alpha \sin\psi}{\cos\beta}.$$

Auch in diesem Falle wird b, auf dessen Bestimmung die erste Auflösung ganz beruhet, durch seinen Sinus bestimmt. Daher kann auch hier eine Unbestimmtheit eintreten. Man unterscheide wieder folgende Fälle.

1. Für $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=90^0$ ist nach (68.) auch $\frac{1}{2}(a+b) = 90^0$, $a+b=180^0$.

a. Für $a=90^0$ ist auch $b=90^0$.

b. Für $a<90^0$ ist $b>90^0$.

c. Für $a>90^0$ ist $b<90^0$.

2. Für $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)<90^0$ ist auch $\frac{1}{2}(a+b)<90^0$, $a+b<180^0$.

a. Für $a=90^0$ ist $b<90^0$.

b. Für $a<90^0$ läßt sich keine allgemeine Bestimmung geben. Ist der berechnete stumpfe Werth von $b \gtreqless 180^0 - a$, so ist $a+b \gtreqless 180^0$, da doch $a+b<180^0$; also muß man $b<90^0$ nehmen. Ist der berechnete stumpfe Werth von b aber $<180^0 - a$, so ist für beide Werthe $a+b<180^0$, so daß dann also zwei Auflösungen der Aufgabe möglich sind.

c. Für $a>90^0$ ist $b<90^0$.

3. Für $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)>90^0$ ist $\frac{1}{2}(a+b)>90^0$, $a+b>180^0$.

a. Für $a=90^0$ ist $b>90^0$.

b. Für $a<90^0$ ist $b>90^0$.

c. Für $a>90^0$ sey der berechnete spitze Werth von $b \lesseqgtr 180^0 - a$, also $a+b \lesseqgtr 180^0$, da doch $a+b>180^0$. Also muß man $b>90^0$ setzen. Ist aber der berechnete spitze Werth von $b>180^0 - a$, so ist für beide Werthe $a+b>180^0$, und die Aufgabe folglich zweier Auflösungen fähig.

70. Die beiden vorhergehenden Fälle nennt man die unbestimmten Fälle der sphärischen Trigonometrie. M. s. G. Heinsius, de casuum ambiguorum atque determinatorum in Trigonometria, praesertim sphaerica, diiudicatione. Lips. 1755. 4. C. F. Schulz, de casibus ambiguis, qui in resolutione triangulor.

sphaericor. occurrunt, praemissa doctrina de angulo trilatero. Halae. 1825. Außer diesen besondern Schriften vorzüglich Kästners Anfangsgründe und Bertrand Developpement nouveau de la partie élém. d. Math. T. II. Trig. Chap. V.

71. Bei der Auflösung rechtwinkliger sphärischer Dreiecke können, da der rechte Winkel α immer an sich gegeben ist, folgende Fälle eintreten:

a. Gegeben zwei Seiten.
   α. Die beiden Katheten.
   β. Die Hypotenuse und eine Kathete.

b. Gegeben eine Seite und ein schiefer Winkel.
   α. Eine Kathete und der anliegende Winkel.
   β. Eine Kathete und der Gegenwinkel.
   γ. Die Hypotenuse und ein anliegender Winkel.

c. Gegeben die beiden schiefen Winkel.

72. Gegeben b, c
Gesucht a, β, γ } (71. a. α.)

Aus [24] und [26] ergiebt sich für $\alpha = 90^0$:

$$\cos a = \cos b \cos c,$$
$$\cos\beta = \cos b \sin\gamma,$$
$$\cos\gamma = \cos c \sin\beta.$$

Nach [25] ist aber

$$\sin\gamma = \frac{\sin c \sin\beta}{\sin b}, \quad \sin\beta = \frac{\sin b \sin\gamma}{\sin c}.$$

Also
$$\cos\beta = \frac{\cos b \sin c \sin\beta}{\sin b},$$
$$\cos\gamma = \frac{\cos c \sin b \sin\gamma}{\sin c},$$

d. i.
$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b}.$$

Da sich hieraus $\sin c = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang}\beta}$ ergiebt, und $\sin c$ immer positiv ist; so haben $\operatorname{tang} b$, $\operatorname{tang}\beta$ immer einerlei Zeichen, d. h. b, β, und eben so c, γ, sind immer von einerlei Art.

73. Gegeben a, b
Gesucht c, β, γ } (71. a. β.)

Nach (72.) ist $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$. Aber auch $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta = 1 : \sin \beta$ [25]. Also $\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin a}$, wodurch β völlig bestimmt wird, da nach (72.) β mit b immer gleichartig ist. Endlich ist nach (72.)

$$\cos \gamma = \cos c \sin \beta = \frac{\cos c \sin b}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b},$$

d. i.

$$\cos \gamma = \cot a \tang b.$$

Da (Goniometrie. 41.) immer

$$\tang \tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma}; \quad \text{so ist}$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\tang a - \tang b}{\tang a + \tang b} = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, da $\frac{1}{2}\gamma$ den Quadranten nicht übersteigt. Diese Formel ist zur Berechnung besonders brauchbar, wenn γ sehr spitz ist.

74. Aus der Formel für $\cos \gamma$ in (73.) folgt leicht:

$$\tang b = \tang a \cos \gamma, \quad \tang c = \tang a \cos \beta,$$

$$\tang b \pm \tang c = \tang a (\cos \gamma \pm \cos \beta),$$

$$\tang b + \tang c = 2 \tang a \cos \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \cos \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

$$\tang b - \tang c = 2 \tang a \sin \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \sin \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

$$\frac{\tang b - \tang c}{\tang b + \tang c} = \tang \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \tang \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),$$

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)} = \tang \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \tang \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

Da der absolute Werth von $b - c$ immer $< 180^0$, der absolute Werth von $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ immer $< 90^0$, übrigens aber, da der größern Seite immer der größere Winkel gegenübersteht (68.), $b - c$ und $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ immer einerlei Vorzeichen haben; so haben auch $\sin(b - c)$, $\tang \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ immer einerlei Vorzeichen, welches also wegen obiger Gleichung auch von $\sin(b+c)$, $\tang \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ gilt. Also ist zugleich $b + c \gtrless 180^0$, $\frac{1}{2}(\beta+\gamma) \gtrless 90^0$,

oder $b+c \gtrless 180^0$, $\beta+\gamma \gtrless 180^0$. Für $b+c=180^0$ ist $\frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)}$, also auch das Product

$$\tan g \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) \tan g \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma),$$

d. i. $\tan g.\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) = \infty$: Folglich $\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)=90^0$, $\beta+\gamma=180^0$.

75. Gegeben b, γ | (71. b. α.)
Gesucht a, c, β |

Nach (73.) und (72.) ist:

$$\cot a = \frac{\cos\gamma}{\tan g\, b} = \cos\gamma \cot b,$$

$$\tan g\, c = \sin b \tan g\gamma,\ \cos\beta = \cos b \sin\gamma.$$

76. Gegeben b, β | (71. b. β.)
Gesucht a, c, γ |

Nach (72.) und (73.) hat man:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin\beta},\ \cos c = \frac{\cos a}{\cos b},$$

$$\cos\gamma = \cot a \tan g\, b.$$

Auch ist $\sin\gamma = \frac{\cos\beta}{\cos b}$.

Die Auflösung beruhet auf der Bestimmung von a, welches durch seinen Sinus gefunden wird, und demnach zwei Werthe haben kann. Sey

1. $\beta=90^0$, also $\alpha+\beta=180^0$, $a+b=180^0$ (68.). Aber $b=90^0$, da β und b von einerlei Art sind (72.). Also auch $a=90^0$.

2. $\beta<90^0$, $\alpha+\beta<180^0$, $a+b<180^0$ (68.), $b<90^0$ (72.). Hier kann also $a \lesseqgtr 90^0$ seyn. Ist jedoch der berechnete stumpfe Werth von $a \gtreqless 180^0-b$, so würde $a+b \gtreqless 180^0$ seyn, und man muß also $a<90^0$ setzen; die Aufgabe bleibt folglich nur dann unbestimmt, wenn der berechnete stumpfe Werth von $a<180^0-b$ ist.

3. $\beta>90^0$, $\alpha+\beta>180^0$, $a+b>180^0$ (68.), $b>90^0$ (72.). Es kann also hier wieder $a \lesseqgtr 90^0$ seyn. Ist jedoch der berechnete spitze Werth von $a \lesseqgtr 180^0-b$, so würde $a+b \lesseqgtr 180^0$ seyn, und

man muß folglich a $> 90^0$ nehmen, so daß also die Aufgabe nur dann unbestimmt bleibt, wenn der berechnete spitze Werth von a $> 180^0 - b$ ist.

76[a]. Gegeben a, β | Gesucht b, c, γ | (71. b. γ.)

$$\sin a : \sin b := \sin\alpha : \sin\beta = 1 : \sin\beta ;$$

also $\sin b = \sin a \sin\beta$, wodurch b ohne Zweideutigkeit bestimmt wird, da es mit β gleichartig ist (72.). Ferner ergiebt sich durch Vertauschung der Buchstaben leicht

$$\cos\beta = \cot a \operatorname{tang} c ,$$

$$\operatorname{tang} c = \frac{\cos\beta}{\cot a} = \cos\beta \operatorname{tang} a .$$

Aus (72.) erhält man

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b} = \frac{\cos\beta \operatorname{tang} a}{\sin a \sin\beta} ,$$

$$\cot\gamma = \cos a \operatorname{tang}\beta .$$

77. Gegeben β, γ | Gesucht a, b, c | (71. c.)

$$\cos a = \frac{\cot\gamma}{\operatorname{tang}\beta} \text{ (76[a].) } = \cot\beta \cot\gamma ,$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}, \quad \cos c = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta} \text{ (72.) } .$$

78. Für den Unterschied zwischen der Hypotenuse und einer Kathete hat Prony (Puissant Géodésie I. p. 64.) folgende Formeln gegeben. Da

$$\sin(a-c) = \sin a \cos c - \cos a \sin c ,$$

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin\beta} \text{ (73.)}, \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a} \text{ (76[a].) } ;$$

so erhält man leicht

$$\sin(a-c) = \frac{\sin b \cos c}{\sin\beta} - \frac{\sin b \cos c \cos\beta}{\sin\beta} .$$

$$= \frac{\sin b \cos c}{\sin\beta}(1-\cos\beta)$$

$$= \sin b \cos c \cdot \frac{2\sin\frac{1}{2}\beta^2}{2\sin\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\beta}$$

$$= \sin b \cos c \tang \tfrac{1}{2}\beta$$
$$= \frac{\sin b}{\cos b} \cos b \cos c \tang \tfrac{1}{2}\beta$$
$$= \cos a \tang b \tang \tfrac{1}{2}\beta \quad (72.)$$

Eben so

$$\cos(a - c) = \cos a \cos c + \sin a \sin c$$
$$= \cos b \cos c^2 + \frac{\sin b}{\sin \beta} \sin c \quad (72.\ 73.)$$
$$= \cos b + \left\{ \frac{\sin b}{\sin \beta} - \cos b \sin c \right\} \sin c$$
$$= \cos b + \left\{ \frac{1}{\sin \beta} - \cot b \sin c \right\} \sin b \sin c$$
$$= \cos b + \left\{ \frac{1}{\sin \beta} - \frac{1}{\tang \beta} \right\} \sin b \sin c \quad (72.)$$
$$= \cos b + \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} \cdot \sin b \sin c$$
$$= \cos b + \sin b \sin c \tang \tfrac{1}{2}\beta.$$
$$\tang(a - c) = \frac{\sin b \cos c \tang \frac{1}{2}\beta}{\cos b + \sin b \sin c \tang \frac{1}{2}\beta}$$
$$= \frac{\cos a \tang b \tang \frac{1}{2}\beta}{\cos b + \sin b \sin c \tang \frac{1}{2}\beta}.$$

79. Neper (Mirif. Logar. canonis descriptio. p. 33.) und Wolf in den Elem. Sphaericorum et Trig. sphaer. 100 — 113., haben die Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke auf eine allgemeine Regel zu bringen gesucht, welche ich hier nach Wolf darstellen will. Man denke sich nämlich mit Uebergehung des rechten Winkels die Winkel und Seiten in stetiger Folge und nehme irgend ein Stück als mittleres (pars media) an; so nennt Wolf die beiden unmittelbar daran liegenden Stücke verbundene, die von dem mittlern durch irgend ein anderes Stück getrennten dagegen getrennte Stücke (partes conjunctas et sejunctas.). Leicht erhellet, daß die im Vorhergehenden gefundenen Formeln zur Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke sich auch auf folgende Art darstellen lassen:

$$\cos a = \cot \beta \cot \gamma \quad (76^*)$$
$$\cos(90^\circ - b) = \cot \gamma \cot(90^\circ - c) \quad (72),$$
$$\cos(90^\circ - c) = \cot \beta \cot(90^\circ - b) \quad (72),$$
$$\cos \beta = \cot a \cot(90^\circ - c) \quad (73),$$
$$\cos \gamma = \cot a \cot(90^\circ - b) \quad (73).$$

Aus diesen Formeln folgt unmittelbar Wolfs zweiter Satz (a. a. O. §. 108.): In omni triangulo rectangulo sphaerico, cujus nullum latus est quadrans, si crurum b, c complementa ad quadrantem considerentur ut crura ipsa, rectangulum ex sinu toto in cosinum partis mediae aequale est rectangulo ex cotangentibus partium conjunctarum.

Ferner ist nach dem Obigen:

$$\cos a = \sin(90^\circ - b)\sin(90^\circ - c) \quad (72),$$
$$\cos(90^\circ - b) = \sin a \sin\beta \quad (73),$$
$$\cos(90^\circ - c) = \sin a \sin\gamma \quad (73),$$
$$\cos\beta = \sin\gamma \sin(90^\circ - b) \quad (72)$$
$$\cos\gamma = \sin\beta \sin(90^\circ - c) \quad (72).$$

Dies giebt Wolfs ersten Satz (a. a. O. §. 100.): In omni triangulo sphaerico rectangulo, etc. wie vorher, rectangulum ex sinu toto in cosinum partis mediae aequatur rectangulo ex sinibus partium sejunctarum.

In obigen zehn Gleichungen, also auch in diesen beiden Regeln, ist offenbar die Auflösung aller bei rechtwinkligen Dreiecken vorkommender Fälle enthalten. M. s. auch Wolfs trigonom. Tafeln. Halle. 1772. S. 3.

Nimmt man nicht statt b, c, sondern statt β, γ, a die Complemente; so erhalten die Formeln folgende Gestalt:

$$\sin(90^\circ - a) = \tan(90^\circ - \beta)\tan(90^\circ - \gamma),$$
$$\sin b = \tan(90^\circ - \gamma)\tan c,$$
$$\sin c = \tan(90^\circ - \beta)\tan b,$$
$$\sin(90^\circ - \beta) = \tan(90^\circ - a)\tan c,$$
$$\sin(90^\circ - \gamma) = \tan(90^\circ - a)\tan b.$$

Sinus totus cum sinu partis mediae aequalis est tangentibus partium circumpositarum (conjunctarum) (a. a. O. §. 111.)

$$\sin(90^\circ - a) = \cos b \cos c,$$
$$\sin b = \cos(90^\circ - a)\cos(90^\circ - \beta),$$
$$\sin c = \cos(90^\circ - a)\cos(90^\circ - \gamma),$$
$$\sin(90^\circ - \beta) = \cos(90^\circ - \gamma)\cos b,$$
$$\sin(90^\circ - \gamma) = \cos(90^\circ - \beta)\cos c.$$

Sinus totus cum sinu partis mediae aequatur cosinibus partium oppositarum (sejunctarum)(a.a.O. §.103.)

M. s. über diese Regeln, deren Inbegriff Wolf Trigonometria catholica (Elementa Mathes. 103.) nennt, Baermann de regulis trig. sphaer. catholicis. Witemb. 1766., und einen Aufsatz von Pingré in den Mém. de Paris. 1756. Montucla (T. II. p. 25.) tadelt die französischen Schriftsteller, daß sie diese Regeln übergingen, und lobt Wolf und die Engländer. Da jedes schiefwinklige Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, so sind die Regeln auch bei der Auflösung schiefwinkliger Dreiecke brauchbar. Auch auf ebene Dreiecke sind sie anwendbar, wenn man statt der trigonometrischen Linien der Seiten die Seiten selbst setzt.

Auflösung sphärischer Dreiecke in besondern Fällen.

80. Aus (29.) ergiebt sich

$$\tang \tfrac{1}{2} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - 1}{(e^{y\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}.$$

Hat man nun zwischen x und y die Gleichung $\tang \frac{1}{2} x = \Theta \tang \frac{1}{2} y$ wo Θ irgend eine constante Größe bezeichnet; so ist

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - 1}{e^{x\sqrt{-1}} + 1} = \frac{\Theta\left(e^{y\sqrt{-1}} - 1\right)}{e^{y\sqrt{-1}} + 1},$$

$$e^{x\sqrt{-1}} = \frac{(\Theta + 1)\, e^{y\sqrt{-1}} - (\Theta - 1)}{\Theta + 1 - (\Theta + 1)\, e^{y\sqrt{-1}}},$$

oder, für $\frac{\Theta - 1}{\Theta + 1} = \varkappa$:

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{y\sqrt{-1}} \cdot \left\{\frac{1 - \varkappa\, e^{-y\sqrt{-1}}}{1 - \varkappa\, e^{y\sqrt{-1}}}\right\},$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$e^{x\sqrt{-1}} = e^{-y\sqrt{-1}} \cdot \left\{\frac{1 - \frac{1}{\varkappa} e^{y\sqrt{-1}}}{1 - \frac{1}{\varkappa} e^{-y\sqrt{-1}}}\right\}.$$

In Beziehung auf den ersten Ausdruck für $e^{x\sqrt{-1}}$ erhält man leicht:

$$x\sqrt{-1} = y\sqrt{-1} + \log n\left(1 - \varkappa e^{-y\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \log n\left(1 - \varkappa e^{y\sqrt{-1}}\right)$$
$$= y\sqrt{-1} + \varkappa\left(e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varkappa^2\left(e^{2y\sqrt{-1}} - e^{-2y\sqrt{-1}}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\varkappa^3\left(e^{3y\sqrt{-1}} - e^{-3y\sqrt{-1}}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\varkappa^4\left(e^{4y\sqrt{-1}} - e^{-4y\sqrt{-1}}\right)$$
$$+ \ldots\ldots$$
$$= y\sqrt{-1} + 2\varkappa \sin y.\sqrt{-1} + \tfrac{2}{2}\varkappa^2 \sin 2y.\sqrt{-1}$$
$$+ \tfrac{2}{3}\varkappa^3 \sin 3y.\sqrt{-1} + \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}y + \varkappa \sin y + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \sin 2y$$
$$+ \tfrac{1}{3}\varkappa^3 \sin 3y + \tfrac{1}{4}\varkappa^4 \sin 4y + \ldots$$

(Logarithmus. 25. Thl. I. S. 877.)

In Beziehung auf den zweiten Ausdruck für $e^{x\sqrt{-1}}$ ist:

$$x\sqrt{-1} = -y\sqrt{-1} + \log n\left(1 - \frac{1}{\varkappa}e^{y\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \log n\left(1 - \frac{1}{\varkappa}e^{-y\sqrt{-1}}\right)$$
$$= -y\sqrt{-1} - \frac{1}{\varkappa}\left(e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \frac{1}{2\varkappa^2}\left(e^{2y\sqrt{-1}} - e^{-2y\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \frac{1}{3\varkappa^3}\left(e^{3y\sqrt{-1}} - e^{-3y\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \frac{1}{4\varkappa^4}\left(e^{4y\sqrt{-1}} - e^{-4y\sqrt{-1}}\right)$$
$$- \ldots\ldots$$
$$= -y\sqrt{-1} - \frac{2}{\varkappa}\sin y.\sqrt{-1} - \frac{2}{2\varkappa^2}\sin 2y.\sqrt{-1}$$
$$- \frac{2}{3\varkappa^3}\sin 3y.\sqrt{-1} - \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}x = -\tfrac{1}{2}y - \frac{1}{\varkappa}\sin y - \frac{1}{2\varkappa^2}\sin 2y$$
$$- \frac{1}{3\varkappa^3}\sin 3y - \frac{1}{4\varkappa^4}\sin 4y - \ldots$$

Die eine der beiden für $\tfrac{1}{2}x$ gefundenen Reihen wird offenbar immer convergiren.

Da $\tan g\tfrac{1}{2}y = \frac{1}{\Theta}\tan g\tfrac{1}{2}x$, und

$$\frac{\frac{1}{\Theta}-1}{\frac{1}{\Theta}+1}=\frac{1-\Theta}{1+\Theta}=-\varkappa$$

ist; so erhält man leicht durch Vertauschung der Buchstaben:

$$\tfrac{1}{2}y=\tfrac{1}{2}x-\varkappa\sin x+\tfrac{1}{2}\varkappa^2\sin 2x$$
$$-\tfrac{1}{3}\varkappa^3\sin 3x+\tfrac{1}{4}\varkappa^4\sin 4x-\ldots$$
$$=-\tfrac{1}{2}x+\frac{1}{\varkappa}\sin x-\frac{1}{2\varkappa^2}\sin 2x$$
$$+\frac{1}{3\varkappa^3}\sin 3x-\frac{1}{4\varkappa^4}\sin 4x+\ldots$$

81. Hieraus ergiebt sich eine merkwürdige Auflösung durch Reihen für den Fall, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Vergleicht man nämlich mit der allgemeinen Gleichung

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x=\Theta\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}y$$

die Neperschen Gleichungen:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)},$$
$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)},$$

oder

$$\text{tang}\,\{90^\circ-\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\}=\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)}\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\text{tang}\,\{90^\circ-\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)}\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha;$$

so ist in Bezug auf die erste:

$$\tfrac{1}{2}x=90^\circ-\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma),\ \tfrac{1}{2}y=\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$\Theta=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}(b-c)}$; und in Bezug auf die zweite:

$$\tfrac{1}{2}x=90^\circ-\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma),$$
$$\tfrac{1}{2}y=\tfrac{1}{2}\alpha,\ \Theta=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}(b-c)}.$$

Also nach (80.), da

$$1,\ \varkappa=\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)-\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)+\cos\frac{1}{2}(b-c)}$$
$$=-\frac{2\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}=-\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}c}$$

ist:

$$\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}c}\sin\alpha$$
$$-\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}b^2}{2\cot\frac{1}{2}c^2}\sin 2\alpha+\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}b^3}{3\cot\frac{1}{2}c^3}\sin 3\alpha-\ldots$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\cot\tfrac{1}{2}c}{\tang\tfrac{1}{2}b}\sin\alpha$$

$$+ \frac{\cot\tfrac{1}{2}c^2}{2\tang\tfrac{1}{2}b^2}\sin 2\alpha - \frac{\cot\tfrac{1}{2}c^3}{3\tang\tfrac{1}{2}b^3}\sin 3\alpha + \ldots$$

$$2,\quad x = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(b+c) - \sin\tfrac{1}{2}(b-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+c) + \sin\tfrac{1}{2}(b-c)}$$

$$= \frac{2\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{2\cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c} = \frac{\tang\tfrac{1}{2}b}{\tang\tfrac{1}{2}c},$$

$$\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha - \frac{\tang\tfrac{1}{2}b}{\tang\tfrac{1}{2}c}\sin\alpha$$

$$- \frac{\tang\tfrac{1}{2}b^2}{2\tang\tfrac{1}{2}c^2}\sin 2\alpha - \frac{\tang\tfrac{1}{2}b^3}{3\tang\tfrac{1}{2}c^3}\sin 3\alpha - \ldots$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{\tang\tfrac{1}{2}c}{\tang\tfrac{1}{2}b}\sin\alpha$$

$$+ \frac{\tang\tfrac{1}{2}c^2}{2\tang\tfrac{1}{2}b^2}\sin 2\alpha + \frac{\tang\tfrac{1}{2}c^3}{3\tang\tfrac{1}{2}b^3}\sin 3\alpha + \ldots$$

Aus $\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$, $\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$ ergiebt sich leicht β und γ.

Die Seite a findet man auf folgende Art auch durch eine Reihe. Es ist

$$\cos a = \sin b\sin c\cos\alpha + \cos b\cos c$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{1 - \sin b\sin c\cos\alpha - \cos b\cos c}{2},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{1 + \sin b\sin c\cos\alpha + \cos b\cos c}{2}.$$

Den Ausdruck für $\sin\tfrac{1}{2}a^2$ setze man $= p^2 - 2pq\cos\alpha + q^2$; also

$$p^2 + q^2 = \frac{1 - \cos b\cos c}{2},\quad pq = \tfrac{1}{4}\sin b\sin c.$$

$$p^2 + q^2 = \frac{1 - (1 - 2\sin\tfrac{1}{2}b^2)(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}c^2)}{2}$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}b^2\cos\tfrac{1}{2}c^2 + \cos\tfrac{1}{2}b^2\sin\tfrac{1}{2}c^2$$

$$2pq = 2\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c \,.\, \cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c.$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen giebt auf beiden Seiten ein vollkommenes Quadrat. Also ist entweder

$$p = \sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c,\quad q = \cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c,$$

oder

$$p = \cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c,\quad q = \sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c.$$

Also entweder

$$\frac{q}{p} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c}{\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c} = \frac{\tang\tfrac{1}{2}c}{\tang\tfrac{1}{2}b},$$

oder

$$\frac{q}{p} = \frac{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\tang\frac{1}{2}c}.$$

Aber $p^2 - 2pq\cos\alpha + q^2 = \sin\frac{1}{2}a^2$

$$= p^2 - 2pq\,.\,\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2} + q^2$$

$$= p^2 - pq(e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}) + q^2$$

$$= (p - q e^{\alpha\sqrt{-1}})(p - q e^{-\alpha\sqrt{-1}})$$

$$= p^2\left(1 - \frac{q}{p}e^{\alpha\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \frac{q}{p}e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right),$$

$$\begin{aligned}2\operatorname{logn}\sin\tfrac{1}{2}a = 2\operatorname{logn}p &- \frac{q}{p}\left(e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right)\\ &- \frac{q^2}{2p^2}\left(e^{2\alpha\sqrt{-1}} + e^{-2\alpha\sqrt{-1}}\right)\\ &- \frac{q^3}{3p^3}\left(e^{3\alpha\sqrt{-1}} + e^{-3\alpha\sqrt{-1}}\right)\\ &- \frac{q^4}{4p^4}\left(e^{4\alpha\sqrt{-1}} + e^{-4\alpha\sqrt{-1}}\right)\\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

woraus sich, wenn man für $\frac{q}{p}$ den einen oder den andern obigen Werth setzt, leicht ergiebt:

$$\begin{aligned}\operatorname{logn}\sin\tfrac{1}{2}a &= \operatorname{logn}(\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)\\ &- \frac{\tang\frac{1}{2}c}{\tang\frac{1}{2}b}\cos\alpha - \frac{\tang\frac{1}{2}c^2}{2\tang\frac{1}{2}b^2}\cos 2\alpha - \ldots\\ &= \operatorname{logn}(\cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c)\\ &- \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\tang\frac{1}{2}c}\cos\alpha - \frac{\tang\frac{1}{2}b^2}{2\tang\frac{1}{2}c^2}\cos 2\alpha - \ldots\end{aligned}$$

Setzt man

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = p^2 + 2pq\cos\alpha + q^2;$$

so erhält man nach einer ganz ähnlichen Entwickelung:

$$\begin{aligned}\operatorname{logn}\cos\tfrac{1}{2}a &= \operatorname{logn}(\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)\\ &+ \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}c}\cos\alpha - \frac{\tang\frac{1}{2}b^2}{2\cot\frac{1}{2}c^2}\cos 2\alpha + \ldots\\ &= \operatorname{logn}(\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c)\\ &+ \frac{\cot\frac{1}{2}c}{\tang\frac{1}{2}b}\cos\alpha - \frac{\cot\frac{1}{2}c^2}{2\tang\frac{1}{2}b^2}\cos 2\alpha + \ldots\end{aligned}$$

82. Vergleicht man die allgemeine Gleichung in (80.) mit den Neperschen Gleichungen

$$\tang\tfrac{1}{2}(b + c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}\tang\tfrac{1}{2}a,$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b-c)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a;$$

so erhält man leicht eine Auflösung durch Reihen für den Fall, wo zwei Winkel und die Zwischenseite gegeben sind. In Bezug auf die erste Gleichung ist $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}a$, $\Theta=\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$; in Bezug auf die zweite dagegen $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(b-c)$, $\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}a$, $\Theta=\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$.

$$1,\quad x=\frac{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)-\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{2\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}{\cot\frac{1}{2}\gamma},$$
$$\tfrac{1}{2}(b+c)=\tfrac{1}{2}a+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}{\cot\frac{1}{2}\gamma}\sin a$$
$$+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta^2}{2\cot\frac{1}{2}\gamma^2}\sin 2a+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta^3}{3\cot\frac{1}{2}\gamma^3}\sin 3a+\ldots$$
$$=-\tfrac{1}{2}a-\frac{\cot\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}\sin a$$
$$-\frac{\cot\frac{1}{2}\gamma^2}{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta^2}\sin 2a-\frac{\cot\frac{1}{2}\gamma^3}{3\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta^3}\sin 3a-\ldots$$
$$2,\quad x=\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)-\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)+\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$
$$=-\frac{2\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}=-\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta},$$
$$\tfrac{1}{2}(b-c)=\tfrac{1}{2}a-\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}\sin a$$
$$+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma^2}{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta^2}\sin 2a-\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma^3}{3\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta^3}\sin 3a+\ldots$$
$$=-\tfrac{1}{2}a+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma}\sin 3a-\ldots$$
$$-\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta^2}{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma^2}\sin 2a+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta^3}{3\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma^3}\sin 3a-\ldots$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man b, c. Um nun noch α zu finden, versehe man jeden Buchstaben in den Formeln für $\operatorname{logn}\sin\frac{1}{2}a$, $\operatorname{logn}\cos\frac{1}{2}a$ in (81.) mit einem Index, so daß diese Formeln für das Supplementardreieck gelten. Da aber immer $a'+\alpha=180^0$, $b'+\beta=180^0$, $c'+\gamma=180^0$, $\alpha'+a=180^0$; also $\frac{1}{2}a'+\frac{1}{2}\alpha=90^0$, $\frac{1}{2}b'+\frac{1}{2}\beta=90^0$, $\frac{1}{2}c'+\frac{1}{2}\gamma=90^0$, $\frac{1}{2}\alpha'+\frac{1}{2}a=90^0$ ist; so ist $\sin\frac{1}{2}a'=\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}a'=\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}b'=\cos\frac{1}{2}\beta$, $\cos\frac{1}{2}c'=\sin\frac{1}{2}\gamma$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}b'=\cot\frac{1}{2}\beta$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c'=\cot\frac{1}{2}\gamma$, $\cot\frac{1}{2}c'$

$= \tan\frac{1}{2}\gamma$. Auch ist $\alpha' + a = 180^0$, $2\alpha' + 2a = 2.180^0$, $3\alpha' + 3a = 3.180^0$, u. s. f.; also $\cos\alpha' = -\cos a$, $\cos 2\alpha' = \cos 2a$, $\cos 3\alpha' = -\cos 3a$, u. s. f. Also

$$\text{logn}\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \text{logn}(\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma) + \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma}{\cot\frac{1}{2}\beta}\cos a - \frac{\cot\frac{1}{2}\gamma^2}{2\cot\frac{1}{2}\beta^2}\cos 2a + \ldots$$
$$= \text{logn}(\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma) + \frac{\cot\frac{1}{2}\beta}{\cot\frac{1}{2}\gamma}\cos a - \frac{\cot\frac{1}{2}\beta^2}{2\cot\frac{1}{2}\gamma^2}\cos 2a + \ldots$$
$$\text{logn}\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \text{logn}(\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma) - \frac{\cot\frac{1}{2}\beta}{\tan\frac{1}{2}\gamma}\cos a - \frac{\cot\frac{1}{2}\beta^2}{2\tan\frac{1}{2}\gamma}\cos 2a - \ldots$$
$$= \text{logn}(\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma) - \frac{\tan\frac{1}{2}\gamma}{\cot\frac{1}{2}\beta}\cos a - \frac{\tan\frac{1}{2}\gamma^2}{2\cot\frac{1}{2}\beta^2}\cos 2a - \ldots$$

M. s. über diese Entwickelungen Legendre Géométrie. p. 420. Littrow theoret. u. prakt. Astr. I. S. 10.

83. Soll aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks, von denen zwei, z. B. a, b, nahe $= 90^0$ sind, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel gefunden werden; so setze man $a = 90^0 - a_1$; $b = 90^0 - b_1$, $\gamma = c + x$, wo nach der Voraussetzung a_1, b_1, x nur kleine Größen sind. Es ist

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a\cos b}{\sin a\sin b},$$
$$\cos(c + x) = \frac{\cos c - \sin a_1\sin b_1}{\cos a_1\cos b_1}$$
$$= \frac{\cos c - (a_1 - \frac{1}{6}a_1^3 + \ldots)(b_1 - \frac{1}{6}b_1^3 + \ldots)}{(1 - \frac{1}{2}a_1^2 + \ldots)(1 - \frac{1}{2}b_1^2 + \ldots)}$$
$$= \frac{\cos c - a_1b_1}{1 - \frac{1}{2}a_1^2 - \frac{1}{2}b_1^2},$$

wenn man Größen der vierten Ordnung vernachlässigt.

$$\cos(c + x) = \cos c\cos x - \sin c\sin x$$
$$= \cos c(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \ldots) - \sin c(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \ldots)$$
$$= \cos c - x\sin c,$$

wenn man bloß die erste Potenz von x beibehält. Also

$$\cos c - x\sin c = \frac{\cos c - a_1b_1}{1 - \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1)^2},$$

$$= \frac{(\cos c - a_1 b_1)(1 + \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}b_1^2)}{1 - \frac{1}{4}(a_1^2 + b_1^2)^2}.$$

Behält man nun bloß a_1^2, b_1^2 bei; so ergiebt sich

$$\cos c - x \sin c = \cos c + \tfrac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2)\cos c - a_1 b_1,$$

$$x = \frac{a_1 b_1 - \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2)\cos c}{\sin c}.$$

Dies giebt, für $\frac{1}{2}(a_1 + b_1) = p$, $\frac{1}{2}(a_1 - b_1) = q$, $a_1 = p + q$, $b_1 = p - q$:

$$x = \frac{p^2(1 - \cos c) - q^2(1 + \cos c)}{\sin c}$$

$$= p^2 \tang \tfrac{1}{2}c - q^2 \cot \tfrac{1}{2}c.$$

In Secunden ist, wenn auch p, q in Secunden ausgedrückt sind:

$$x = \frac{p^2}{\varrho} \tang \tfrac{1}{2}c - \frac{q^2}{\varrho} \cot \tfrac{1}{2}c.$$

Bei der Reduction der Winkel auf den Horizont in der Geodäsie ist diese Gleichung von häufigem Gebrauch, da die Ebene des gemessenen Winkels selten bedeutend von der horizontalen abweicht.

84. Sind die Seiten eines sphärischen Dreiecks in Bezug auf den Radius der Kugel, zu welcher es gehört, sehr klein, so wird man auch mit Vortheil Näherungsformeln gebrauchen. Ist r der Halbmesser der Kugel, so sind $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ die Seiten des mit dem gegebenen gleichwinkligen Dreiecks auf der Oberfläche einer Kugel, deren Halbmesser $= 1$ ist. Also

$$\cos \alpha = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

wo $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ sehr kleine Brüche sind. Entwickelt man die trigonometrischen Linien in Reihen, so erhält man mit Vernachlässigung aller Glieder, deren Dimension die vierte übersteigt:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24r^4} - \frac{b^2c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2}\left(1 - \frac{b^2}{6r^2} - \frac{c^2}{6r^2}\right)}.$$

Multiplicirt man nun im Zähler und Nenner mit

$$1+\frac{b^2}{6r^2}+\frac{c^2}{6r^2};$$

so erhält man immer mit Vernachlässigung der Glieder von höhern Dimensionen als der vierten:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)}{24bcr^2}.$$

Man denke sich nun ein ebenes Dreieck $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, dessen Seiten den Seiten a, b, c des gegebenen sphärischen Dreiecks gleich sind; so ergiebt sich aus (7. 9.) augenblicklich:

$$\cos\alpha=\cos\alpha_1-\frac{bc}{6r^2}\sin\alpha_1{}^2.$$

Setzt man aber $\alpha=\alpha_1+x$; so erhält man wie in (83.)

$$\cos\alpha=\cos\alpha_1-x\sin\alpha_1.$$

Also $x=\frac{bc}{6r^2}\sin\alpha_1$, und folglich:

$$\alpha=\alpha_1+\frac{bc}{6r^2}\sin\alpha_1,$$

$$\beta=\beta_1+\frac{ac}{6r^2}\sin\beta_1,$$

$$\gamma=\gamma_1+\frac{ab}{6r^2}\sin\gamma_1.$$

Bezeichnet nun f den Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha_1\beta_1\gamma_1$; so ist (19.):

$$f=\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha_1=\tfrac{1}{2}ac\sin\beta_1=\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma_1.$$

Also
$$\alpha=\alpha_1+\frac{f}{3r^2},$$

$$\beta=\beta_1+\frac{f}{3r^2},$$

$$\gamma=\gamma_1+\frac{f}{3r^2};$$

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\alpha+\beta+\gamma-\frac{f}{r^2}=180^0,$$

$$\frac{f}{r^2}=\alpha+\beta+\gamma-180^0=\varepsilon,$$

wo ε, wie wir weiter unten mit Mehrerem sehen werden, der sphärische Exceß des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ genannt wird. Also

$$\alpha_1=\alpha-\tfrac{1}{3}\varepsilon,$$
$$\beta_1=\beta-\tfrac{1}{3}\varepsilon,$$
$$\gamma_1=\gamma-\tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Hieraus ergiebt sich der merkwürdige Satz, daß ein

sphärisches Dreieck, dessen Seiten gegen den Halbmesser der Kugel, zu welcher es gehört, sehr klein sind, sich wie ein ebenes auflösen läßt, welches dieselben Seiten a, b, c, und die Winkel $\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon$, $\beta - \frac{1}{3}\varepsilon$, $\gamma - \frac{1}{3}\varepsilon$ hat, wo ε den sphärischen Exceß des gegebenen Dreiecks bezeichnet, d. h. den Ueberschuß seiner drei Winkel über 180°.

Dieser für die Geodäsie wichtige Satz ist von Legendre gefunden worden, zuerst ohne Beweis in den Mém. de l'Acad. des sc. 1787. p. 338., mit einem Beweise in Délambre méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien. Paris. An VII. p. 12. 13. Auch Lagrange beweiset den Satz in einem Mémoire sur la Trig. sphér. im Journal de l'école polytechnique. Nr. 6. Ferner s. m. auch Buzengeiger Vergleichung zweier sehr kleinen Dreiecke von gleichen Seiten, wovon das eine sphärisch, das andere eben ist. Zeitschr. für Astr. Bd. 6. S. 264. Von der Vergleichung ebener und sphär. Dreiecke handelt auch Tralles in dem Aufsatze: Analytische Betrachtung ebener und sphärischer Dreiecke und deren Analogie. Abhandlungen der math. Kl. der Berl. Akad. für 1816. 17. Berl. 1819. S. 65 — 133. Sehr merkwürdige Erweiterungen dieses Satzes s. m. in der überaus wichtigen Abhandlung von Gauß: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Gott. 1828., die auch für sphäroidische Trigonometrie, wovon nachher die Rede seyn wird, in vieler Beziehung von großer Wichtigkeit ist.

85. ε läßt sich immer aus den gegebenen Stücken des als ein ebenes betrachteten sphärischen Dreiecks berechnen, mittelst der in (19.) gegebenen Formeln für den Inhalt ebener Dreiecke. Denn hat man f, so hat man auch $\varepsilon = \frac{f}{r^2}$ in Theilen des Halbmessers, da natürlich r als gegeben anzusehen ist.

Ist nun x die Anzahl der in ε, als Bogen eines Krei-

ses, dessen Halbmesser = 1 ist, betrachtet, enthaltenen Secunden; so hat man, da Arc 1″ = sin 1″ gesetzt werden kann:

$$\sin 1'' : \frac{f}{r^2} = 1'' : x,$$

$$x = \frac{f}{r^2 \sin 1''}.$$

Wären z. B. b, c, α gegeben; so müßte man zuerst die Längen von b, c aus dem gegebenen Radius r, daraus $f = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$, und hieraus mittelst obiger Formel x berechnen. Dann betrachtet man das gegebene Dreieck als ein ebenes, in welchem b, c, $\alpha - \frac{1}{3}x$ gegeben sind, und berechnet hieraus a, $\beta - \frac{1}{3}x$, $\gamma - \frac{1}{3}x$, woraus man dann, da x schon gefunden, auch a, β, γ findet; a muß man dann nur noch in Secunden ausdrücken. In einzelnen Fällen wird die Rechnung noch einige Abkürzungen zulassen, die leicht aufzufinden sind.

Die Auflösung sphärischer Dreiecke durch Zirkel und Lineal lehrt Cagnoli im Traité de Trig. p. 339. Hierüber sind mit Mehrerem die Lehrbücher der descriptiven Geometrie nachzusehen. Z. B. Lacroix Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes. Paris. 1812. p. 37. 38.

Flächeninhalt sphärischer Dreiecke.

86. Von dem Flächeninhalt sphärischer Dreiecke ist schon in dem Artikel Kugel. 35. ff. gehandelt. Indeß wird es, um das Ganze im Zusammenhange zu übersehen, dienlich seyn, den Fundamentalsatz hier nochmals zu wiederholen, da überhaupt der geometrische Beweis desselben nicht immer ganz streng geführt wird.

87. Wenn in zwei gleichen Kreisen (Fig. 54.) AD = A′D′, AB = A′B′ ist; so sind die Winkel BAD B′A′D′ einander gleich. Dies folgt leicht aus der Congruenz der Dreiecke ABC und A′B′C′.

88. Wenn auf zwei gleichen Kugelflächen (oder auch

auf einer) zwei Segmente von zwei gleichen Bogen größter Kugelkreise, und zwei andern Bogen, die zu zwei gleichen kleinern Kugelkreisen gehören, eingeschlossen werden; so sind die beiden Segmente einander gleich.

Sind nämlich ADB, A′D′B′ (Fig. 55.) die beiden größten Kreisbogen, so sind, da diese Bogen einander gleich sind, auch die Sehnen AB, A′B′, und folglich auch die zu gleichen Kreisen gehörenden Segmente AEB, A′E′B′ einander gleich. Legt man nun größte Kreise auf die Sehnen AB, A′B′ senkrecht, so sind EFD, E′F′D′ die Neigungswinkel der Ebenen ADB, AEB und A′D′B′, A′E′B′ gegen einander. Wegen der Gleichheit der Segmente ADB, A′D′B′ und AEB, A′E′B′ sind auch die Höhen derselben gleich, d. i. FD = F′D′, FE = F′E′. Also ist nach (87.) auch der Winkel DFE dem Winkel D′F′E′ gleich, woraus unmittelbar folgt, daß sich die beiden Kugeln so in einander legen lassen, daß die sphärischen Segmente sich decken, also einander gleich sind.

89. Zwei sphärische Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ (Fig. 56.), deren Seiten einander gleich sind, sind dem Flächeninhalte nach gleich. Wegen der Gleichheit der Seiten sind die Sehnen $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, $\beta\gamma = \beta'\gamma'$, $\alpha\gamma = \alpha'\gamma'$. Folglich die ebenen Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ einander congruent, und demnach die um dieselben beschriebenen kleinen Kugelkreise einander gleich. Also sind nach (88.) auch die Segmente $\sigma = s$, $\sigma' = s'$, $\sigma'' = s''$. Wegen der Gleichheit der kleinen Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ sind aber offenbar auch die beiden entsprechenden Abschnitte der Kugelfläche einander, und folglich, wenn man von beiden die gleichen Größen $\sigma + \sigma' + \sigma''$ und $s + s' + s''$ abzieht, auch die sphärischen Dreiecke einander gleich.

90. Wenn sich auf der Oberfläche einer Halbkugel zwei größte Kugelkreise in α (Fig. 57.) schneiden; so ist immer $\alpha\beta\gamma + \alpha\delta\varepsilon$ dem zu dem Winkel α gehörenden Segment der Kugelfläche gleich, weil, wenn man sich die Kugelkreise bis zu ihrem zweiten Durchschnitt ζ verlängert denkt, die Dreiecke $\alpha\delta\varepsilon$, $\beta\gamma\zeta$ offenbar gleiche Seiten haben, und demnach das letztere statt des erstern gesetzt werden kann

(89.), also $\alpha\beta\gamma + \alpha\delta\varepsilon = \alpha\beta\zeta\gamma$, welches wir durch Segm α bezeichnen wollen, ist.

Sind für zwei solche Segmente Segm α und Segm β die einschließenden Bogen, wie immer, halbe größte Kugelkreise; so gehören zu gleichen Winkeln offenbar gleiche Segmente, und es ist folglich für $\alpha \gtreqless \beta$ auch Segm $\alpha \gtreqless$ Segm β. Also

$$\text{Segm}\,\alpha : \text{Segm}\,\beta = \alpha : \beta$$

(Verhältniß. 9. und 11.)

Nimmt man daher den sphärischen Octanten zur Flächeneinheit, den rechten Winkel zur Winkeleinheit an; so ist

$$\text{Segm}\,\alpha : 8 = \alpha : 4.$$

Also
$$\text{Segm}\,\alpha = \frac{8\alpha}{4} = 2\alpha.$$

91. Läßt man Alles wie vorher, so ist (Fig. 58.) $\alpha\zeta\vartheta + \alpha\delta\varepsilon + \beta\varepsilon\varkappa + \beta\zeta\eta + \gamma\eta\delta + \gamma\vartheta\varkappa =$ der Halbkugel $+ 2\alpha\beta\gamma$, d. i., wenn wir den Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ durch $\triangle$ bezeichnen, nach (90.):

$$\text{Segm}\,\alpha + \text{Segm}\,\beta + \text{Segm}\,\gamma = 4 + 2\triangle$$
$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 4 + 2\triangle$$
$$\triangle = \alpha + \beta + \gamma - 2,$$

der sphärische Octant als Flächeneinheit, der rechte Winkel als Winkeleinheit angenommen.

Da $\triangle$ nie negativ, auch nicht $= 0$ seyn kann; so ergiebt sich aus dieser Formel der bekannte Satz, daß die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks immer zusammen mehr als 2R betragen. Drückt man die Winkel in Graden aus, und setzt die ganze Kugelfläche $= 4r^2\pi$; so wird

$$\triangle = \left\{\frac{\alpha}{90^0} + \frac{\beta}{90^0} + \frac{\gamma}{90^0} - \frac{180^0}{90^0}\right\}.\frac{4r^2\pi}{8}$$
$$= \frac{(\alpha + \beta + \gamma - 180^0).r^2\pi}{180^0}.$$

M. vergl. den Art. Kugel. 35. 36.

92. Man habe nun ein sphärisches Vieleck von n Seiten. Die Summen der Winkel der Dreiecke, in welche

es durch Diagonalen zerlegt werden kann, seyen s', s'', s''', u. s. f.; so sind s' — 2, s'' — 2, s''' — 2, u. s. f. die Flächenräume dieser Dreiecke, also s' + s'' + s''' + ... — 2(n — 2) = s — 2n + 4 der Flächenraum des Vielecks, wenn s die Summe seiner Winkel bezeichnet. Sind die Winkel in Graden ausgedrückt, so ist der Flächeninhalt des Vielecks

$$= \left\{ \frac{s}{90^0} - (n - 2) \cdot \frac{180^0}{90^0} \right\} \cdot \frac{4r^2\pi}{8}$$

$$= \frac{(s - (n - 2) \cdot 180^0) \cdot r^2\pi}{180^0}.$$

Da der Flächeninhalt des Vielecks nie $\overline{\gtrless}$ o werden kann; so folgt aus dieser Formel leicht, daß immer $s > (n - 2) \cdot 180^0$, oder $s > 2(n - 2) \cdot 90^0$, $s > 2(n - 2)R$ ist. Auch ist bei einem convexen sphärischen Vieleck immer $s < 2n \cdot 90^0$, $s < 2nR$. Wäre nämlich $s \overline{\gtrless} 2n \cdot 90^0$, $s \overline{\gtrless} n \cdot 180^0$; so wäre der Flächeninhalt $\overline{\gtrless} 2r^2\pi$, d. i. $\overline{\gtrless}$ als die Fläche der Halbkugel, welches, weil das Vieleck convex seyn soll, nicht statt finden kann.

Ueber die Flächen sphärischer Vielecke s. m. auch Quetelet: Mémoire sur une formule génerale pour déterminer la surface d'un polygone sphérique formés d'arcs de grands ou petits cercles. Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles. T. II. 1822. p. 105.

93. Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß die Berechnung des Inhaltes sphärischer Dreiecke ganz auf die Berechnung des sphärischen Excesses (84.) zurückkommt. Wir fassen daher die merkwürdigsten Formeln für denselben hier zusammen. Es ist immer $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$, $\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma - 90^0$.

94. $$\tang \tfrac{1}{2}\varepsilon = - \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}\gamma - \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}\gamma + \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

$$= \frac{\{\cos\frac{1}{2}(a - b) - \cos\frac{1}{2}(a + b)\}\sin\gamma}{2\{\cos\frac{1}{2}(a - b)\cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \cos\frac{1}{2}(a + b)\sin\frac{1}{2}\gamma^2\}} \quad [28]$$

$$= \frac{\{\cos\frac{1}{2}(a - b) - \cos\frac{1}{2}(a + b)\}\sin\gamma}{2\{\cos\frac{1}{2}(a - b) - [\cos\frac{1}{2}(a - b) - \cos\frac{1}{2}(a + b)]\sin\frac{1}{2}\gamma^2\}}$$

Setzt man nun nach (64.)

$$\sin\gamma = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a \sin b}$$

$$= \frac{2\sqrt{L}}{\sin a \sin b},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\cos(a-b) - \cos c}{2\sin a \sin b};$$

so erhält man leicht

$$\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{2\sqrt{L}}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(a-b) - \cos(a-b) + \cos c}.$$

Der Nenner ist =

$$4\cos\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}b^2 - \cos a\cos b + \cos c$$
$$= (1+\cos a)(1+\cos b) - \cos a\cos b + \cos c$$
$$= 1 + \cos a + \cos b + \cos c.$$

Also $\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{2\sqrt{L}}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$,

d. i. auch (64.): $\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sin a\sin b\sin\gamma}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$

$$= \frac{\sin a\sin c\sin\beta}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$$

$$= \frac{\sin b\sin c\sin\alpha}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$$

95. Da nach [24.]

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma$$

ist; so ist $1+\cos a+\cos b+\cos c =$

$$1+\cos a+\cos b+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma$$
$$= (1+\cos a)(1+\cos b) + \sin a\sin b\cos\gamma$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}a^2\cos\tfrac{1}{2}b^2 + 4\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}b\cos\gamma.$$

Setzt man nun dies in den Ausdruck für $\tan\frac{1}{2}\varepsilon$, zerlegt den Zähler in $4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a\sin\gamma$, und dividirt dann Zähler und Nenner mit $4\cos\frac{1}{2}a^2\cos\frac{1}{2}b^2$; so erhält man

$$\tan\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}b\sin\gamma}{1+\tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}b\cos\gamma}.$$

96. Nach (94.) ist

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{2\sqrt{L}}{1+\cos a+\cos b+\cos c},$$

$$2\sqrt{L} = \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon(1+\cos a+\cos b+\cos c)}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Aber $\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$

$$= \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}\gamma + \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}\gamma$$

$$= \frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 + \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2}{\cos\tfrac{1}{2}c} \quad [28]$$

wo der Zähler =

$$\cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \{\cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\}\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$

$$= \frac{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos(a-b) + \cos c}{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b}$$

$$= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b},$$

wie in (94.). Also

$$2\sqrt{L} = 4\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sqrt{L}}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}.$$

Folglich, da $\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varepsilon$ ist, nach (94.):

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}.$$

Die Formel für $\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon$ s. m. in einer Abhandlung von Lexell: De proprietat. circulor. in superficie sphaer. descriptor. §. 13. Act. Petrop. 1782.; die für $\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon$, auf doppelte Art bewiesen, in Euleri variae speculationes super area triangulor. sphaer. Nov. Act. Petrop. T. X.

97. Ferner ist nun

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{1+2\cos\tfrac{1}{2}a^2-1+2\cos\tfrac{1}{2}b^2-1+2\cos\tfrac{1}{2}c^2-1}{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\cos\tfrac{1}{2}a^2+\cos\tfrac{1}{2}b^2+\cos\tfrac{1}{2}c^2-1}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},$$

$$1-\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = 2\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon^2 =$$

$$\frac{1-\cos\tfrac{1}{2}a^2-\cos\tfrac{1}{2}b^2-\cos\tfrac{1}{2}c^2+2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}$$

Setzt man nun einstweilen α, β, γ für $\tfrac{1}{2}a$, $\tfrac{1}{2}b$, $\tfrac{1}{2}c$; so wird der Zähler, wenn man $\cos\alpha^2\cos\beta^2$ zu demselben addirt und davon subtrahirt,

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha^2\sin\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha^2\cos\beta^2\\
= &\quad \sin\alpha^2\sin\beta^2 \quad + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \quad - \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\\
&- \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \quad - \cos\gamma^2 \quad + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
&+ \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta \quad + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \quad - \cos\alpha^2\cos\beta^2\\
= &\quad (\sin\alpha\sin\beta \quad + \cos\gamma \quad - \cos\alpha\cos\beta)\\
&\times (\sin\alpha\sin\beta \quad - \cos\gamma \quad + \cos\alpha\cos\beta)\\
= &\{\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)\}\{\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma\}
\end{aligned}$$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-c);$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}(s-c)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\varepsilon = \frac{2\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon^2}{2\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon\cos\tfrac{1}{4}\varepsilon} = \frac{2\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon^2}{\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon}.$$

Also nach (96.), wenn man für L seinen Werth setzt:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\varepsilon = \frac{4\sin\tfrac{1}{2}s\sin\tfrac{1}{2}(s-a)\sin\tfrac{1}{2}(s-b)\sin\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

Aber allgemein

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}x}{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}x^2}{2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x},$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-c)},$$

eine von L'Huilier (M. vergl. jedoch auch Viereck. 13.) gefundene, sehr merkwürdige Formel. Da $\cos\tfrac{1}{4}\varepsilon = \sin\tfrac{1}{4}\varepsilon : \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\varepsilon$ ist; so erhält man leicht aus den beiden Formeln für $\sin\tfrac{1}{4}\varepsilon$ und $\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\varepsilon$:

$$\cos\tfrac{1}{4}\varepsilon = \sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{2}s\cos\tfrac{1}{2}(s-a)\cos\tfrac{1}{2}(s-b)\cos\tfrac{1}{2}(s-c)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}.$$

98. Ich habe hier die obigen Formeln für den sphärischen Exceß vorzüglich aus den Gaußischen Gleichungen abgeleitet. Andere Beweise s. m. in Legendre Géométrie. p. 314.; Buzengeiger: Einige Sätze, den Inhalt sphaer. D. betr. Zeitschrift für Astr. VI. Nr. 9. 10.; Hutton philosophical and mathematical Dictionary in dem Art. Excess.

99. In den bisherigen Formeln ist die Auflösung vieler Aufgaben über den Inhalt sphärischer Dreiecke enthalten. Denn so ist z. B. für den Inhalt aus den drei Seiten, indem wir den Octanten als Flächeneinheit, den rechten Winkel als Winkeleinheit annehmen, nach (97.)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\Delta = \sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}s\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-a)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(s-c)},$$

und für den Inhalt aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nach (95.)

$$\cot\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{1 + \tang\tfrac{1}{2}b \tang\tfrac{1}{2}c \cos\alpha}{\tang\tfrac{1}{2}b \tang\tfrac{1}{2}c \sin\alpha}$$

$$= \frac{\cot\tfrac{1}{2}b \cot\tfrac{1}{2}c + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

100. Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist $\alpha = 90^0$. Also nach (94.), da $\sin\alpha = 1$, $\tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - 90^0)$ ist:

$$\tang\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma - 90^0) = \frac{\sin b \sin c}{1 + \cos a + \cos b + \cos c}$$

$$= \frac{\sin b \sin c}{1 + \cos b \cos c + \cos b + \cos c} \quad (72.)$$

$$= \frac{\sin b \sin c}{(1 + \cos b)(1 + \cos c)}$$

$$= \frac{\sin b \sin b}{4\cos\tfrac{1}{2}b^2 \cos\tfrac{1}{2}c^2}$$

$$= \tang\tfrac{1}{2}b \tang\tfrac{1}{2}c.$$

M. s. Euler de mensura angulorum solidorum. Act. Petrop. 1778.

101. Da nun für rechtwinklige Dreiecke $\Delta = 90^0 + \beta + \gamma - 180^0 = \beta + \gamma - 90^0$ ist; so ist

$$\tang\tfrac{1}{2}\Delta = \tang\tfrac{1}{2}b \tang\tfrac{1}{2}c, \ \cot\tfrac{1}{2}\Delta \cot\tfrac{1}{2}b \cot\tfrac{1}{2}c,$$

$$2\cot\Delta = \frac{2\cos\Delta}{\sin\Delta} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\Delta^2 - \sin\tfrac{1}{2}\Delta^2}{\sin\tfrac{1}{2}\Delta \cos\tfrac{1}{2}\Delta}$$

$$= \frac{\cos\tfrac{1}{2}b^2 \cos\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}b^2 \sin\tfrac{1}{2}c^2}{\sin\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c \cos\tfrac{1}{2}c}$$

$$= \frac{(1 + \cos b)(1 + \cos c) - (1 - \cos b)(1 - \cos c)}{\sin b \sin c}$$

$$\cot\Delta = \frac{\cos b + \cos c}{\sin b \sin c}, \ \tang\Delta = \frac{\sin b \sin c}{\cos b + \cos c}.$$

Ferner ist

$$\tang\tfrac{1}{2}b \tang\tfrac{1}{2}c = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\Delta}{\cos\tfrac{1}{2}\Delta} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\Delta}{\sqrt{1 - \sin\tfrac{1}{2}\Delta^2}}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta^2 = \frac{\tang\tfrac{1}{2}b^2 \tang\tfrac{1}{2}c^2}{1 + \tang\tfrac{1}{2}b^2 \tang\tfrac{1}{2}c^2}$$

$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}b^2 \sin\tfrac{1}{2}c^2}{\cos\tfrac{1}{2}b^2 \cos\tfrac{1}{2}c^2 + \sin\tfrac{1}{2}b^2 \sin\tfrac{1}{2}c^2}.$$

Für den Nenner erhält man leicht $\tfrac{1}{2}(1 + \cos b \cos c) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos a)$ (72) $= \cos\tfrac{1}{2}a^2$. Also

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c}{\cos\tfrac{1}{2}a}.$$

Ganz auf ähnliche Art ergiebt sich aus der Formel für $\cot\tfrac{1}{2}\Delta$:

$$\cos\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}.$$

Also

$$\sin\Delta = 2\sin\tfrac{1}{2}\Delta\cos\tfrac{1}{2}\Delta$$
$$= \frac{\sin b\sin c}{1+\cos a},$$
$$\cos\Delta = \cos\tfrac{1}{2}\Delta^2 - \sin\tfrac{1}{2}\Delta^2$$
$$= \frac{\cos b + \cos c}{1+\cos a}.$$

M. s. Buzengeiger a. a. O. Nr. 4 — 6.

102. Nach (99.) ist

$$\tan\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c\sin\alpha}{1+\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c\cos\alpha}$$
$$\tan(-\tfrac{1}{2}\Delta) = \frac{(-\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c)\sin\alpha}{1-(-\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c)\cos\alpha},$$

Folglich nach derselben Entwickelung wie in (29.), wenn man das dortige $\frac{b}{c} = -\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c$ setzt:

$$\tfrac{1}{2}\Delta = \tan\tfrac{1}{2}b\tan\tfrac{1}{2}c\sin\alpha$$
$$- \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}b^2\tan\tfrac{1}{2}c^2\sin2\alpha$$
$$+ \tfrac{1}{3}\tan\tfrac{1}{2}b^3\tan\tfrac{1}{2}c^3\sin3\alpha$$
$$- \tfrac{1}{4}\tan\tfrac{1}{2}b^4\tan\tfrac{1}{2}c^4\sin4\alpha$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Also, wenn b, c sehr klein sind:

$$\tfrac{1}{2}\Delta = \tan\tfrac{1}{2}b\tan\tfrac{1}{2}c\sin\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}b\,.\,\tfrac{1}{2}c\sin\alpha,$$
$$\Delta = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

woraus erhellet, daß man den Inhalt eines sphärischen Dreiecks mit zwei sehr kleinen Seiten wie den Inhalt eines ebenen berechnen kann (19.), wobei man nur erst Größen der vierten Ordnung vernachlässigt.

103. Um das sphärische Dreieck zu finden, dessen Flächeninhalt bei zwei constanten Seiten ein Maximum wird, differentiire man den Ausdruck

$$\tan\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c\sin\alpha}{1+\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c\cos\alpha},$$

in Bezug auf α als veränderlich; so erhält man leicht

$$\frac{\partial\tan\frac{1}{2}\Delta}{\partial\alpha} = \frac{\tan\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}c\cos\alpha + \tan\frac{1}{2}b^2\tan\frac{1}{2}c^2}{(1+\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c)^2}$$
$$= \frac{\partial\Delta}{2\cos\frac{1}{2}\Delta^2\,.\,\partial\alpha}.$$

Also wegen des Maximums $0 = \tang\frac{1}{2}b \tang\frac{1}{2}c \cos\alpha + \tang\frac{1}{2}b^2 \tang\frac{1}{2}c^2$, oder, wenn man mit $\tang\frac{1}{2}b^2 \tang\frac{1}{2}c^2$ dividirt:

$$\begin{aligned} 0 &= \cot\tfrac{1}{2}b \cot\tfrac{1}{2}c \cos\alpha + 1 \\ &= 1 + \cot\tfrac{1}{2}b \cot\tfrac{1}{2}c(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2) \\ &= 1 + \cot\tfrac{1}{2}b \cot\tfrac{1}{2}c(2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1) \\ &= \cos\tfrac{1}{2}(b - c) - 2\cos\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 \\ &= -\cos\tfrac{1}{2}(b + c) + 2\cos\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}c \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b - c)}{\cos\frac{1}{2}(b + c)} = \tang\tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Nach den Neperschen Analogien aber:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(b - c)}{\cos\frac{1}{2}(b + c)} = \tang\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) \tang\tfrac{1}{2}\alpha,$$

woraus, verglichen mit dem Obigen, leicht folgt:

$$\tang\tfrac{1}{2}\alpha = \tang\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Da nun die Winkel $\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ beide $< 180^0$ sind (47.); so folgt aus obiger Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma), \ \alpha = \beta + \gamma.$$

Dies giebt den merkwürdigen Satz, daß unter allen sphärischen Dreiecken mit zwei constanten Seiten das den größten Flächeninhalt hat, in welchem der von den beiden constanten Seiten eingeschlossene Winkel der Summe der beiden andern Winkel gleich ist. Einen elementaren Beweis s. in Legendre Géom. Livre. VII. Prop. XXVI.

104. Merkwürdig ist auch die Aufgabe, auf der Oberfläche der Kugel die Linie zu finden, in welcher die Spitzen aller sphärischen Dreiecke liegen, welche über einerlei Grundlinie beschrieben, gleichen Flächeninhalt haben. Eine Bestimmung der gesuchten Linie hat auf calculatorischem Wege zuerst Lexell (Nova Act. Petrop. T. V. P. I.) zu geben versucht, die man auch in Legendre Géom. Note X. findet. Euler giebt in der schon (96.) angeführten Abhandlung: Variae speculationes etc. §. 16. einen rein geometrischen Beweis des Lexellschen Satzes. Dagegen hat J. Steiner das Verdienst, die Bestimmung sehr vereinfacht, und auf elementarem Wege bewiesen zu haben (Crelles Journal für reine und angew.

Mathem. II. 1. S. 45.) Wir theilen daher seinen Beweis hier dem Wesentlichen nach mit.

105. Daß in einem gleichschenkligen Dreiecke, wo $a = b$ ist; auch die Winkel α, β an der Grundlinie einander gleich sind, folgt augenblicklich aus [24], weil

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$
$$= \frac{\cos a\,(1 - \cos c)}{\sin a \sin c}$$
$$= \frac{2 \cos a \sin \tfrac{1}{2} c^2}{\sin a \sin c}$$
$$= \cot a \tan \tfrac{1}{2} c,$$
$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$
$$= \frac{\cos a\,(1 - \cos c)}{\sin a \sin c}$$
$$= \cot a \tan \tfrac{1}{2} c;$$

also $\cos\alpha = \cos\beta$, und folglich, da weder α noch β 180^0 übersteigen, $\alpha = \beta$ ist.

106. In einen kleinen Kugelkreis sey (Fig. 59.) ein sphärisches Viereck ABCD eingeschrieben, und P sey der Pol des kleinen Kreises; so sind APB, BPC, u. s. f. gleichschenklige Dreiecke. Also

$$\alpha = \beta,\ \alpha' = \delta',\ \gamma = \delta,\ \gamma' = \beta';$$
$$\alpha + \alpha' + \gamma + \gamma' = \beta + \beta' + \delta + \delta';$$
$$A + C = B + D,$$

so daß also in jedem sphärischen Viereck wie ABCD die Summen der gegenüberstehenden Winkel einander gleich sind.

107. Zieht man (Fig. 60.) die sphärische Diagonale AC, und construirt über derselben noch irgend ein sphärisches Dreieck AB'C; so ist nach (106.)

$$a + \alpha + c + \gamma = B + D,$$
$$a' + \alpha + c' + \gamma = B' + D,$$
$$a + c - B = D - \alpha - \gamma,$$
$$a' + c' - B' = D - \alpha - \gamma,$$
$$a + c - B = a' + c' - B',$$

d. h. in allen sphärischen Dreiecken, über derselben Grundlinie, auf derselben Seite, in einen kleinen Kugelkreis be-

schrieben, ist der Unterschied zwischen der Summe der Winkel an der Grundlinie und dem Winkel an der Spitze eine constante Größe, und umgekehrt:

Die Spitzen aller sphärischen Dreiecke über derselben Grundlinie auf derselben Seite, in welchen die Differenz zwischen der Summe der Winkel an der Grundlinie und dem Winkel an der Spitze eine constante Größe ist, liegen in einem bestimmten kleinen Kugelkreise, der durch die Endpunkte der Grundlinie geht.

108. Sey ABC (Fig. 61.) irgend ein sphärisches Dreieck, und AA′, BB′ Halbkreise. Die Punkte A′, B′ sollen die Gegenpunkte von A, B heißen. Bleibt nun der Flächeninhalt dieses Dreiecks constant; so bleibt auch nach (91.) die Summe der Winkel $a + b + c$ constant. Aber $c' = c$, $a' = \alpha = 2R - a$, $b' = \beta = 2R - b$. Also $c' - (a' + b') = c - (2R - a + 2R - b)$ $= a + b + c - 4R$, so daß folglich, wenn $a + b + c$ constant bleibt, auch $c' - (a' + b')$ constant bleibt. Bleibt also der Flächeninhalt von ABC constant, so liegen alle Spitzen der Dreiecke A′B′C, also auch alle Spitzen der Dreiecke ABC, nach (107.) in einem kleinern Kreise, welcher durch A′, B′, C geht, so daß also die Spitzen aller Dreiecke über derselben Grundlinie, welche einem gegebenen Dreiecke über dieser Grundlinie gleich sind, in einem kleinern Kugelkreise liegen, welcher durch die Spitze des gegebenen Dreiecks und die Gegenpunkte der Grundlinie geht. Dies ist der von Steiner gefundene Satz.

Noch einige Sätze und Relationen von sphärischen Dreiecken.

109. Sey P (Fig. 62.) der Pol des kleinen Kreises, welcher sich um das sphärische Dreieck beschreiben läßt, so sind die Bogen $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$ einander gleich. Man setze einen dieser Bogen $= x$. Im Dreieck $P\alpha\gamma$ ist nach [24]

$$\cos\varphi = \frac{\cos x - \cos b \cos x}{\sin b \sin x}$$

$$= \frac{1 - \cos b^2}{\sin b(1 + \cos b)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin b \cot x}{1 + \cos b}.$$

Eben so
$$\cos(\gamma - \varphi) = \frac{1 - \cos a}{\sin a} \cot x.$$

$$\frac{\cos(\gamma - \varphi)}{\cos\varphi} = \cos\gamma + \sin\gamma \tang\varphi$$

$$= \frac{(1 - \cos a)(1 + \cos b)}{\sin a \sin b}.$$

Aber
$$\sin\gamma = \frac{2\sqrt{L}}{\sin a \sin b} \quad (94)$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad [24]$$

Dies giebt mittelst obiger Gleichung leicht

$$\tang\varphi = \frac{1 - \cos a + \cos b - \cos c}{2\sqrt{L}},$$

wodurch φ bestimmt ist. Auch ist nach (97.)

$$\tang\varphi = \frac{1 - \cos a + \cos b - \cos c}{\sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2\cos a \cos b \cos c}},$$

woraus sich leicht ergiebt, daß der Zähler von $1 + \tang\varphi^2$, wenn man das Quadrat entwickelt und aufhebt, das Doppelte ist von

$$\begin{aligned} 1 - \cos a + \cos b - \cos c - \cos a \cos b \\ + \cos a \cos c - \cos b \cos c + \cos a \cos b \cos c \\ = (1 + \cos b - \cos c - \cos b \cos c)(1 - \cos a) \\ = (1 - \cos a)(1 + \cos b)(1 - \cos c) \\ = 8\sin\tfrac{1}{2}a^2 \cos\tfrac{1}{2}b^2 \sin\tfrac{1}{2}c^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$\sec\varphi^2 = \frac{16\sin\frac{1}{2}a^2 \cos\frac{1}{2}b^2 \sin\frac{1}{2}c^2}{4L},$$

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{L}}.$$

Aber nach dem Obigen

$$\cos\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}b}{2\cos\frac{1}{2}b^2} \cot x = \tang\tfrac{1}{2}b \cot x,$$

$$\tang x = \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}b}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{L}}.$$

Man findet diesen merkwürdigen Ausdruck bei Legendre a. a. O. p. 318. 319.

110. Da $\varphi = \gamma - \varphi' = \gamma - (\beta - \varphi'') = \gamma - \beta + \alpha - \varphi$ ist; so ist $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma)$. Nimmt man hierzu, wegen $\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = -\cot\frac{1}{2}\varepsilon$ (93.), den Ausdruck für $\cot\frac{1}{2}\varepsilon$ aus (94.); so erhält man mittelst (109.) folgende neue Reihe merkwürdiger Formeln:

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{-1-\cos a-\cos b-\cos c}{2\sqrt{L}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) = \frac{1+\cos a-\cos b-\cos c}{2\sqrt{L}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) = \frac{1-\cos a+\cos b-\cos c}{2\sqrt{L}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = \frac{1-\cos a-\cos b+\cos c}{2\sqrt{L}},$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) + \tang\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) + \tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) + \tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = \frac{1-\cos a-\cos b-\cos c}{\sqrt{L}}.$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) - \tang\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) = -\frac{1+\cos a}{\sqrt{L}} = -\frac{2\cos\frac{1}{2}a^2}{\sqrt{L}}.$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) + \tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = \frac{1-\cos a}{\sqrt{L}} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a^2}{\sqrt{L}}.$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) - \tang\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) - \tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) - \tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = -\frac{2}{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

$$-\tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) + \tang\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) + \tang\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) + \tang\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= 2\sqrt{\frac{1}{\sin s}\cdot\frac{1}{\sin(s-a)}\cdot\frac{1}{\sin(s-b)}\cdot\frac{1}{\sin(s-c)}}$$
$$= 2\sqrt{\operatorname{cosec} s \operatorname{cosec}(s-a)\operatorname{cosec}(s-b)\operatorname{cosec}(s-c)}.$$

Aehnliche Relationen würden sich mehrere finden lassen.

111. Die drei Bogen größter Kreise, welche die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks halbiren, schneiden sich in einem Puncte. Seyen nämlich die Winkel α und β halbirt, so daß sich die halbirenden Bogen in O (Fig. 63.) schneiden, und γO gezogen; so ist in den Dreiecken $\alpha O \beta$, $\alpha O b'$:

$$\frac{\sin\alpha\beta}{\sin O} = \frac{\sin\beta O}{\sin\frac{1}{2}\alpha}, \quad \frac{\sin\alpha b'}{\sin O} = \frac{\sin b'O}{\sin\frac{1}{2}\alpha};$$

$$\frac{\sin\alpha\beta}{\sin\alpha b'} = \frac{\sin\beta O}{\sin b'O}.$$

Also sind in jedem Dreieck ($\alpha\beta$b'), wo ein Winkel halbirt ist, die Sinus der diesen Winkel einschließenden Seiten, den Sinussen der anliegenden Abschnitte der Gegenseite proportional. Demnach im Dreieck $\alpha\beta\gamma$, wo β halbirt ist:

$$\frac{\sin\alpha\beta}{\sin\beta\gamma} = \frac{\sin\alpha b'}{\sin\gamma b'}, \quad \frac{\sin\alpha\beta}{\sin\alpha b'} = \frac{\sin\beta\gamma}{\sin\gamma b'}.$$

Folglich $\frac{\sin\beta O}{\sin b'O} = \frac{\sin\beta\gamma}{\sin\gamma b'}$. Aber

$$\frac{\sin\beta\gamma}{\sin\beta O} = \frac{\sin O}{\sin\beta'}, \quad \frac{\sin\gamma b'}{\sin b'O} = \frac{\sin O}{\sin\alpha'};$$

$$\frac{\sin\beta\gamma}{\sin\gamma b'} = \frac{\sin\beta O\,.\,\sin\alpha'}{\sin b'O\,.\,\sin\beta'} = \frac{\sin\beta O}{\sin b'O}.$$

Also $\sin\alpha' = \sin\beta'$, und demnach entweder $\alpha' = \beta'$ oder $\alpha' + \beta' = 180^0$. Da aber Letzteres nicht möglich weil $\gamma < 180^0$; so ist $\alpha' = \beta'$.

112. Denkt man sich Oa', Ob', Oc' als Perpendikel auf die drei Seiten; so folgt aus

$$\sin Oa' = \sin O\gamma\,.\,\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sin Ob' \quad (76),$$
$$\mathrm{tang}\,\gamma a' = \mathrm{tang}\,O\gamma\,.\,\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \mathrm{tang}\,\gamma b' \quad (73.)$$

leicht, daß $Oa' = Ob' = Oc'$, $\gamma a' = \gamma b'$, $\beta a' = \beta c'$, $\alpha b' = \alpha c'$, $2\alpha c' + 2\beta a' + 2\gamma b' = a + b + c$, $2\alpha c' = a + b + c - 2(\beta a' + \gamma b') = a + b + c - 2(\beta a' + \gamma a')$ $= a + b + c - 2a = b + c - a$, $\alpha c' = s - a$ ist. Setzt man nun eins der drei gleichen Perpendikel, d. h. den sphärischen Halbmesser des in das gegebene Dreieck beschriebenen Kreises, $= 1$; so ist nach (72.)

$$\mathrm{tang}\,1 = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin\alpha c',$$

d. i.

$$\mathrm{tang}\,1 = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\sin(s - a)$$
$$= \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\beta\,\sin(s - b)$$
$$= \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin(s - c),$$

woraus, wie auch schon in (65.) gefunden, folgt:

$$\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\beta}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin(s - a)}{\sin(s - b)}, \quad \frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\gamma}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin(s - a)}{\sin(s - c)}.$$

Auch ist $\mathrm{tang}\,1^3 =$

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\beta\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma\,\sin(s - a)\sin(s - b)\sin(s - c),$$

oder, wenn man für tang $\frac{1}{2}\alpha$, u. s. f. die Ausdrücke durch die Seiten (64.) setzt:

$$\tang l^3 = \left\{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right\}^{\frac{3}{2}}$$

$$\tang l = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},$$

woraus mittelst der Formel für $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ in (96.) leicht folgt:

$$\tang l = \frac{2\sin\frac{1}{2}\varepsilon\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sin s}.$$

Ist l' der Halbmesser des umschriebenen Kreises; so ist nach (109.)

$$\tang l' = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{L}},$$

$$\tang l \tang l' = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}.$$

Auch

$$\tang l \tang l' = \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin a\sin b\sin c}{2\sin s\sqrt{L}},$$

$$\tang l \cot l' = \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{L}}{\sin s\tang\frac{1}{2}a\tang\frac{1}{2}b\tang\frac{1}{2}c}.$$

113. Nach [28] ist:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma^2},$$

$$\frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin c^2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma^2},$$

$$\frac{\sin a^2}{\sin\alpha^2} = \frac{\sin b^2}{\sin\beta^2} = \frac{\sin c^2}{\sin\gamma^2} = \frac{\sin(a+b)\sin(a-b)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)};$$

eine merkwürdige Relation.

114. Auch ist nach (113.)

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2},$$

$$\frac{\sin(a+b)}{\sin c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma^2},$$

$$\frac{\sin c}{\cos\frac{1}{2}\gamma^2} = \frac{\sin c}{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \frac{2\sin c}{\sin\gamma}\tang\frac{1}{2}\gamma$$

$$= \frac{2\sin a}{\sin\alpha}\tang\frac{1}{2}\gamma,$$

$$\frac{\sin c}{\sin\frac{1}{2}\gamma^2} = \frac{\sin c}{\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \frac{2\sin c}{\sin\gamma}\cot\frac{1}{2}\gamma$$
$$= \frac{2\sin a}{\sin\alpha}\cot\frac{1}{2}\gamma,$$
$$\tan\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\alpha\sin(a-b)}{2\sin a\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)},$$
$$\cot\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\alpha\sin(a+b)}{2\sin a\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Diese Formeln dienen, um aus a, b, α, β unmittelbar γ zu finden.

115. Man kann auch c aus diesen gegebenen Stücken finden. Es ist

$$1-\cos c = 2\sin\tfrac{1}{2}c^2 =$$
$$1-\cos a\cos b - \sin a\sin b\cos\gamma =$$
$$1-\cos a\cos b - \sin a\sin b(1-2\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2)$$
$$= 1-\cos(a-b) + 2\sin a\sin b\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$
$$= 2(\sin\tfrac{1}{2}(a-b))^2 + 2\sin a\sin b\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2$$
$$\sin\tfrac{1}{2}c^2 = (\sin\tfrac{1}{2}(a-b))^2 + \sin a\sin b\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

Ganz eben so findet man

$$\cos\tfrac{1}{2}c^2 = (\cos\tfrac{1}{2}(a+b))^2 + \sin a\sin b\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2,$$

und mittelst des Supplementardreiecks ergiebt sich leicht:

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta))^2 + \sin\alpha\sin\beta\sin\tfrac{1}{2}c^2,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2 = (\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta))^2 + \sin\alpha\sin\beta\cos\tfrac{1}{2}c^2,$$

Substituirt man nun die Werthe von $\sin\frac{1}{2}\gamma^2$ und $\cos\frac{1}{2}\gamma^2$ in die beiden ersten Gleichungen; so erhält man leicht:

$$\sin\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{(\sin\frac{1}{2}(a-b))^2 + \sin a\sin b(\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta))^2}{1-\sin a\sin b\sin\alpha\sin\beta},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{(\cos\frac{1}{2}(a+b))^2 + \sin a\sin b(\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta))^2}{1-\sin a\sin b\sin\alpha\sin\beta},$$
$$\tan\tfrac{1}{2}c^2 = \frac{(\sin\frac{1}{2}(a-b))^2 + \sin a\sin b(\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta))^2}{(\cos\frac{1}{2}(a+b))^2 + \sin a\sin b(\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta))^2}.$$

116. Ferner ist nach (65.)

$$\cot\alpha = \frac{\cos a\sin b - \sin a\cos b\cos\gamma}{\sin a\sin\gamma}.$$

Hieraus erhält man, wenn $\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2$ statt $\cos\gamma$, und $\cos a\sin b(\cos\frac{1}{2}\gamma^2 + \sin\frac{1}{2}\gamma^2)$ statt $\cos a\sin b$ gesetzt wird, leicht:

$$\cot\alpha = \frac{\sin(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma^2}{\sin a\sin\gamma},$$

und eben so:

$$\cot\beta = \frac{\sin(a+b)\sin\tfrac{1}{2}\gamma^2 + \sin(a-b)\cos\tfrac{1}{2}\gamma^2}{\sin b \sin\gamma}.$$

Also

$$\cot\alpha\cot\beta = \frac{(\sin(a+b))^2.\sin\tfrac{1}{2}\gamma^4 - (\sin(a-b))^2.\cos\tfrac{1}{2}\gamma}{\sin a \sin b \sin\gamma^2}.$$

$$4\sin a \sin b \cot\alpha\cot\beta = (\sin(a+b))^2.\tang\tfrac{1}{2}\gamma^2 - (\sin(a-b))^2.\cot\tfrac{1}{2}\gamma^2.$$

117. Auch ergiebt sich aus den Formeln für $\cot\alpha$, $\cot\beta$ leicht:

$$\sin b\cot\beta \pm \sin a\cot\alpha = \frac{\sin(a\pm b) \mp \sin(a\pm b)\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\sin(a\pm b)(1\mp\cos\gamma)}{\sin\gamma},$$

woraus leicht erhalten wird:

$$\sin b\cot\beta + \sin a\cot\alpha = \sin(a+b)\tang\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$\sin b\cot\beta - \sin a\cot\alpha = \sin(a-b)\cot\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$\frac{\sin b\cot\beta + \sin a\cot a}{\sin b\cot\beta - \sin a\cot\alpha} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}\tang\tfrac{1}{2}\gamma^2,$$
$$\sin b^2\cot\beta^2 - \sin a^2\cot\alpha^2 = \sin(a+b)\sin(a-b).$$

118. Noch sind folgende Formeln für den Unterschied zweier Seiten merkwürdig:

$$\sin(a-c) = \sin a\cos c - \cos a\sin c$$
$$= \frac{\sin b\sin\alpha}{\sin\beta}\cos c - \frac{\sin b\sin\gamma}{\sin\beta}\cos a$$
$$= \frac{\sin b(\sin\alpha\cos c - \sin\gamma\cos a)}{\sin\beta},$$

$$\cos\gamma = \cos c\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \quad [26]$$
$$= \cos c\sin\alpha\sin\beta - (\cos a\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma)\cos\beta$$
$$= \cos c\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma - \sin\beta^2\cos\gamma - \cos a\sin\beta\cos\beta\sin\gamma,$$
$$o = \cos c\sin\alpha - \cos a\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma,$$
$$\sin\alpha\cos c = \cos a\cos\beta\sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma.$$

Substituirt man dies in obige Formel; so ergiebt sich

$$\sin(a-c) = \sin b\cos\gamma - \sin b\cos a\sin\gamma\tang\tfrac{1}{2}\beta.$$

Ferner ist

$$\cos b = \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos\beta$$
$$= \cos a\cos c + \sin a\sin c(1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\beta^2)$$
$$= \cos(a-c) - 2\sin a\sin c\sin\tfrac{1}{2}\beta^2,$$
$$\cos(a-c) = \cos b + 2\sin a\sin c\sin\tfrac{1}{2}\beta^2$$

$$= \cos b + 2\sin a \cdot \frac{\sin b \sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \sin\tfrac{1}{2}\beta^2$$
$$= \cos b + \sin a \sin b \sin\gamma \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta,$$
$$\operatorname{tang}(a-c) = \frac{\sin b(\cos\gamma - \cos a \sin\gamma \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta)}{\cos b + \sin a \sin b \sin\gamma \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}$$
$$= \frac{\operatorname{tang} b(\cos\gamma - \cos a \sin\gamma \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta)}{1 + \sin a \operatorname{tang} b \sin\gamma \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}.$$

119. Nach den Formeln von Gauß ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma) =$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)\cos\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b} = \cos\tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \frac{\sin(a-c)}{\sin b},$$
$$\sin(a-c) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\sin b}{\cos\frac{1}{2}\beta^2}$$
$$= \frac{\sin b(\cos\gamma - \cos\alpha)}{2\cos\frac{1}{2}\beta^2},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma) =$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(a+c)\sin\frac{1}{2}(a+c)}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}b} = \sin\tfrac{1}{2}\beta^2 \cdot \frac{\sin(a+c)}{\sin b},$$
$$\sin(a+c) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\sin b}{\sin\frac{1}{2}\beta^2}$$
$$= \frac{\sin b(\cos\gamma + \cos\alpha)}{2\sin\frac{1}{2}\beta^2}.$$

120. $\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma$. Addirt und subtrahirt man auf beiden Seiten $\cos\gamma$; so erhält man

$$\cos\alpha \pm \cos\gamma = \begin{cases} \cos a \sin\beta\sin\gamma + 2\sin\frac{1}{2}\beta^2\cos\gamma \\ \cos a\sin\beta\sin\gamma - 2\cos\frac{1}{2}\beta^2\cos\gamma \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma) \\ -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma) \end{cases}$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma) =$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}\beta^2\cos\gamma + \cos a\sin\beta\sin\gamma,$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma) =$$
$$2\cos\tfrac{1}{2}\beta^2\cos\gamma - \cos a\sin\beta\sin\gamma,$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma) =$$
$$\frac{2\cos\frac{1}{2}\beta^2\cos\gamma - \cos a\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\frac{1}{2}\beta^2\cos\gamma + \cos a\sin\beta\sin\gamma},$$

Relationen zwischen den drei Winkeln und einer Seite, woraus sich mittelst des Supplementardreiecks mehrere andere mit Leichtigkeit ableiten lassen würden.

121. Noch einige Relationen zwischen allen sechs Stücken erhält man so. Nach (118.) mit gehöriger Vertauschung der Zeichen, und mittelst des Supplementardreiecks ist:

$$\cos a \sin\gamma = \cos c \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$-\cos\alpha\sin c = \cos\gamma\sin a\cos b - \cos a\sin b,$$
$$\cos\alpha\sin c = \cos a\sin b - \cos\gamma\sin a\cos b,$$
$$\cos a\sin\gamma = \cos\alpha\sin\beta + \cos c\sin\alpha\cos\beta.$$

Also durch Division:

$$\frac{\cos\alpha\sin\beta + \cos c\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin c} =$$
$$\frac{\cos a\sin\gamma}{\cos a\sin b - \cos\gamma\sin a\cos b},$$
$$\frac{\sin\beta + \cos c\,\text{tang}\,\alpha\cos\beta}{\sin c} = \frac{\sin\gamma}{\sin b - \cos\gamma\,\text{tang}\,a\cos b}.$$

Auch ist

$$\frac{\cos\alpha\sin c}{\cos a\sin\gamma} = \frac{\cos\alpha\sin a}{\cos a\sin\alpha} = \frac{\cot\alpha}{\cot a}$$
$$= \frac{\cos a\sin b - \sin a\cos b\cos\gamma}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta\cos c}.$$

Auch ist nach (118.)

$$\cos a\sin\gamma = \cos\alpha\sin\beta + \cos c\sin\alpha\cos\beta,$$
$$\cos\beta\sin c = \cos b\sin a - \cos\gamma\cos a\sin b,$$
$$\frac{\cos\alpha\sin\beta + \cos c\sin\alpha\cos\beta}{\cos\beta\sin c}$$
$$= \frac{\cos a\sin\gamma}{\cos b\sin a - \cos\gamma\cos a\sin b},$$
$$\frac{\cos\alpha\,\text{tang}\,\beta + \sin\alpha\cos c}{\sin c} = \frac{\sin\gamma}{\cos b\,\text{tang}\,a - \cos\gamma\sin b}.$$

122. Nach (118.) ist

$$\cos\beta\sin\gamma = \cos b\sin\alpha - \cos a\sin\beta\cos\gamma.$$

Folglich, wenn man mit $\cos\beta$ multiplicirt:

$$\sin\gamma - \sin\beta^2\sin\gamma$$
$$= \cos b\sin\alpha\cos\beta - \cos a\sin\beta\cos\beta\cos\gamma,$$
$$\sin\beta\sin\gamma - \cos a\cos\beta\cos\gamma$$
$$= \frac{\sin\gamma - \cos b\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta}.$$

Also auch

$$\sin b\sin c + \cos\alpha\cos b\cos c$$
$$= \frac{\sin c - \cos\beta\sin a\cos b}{\sin b}.$$

Aber $\dfrac{\sin\gamma - \cos b\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta}$

$$= \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\left\{1 - \cos b\cos\beta\,.\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right\}$$

$$= \frac{\sin c}{\sin b}\left\{1 - \cos b \cos \beta . \frac{\sin a}{\sin c}\right\}$$
$$= \frac{\sin c - \cos\beta \sin a \cos b}{\sin b}.$$

Also

$$\sin b \sin c + \cos\alpha \cos b \cos c$$
$$= \sin\beta \sin\gamma - \cos a \cos\beta \cos\gamma,$$

ebenfalls eine merkwürdige Relation zwischen den sechs Stücken. M. s. Cagnoli Traité de Trigon. p. 326. Puissant Géod. I. p. 79.

Die meisten der obigen Relationen sind von Délambre gefunden. Ihre Anzahl ließe sich noch vermehren, worüber nachzusehen: Délambre Traité d'Astronomie. Tom. I. Chap. X.

Differentialformeln für sphärische Dreiecke.

123. Zunächst kommt es hier wieder auf die Differentiation der Fundamentalgleichungen der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos a = \sin b \sin c \cos\alpha + \cos b \cos c,$$
$$\sin\alpha \sin b = \sin\beta \sin a,$$
$$\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma;$$

an.

Die erste giebt durch partielle Differentiation:

$$\sin a \partial a = (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos\alpha)\partial b$$
$$+ (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha)\partial c$$
$$+ \sin b \sin c \sin\alpha \partial\alpha.$$

Da aber

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

ist; so ist der in ∂b multiplicirte Factor

$$= \frac{\sin b^2 \cos c - \cos a \cos b + \cos b^2 \cos c}{\sin b}$$
$$= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin b} = \sin a \cos\gamma,$$

und eben so der in ∂c multiplicirte Factor $= \sin a \cos \beta$. Da nun auch

$$\frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a} = \sin \beta \quad [25]$$

ist; so erhält man leicht:

$$\begin{aligned}
\sin a \partial a = & \ (\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha) \partial b \\
& + (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha) \partial c \\
& + \sin b \sin c \sin \alpha \, \partial \alpha, \\
\sin b \partial b = & \ (\sin a \cos c - \cos a \sin c \cos \beta) \partial a \\
& + (\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta) \partial c \\
& + \sin a \sin c \sin \beta \, \partial \beta, \\
\sin c \partial c = & \ (\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos \gamma) \partial a \\
& + (\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma) \partial b \\
& + \sin a \sin b \sin \gamma \, \partial \gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial a &= \cos \gamma \partial b + \cos \beta \partial c + \sin c \sin \beta \partial \alpha, \\
\partial b &= \cos \alpha \partial c + \cos \gamma \partial a + \sin a \sin \gamma \partial \beta, \\
\partial c &= \cos \beta \partial a + \cos \alpha \partial b + \sin b \sin \alpha \partial \gamma.
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Fundamentalgleichung erhält man augenblicklich:

$$\begin{aligned}
& \sin \alpha \cos b \partial b + \cos \alpha \sin b \, \partial \alpha \\
& \qquad = \sin \beta \cos a \, \partial a + \cos \beta \sin a \, \partial \beta, \\
& \sin \beta \cos c \partial c + \cos \beta \sin c \, \partial \beta \\
& \qquad = \sin \gamma \cos b \, \partial b + \cos \gamma \sin b \, \partial \gamma, \\
& \sin \gamma \cos a \, \partial a + \cos \gamma \sin a \, \partial \gamma \\
& \qquad = \sin \alpha \cos c \, \partial c + \cos \alpha \sin c \, \partial \alpha.
\end{aligned}$$

Die dritte Fundamentalgleichung giebt:

$$\begin{aligned}
- \sin \alpha \partial \alpha = & \ (\cos a \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma) \partial \beta \\
& + (\cos a \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma) \partial \gamma \\
& - \sin a \sin \beta \sin \gamma \, \partial a;
\end{aligned}$$

woraus, wegen

$$\cos a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}, \quad \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha} = \sin b,$$

ganz wie oben erhalten wird:

$$\begin{aligned}
- \sin \alpha \partial \alpha = & \ (\cos a \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma) \partial \beta \\
& + (\cos a \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma) \partial \gamma \\
& - \sin a \sin \beta \sin \gamma \, \partial a, \\
- \sin \beta \partial \beta = & \ (\cos b \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma) \partial \alpha \\
& + (\cos b \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) \partial \gamma \\
& - \sin b \sin \alpha \sin \gamma \, \partial b,
\end{aligned}$$

$$-\sin\gamma\,\partial\gamma = (\cos c\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\,\partial\alpha$$
$$+ (\cos c\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\,\partial\beta$$
$$- \sin c\sin\alpha\sin\beta\,\partial c,$$
$$-\partial\alpha = \cos c\,\partial\beta + \cos b\,\partial\gamma - \sin b\sin\gamma\,\partial a,$$
$$-\partial\beta = \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha - \sin c\sin\alpha\,\partial b,$$
$$-\partial\gamma = \cos b\,\partial\alpha + \cos a\,\partial\beta - \sin a\sin\beta\,\partial c.$$

124. Gegeben a, b, c.

Gesucht α, β, γ.

Nimmt man an, daß α, β, γ aus a, b, c berechnet sind; so ist nach (123.)

$$\partial\alpha = \frac{\partial a - \cos\gamma\,\partial b - \cos\beta\,\partial c}{\sin c\sin\beta},$$
$$\partial\beta = \frac{\partial b - \cos\alpha\,\partial c - \cos\gamma\,\partial a}{\sin a\sin\gamma},$$
$$\partial\gamma = \frac{\partial c - \cos\beta\,\partial a - \cos\alpha\,\partial b}{\sin b\sin\alpha}.$$

Setzt man nun statt der trigonometrischen Linien der Winkel aus dem Obigen ihre Ausdrücke durch die Seiten: so erhält man für

$$(\cos a - \cos b\cos c)\sin a = \mathfrak{A},$$
$$(\cos b - \cos a\cos c)\sin b = \mathfrak{B},$$
$$(\cos c - \cos a\cos b)\sin c = \mathfrak{C},$$

leicht:

$$\partial\alpha = \frac{\sin a\sin b\sin c\,\partial a - \mathfrak{C}\,\partial b - \mathfrak{B}\,\partial c}{2\sin b\sin c\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}},$$
$$\partial\beta = \frac{\sin a\sin b\sin c\,\partial b - \mathfrak{C}\,\partial a - \mathfrak{A}\,\partial c}{2\sin a\sin c\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}},$$
$$\partial\gamma = \frac{\sin a\sin b\sin c\,\partial c - \mathfrak{B}\,\partial a - \mathfrak{A}\,\partial b}{2\sin a\sin b\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}.$$

125. Gegeben b, c, α.

Gesucht β, γ, a.

Nach (123.) ist

$$\partial\beta = \frac{\partial b - \cos\alpha\,\partial c - \cos\gamma\,\partial a}{\sin a\sin\gamma}$$
$$= \frac{\partial b - \cos\alpha\,\partial c - \cos\gamma\,\partial a}{\sin c\sin\alpha},$$

woraus, wenn man für ∂a aus (123.) seinen Werth

$$\partial a = \cos\gamma\,\partial b + \cos\beta\,\partial c + \sin c\sin\beta\,\partial\alpha$$

setzt, zugleich durch Vertauschung der Zeichen, leicht erhalten wird:

$$\partial\beta = \frac{\sin\gamma^2\,\partial b - \cos a \sin\beta \sin\gamma\,\partial c - \sin c \sin\beta \cos\gamma\,\partial\alpha}{\sin c \sin\alpha},$$

$$\partial\gamma = \frac{\sin\beta^2\,\partial c - \cos a \sin\beta \sin\gamma\,\partial b - \sin b \cos\beta \sin\gamma\,\partial\alpha}{\sin b \sin\alpha}.$$

126. Gegeben a, β, γ.

Gesucht α, b, c.

Nach (123.) ist

$$\partial b = \frac{\partial\beta + \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha}{\sin c \sin\alpha}$$

$$= \frac{\partial\beta + \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha}{\sin a \sin\gamma},$$

woraus, wenn man für $\partial\alpha$ seinen Werth:

$$\partial\alpha = \sin b \sin\gamma\,\partial a - \cos c\,\partial\beta - \cos b\,\partial\gamma$$

setzt, leicht erhalten wird:

$$\partial b = \frac{\sin c^2\,\partial\beta + \sin b \sin c \cos\alpha\,\partial\gamma + \sin b \cos c \sin\gamma\,\partial a}{\sin a \sin\gamma},$$

$$\partial c = \frac{\sin b^2\,\partial\gamma + \sin b \sin c \cos\alpha\,\partial\beta + \cos b \sin c \sin\beta\,\partial a}{\sin a \sin\beta},$$

127. Gegeben α, β, γ.

Gesucht a, b, c.

Nach (123.) ist wieder

$$\partial a = \frac{\partial\alpha + \cos c\,\partial\beta + \cos b\,\partial\gamma}{\sin b \sin\gamma},$$

$$\partial b = \frac{\partial\beta + \cos a\,\partial\gamma + \cos c\,\partial\alpha}{\sin c \sin\alpha},$$

$$\partial c = \frac{\partial\gamma + \cos b\,\partial\alpha + \cos a\,\partial\beta}{\sin a \sin\beta}.$$

Setzt man nun für die trigonometrischen Linien der Seiten ihre Ausdrücke durch die Winkel; so erhält man, für

$$(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)\sin\alpha = \mathfrak{A}',$$

$$(\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)\sin\beta = \mathfrak{B}',$$

$$(\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)\sin\gamma = \mathfrak{C}',$$

leicht:

$$\partial a = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,\partial\alpha + \mathfrak{C}'\,\partial\beta + \mathfrak{B}'\,\partial\gamma}{2\sin\beta\sin\gamma\sqrt{-\cos s'\cos(s'-\alpha)\cos(s'-\beta)\cos(s'-\gamma)}},$$

$$\partial b = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\,\partial\beta + \mathfrak{C}'\,\partial\alpha + \mathfrak{A}'\,\partial\gamma}{2\sin\alpha\sin\gamma\sqrt{-\cos s'\cos(s'-\alpha)\cos(s'-\beta)\cos(s'-\gamma)}},$$

$$\partial c = \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\, \partial\gamma + \mathfrak{B}'\, \partial\alpha + \mathfrak{A}'\partial\beta}{2\sin\alpha\sin\beta \sqrt{-\cos s' \cos(s'-\alpha)\cos(s'-\beta)\cos(s'-\gamma)}}.$$

128. Gegeben a, b, α.
Gesucht β, c, γ.

Nach (123.) ist

$$\partial\beta = \frac{\sin\alpha\cos b\,\partial b + \cos\alpha\sin b\,\partial\alpha - \sin\beta\cos a\,\partial a}{\cos\beta\sin a},$$

$$\partial c = \frac{\partial a - \cos\gamma\,\partial b - \sin c\sin\beta\,\partial\alpha}{\cos\beta},$$

$$\partial\gamma = \frac{\partial c - \cos\beta\,\partial a - \cos\alpha\,\partial b}{\sin b\sin\alpha}.$$

129. Gegeben a, α, β.
Gesucht b, c, γ.

Nach (123.) ist

$$\partial b = \frac{\sin\beta\cos a\,\partial a + \cos\beta\sin a\,\partial\beta - \cos\alpha\sin b\,\partial\alpha}{\sin\alpha\cos b},$$

$$\partial\gamma = \frac{-\partial\alpha - \cos c\,\partial\beta + \sin b\sin\gamma\,\partial a}{\cos b},$$

$$\partial c = \frac{\partial\gamma + \cos b\,\partial\alpha + \cos a\,\partial\beta}{\sin a\sin\beta}.$$

130. Nimmt man zwei Stücke als unveränderlich an; so sind dieselben Fälle wie in (41.) möglich, worauf wir uns also hier beziehen.

131. Unveränderlich a, β ⎫
Veränderlich b, c, α, γ ⎭ (41. a.)

Für $\partial a = \partial\beta = 0$ gehen die allgemeinen Gleichungen in (123.):

$$\partial b = \cos\alpha\,\partial c,$$
$$\sin\alpha\cos b\,\partial b + \cos\alpha\sin b\,\partial\alpha = 0,$$
$$-\partial\alpha = \cos b\,\partial\gamma,$$

drei Gleichungen, aus denen sich immer drei der Größen ∂b, ∂c, $\partial\alpha$, $\partial\gamma$ bestimmen lassen, wenn eine als gegeben angenommen wird. Dividirt man die zweite Gleichung durch $\cos\alpha\cos b$; so werden diese Gleichungen:

$$\partial b = \cos\alpha\,\partial c,$$
$$\operatorname{tang}\alpha\,\partial b = -\operatorname{tang} b\,\partial\alpha,$$
$$-\partial\alpha = \cos b\,\partial\gamma.$$

132. Unveränderlich a, α \
Veränderlich b, c, β, γ } (41. b.)

Für $\partial a = \partial\alpha = o$ geben die allgemeinen Gleichungen:

$$o = \cos\gamma\,\partial b + \cos\beta\,\partial c,$$
$$\sin\alpha\cos b\,\partial b = \cos\beta\sin a\,\partial\beta,$$
$$o = \cos c\,\partial\beta + \cos b\,\partial\gamma.$$

Da die zweite auch

$$\cos b\,\partial b = \frac{\cos\beta\sin a}{\sin\alpha}\partial\beta = \frac{\cos\beta\sin b}{\sin\beta}\partial\beta,$$
$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\partial b = \frac{\sin b}{\cos b}\partial\beta,$$

ist; so werden diese Gleichungen:

$$\cos\beta\,\partial c = -\cos\gamma\,\partial b,$$
$$\tang\beta\,\partial b = \tang b\,\partial\beta,$$
$$\cos c\,\partial\beta = -\cos b\,\partial\gamma,$$

aus denen sich auch, wenn eine der Größen ∂b, ∂c, $\partial\beta$, $\partial\gamma$ gegeben ist, die übrigen drei immer bestimmen lassen.

133. Unveränderlich a, b \
Veränderlich α, β, γ, c } (41. c.)

Für $\partial a = \partial b = o$ ist:

$$o = \cos\beta\,\partial c + \sin c\sin\beta\,\partial\alpha,$$
$$o = \cos\alpha\,\partial c + \sin a\sin\gamma\,\partial\beta,$$
$$\cos\alpha\sin b\,\partial\alpha = \cos\beta\sin a\,\partial\beta,$$

oder

$$o = \partial c + \sin c\tang\beta\,\partial\alpha$$
$$o = \partial c + \sin c\tang\alpha\,\partial\beta,$$
$$\cos\alpha\,\partial\alpha = \cos\beta\,.\,\frac{\sin a}{\sin b}\,\partial\beta = \sin\alpha\cot\beta\,\partial\beta,$$

oder

$$\partial c = -\sin c\tang\beta\,\partial\alpha,$$
$$\partial c = -\sin c\tang\alpha\,\partial\beta,$$
$$\tang\beta\,\partial\alpha = \tang\alpha\,\partial\beta.$$

134. Unveränderlich α, β. \
Veränderlich a, b, c, γ. } (41. d.)

Für $\partial\alpha = \partial\beta = o$ ist

$$\sin\alpha\cos b\,\partial b = \sin\beta\cos a\,\partial a,$$
$$o = \cos b\,\partial\gamma - \sin b\sin\gamma\,\partial a,$$
$$o = \cos a\,\partial\gamma - \sin c\sin\alpha\,\partial b;$$

oder

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos b\,\partial b = \cos a\,\partial a,$$

$$\frac{\sin a}{\sin b}\cos b\,\partial b = \cos a\,\partial a,$$

$$o = \partial\gamma - \tang b \sin\gamma\,\partial a,$$

$$o = \partial\gamma - \frac{\sin a \sin\gamma}{\cos a}\,\partial b$$

$$= \partial\gamma - \tang a \sin\gamma\,\partial b.$$

Also

$$\tang a\,\partial b = \tang b\,\partial a,$$

$$\partial\gamma = \tang b \sin\gamma\,\partial a,$$

$$\partial\gamma = \tang a \sin\gamma\,\partial b.$$

III. Sphäroidische Trigonometrie.

Grundbegriffe.

135. Unter einem Sphäroid verstehen wir hier einen durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenen Körper. Die Drehungsaxe heißt schlechthin die Axe, und ihre Endpunkte die Pole. Der von der großen Axe der Ellipse beschriebene Kreis wird der Aequator, und jeder, mit demselben parallele, Schnitt des Sphäroids ein Parallelkreis genannt. Jeder Schnitt durch die Axe ist eine der erzeugenden gleiche Ellipse. Die zwischen den beiden Polen liegenden Hälften solcher Schnitte sollen Meridiane genannt werden.

136. Der Aequator theilt das Sphäroid in zwei Hälften, von denen die eine die positive, die andere die negative genannt werden soll. Die beiden Pole erhalten nach den Hälften, in welchen sie liegen, gleiche Benennungen.

137. Legt man durch einen Punkt auf der Oberfläche des Sphäroids einen Meridian; so heißt der spitze Winkel, welchen die durch den gegebenen Punkt gezogene Normale mit der großen Axe des Meridians einschließt, die Breite des gegebenen Punktes. Die Breiten der Pole sind $= 90^0$, sonst sind alle Breiten $< 90^0$, und werden als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die entspre=

chenden Punkte in der positiven oder negativen Halbkugel liegen.

138. Alle Meridiane werden von einem bestimmten Meridiane, welcher der erste genannt wird, immer nach derselben Richtung rings um das Sphäroid herum gezählt. Die Länge eines Punktes auf der Oberfläche des Sphäroids ist der zwischen seinem und dem ersten Meridiane nach der Richtung der Meridiane hin liegende Bogen des Aequators. Die Längen sind immer positiv, und wachsen von 0^0 bis 360^0. Die positive Differenz zwischen den Längen zweier Punkte heißt die Längendifferenz derselben.

139. Die kürzeste Linie, welche sich auf der Oberfläche des Sphäroids zwischen irgend zwei gegebenen Punkten ziehen läßt, soll schlechthin die Kürzeste genannt werden. Eine solche Linie ist natürlich immer nach einem bestimmten Gesetze gekrümmt, und kann also nach demselben über die beiden gegebenen Punkte hinaus verlängert gedacht werden.

140. Die nach der Richtung der Längen und nach der Seite des positiven Pols hin mit den Meridianen zweier Punkte von ihrer Kürzesten eingeschlossenen Winkel werden Azimuthe genannt.

141. Unter einem sphäroidischen Dreieck verstehen wir hier ein Dreieck auf der Oberfläche eines Sphäroids, dessen Spitze im positiven Pol liegt, und welches von zwei Meridianbogen nebst der zwischen den Endpunkten derselben liegenden Kürzesten eingeschlossen wird. Daß wir die Spitze uns im positiven Pol liegend vorstellen, wird der Allgemeinheit nicht schaden.

Sonst nennt man auch Dreiecke, welche von drei kürzesten Linien auf der Oberfläche eines Sphäroids eingeschlossen werden, sphäroidische Dreiecke.

142. Bei jedem sphäroidischen Dreieck kommen, wie bei den ebenen und sphärischen, drei Seiten und drei Winkel in Betrachtung. Des vielfachen praktischen Gebrauchs wegen, welchen man von den Formeln der sphäroidischen Trigonometrie macht, hat man aber sechs andere Bestim-

mungsstücke eingeführt. Diese sechs Stücke sind, wenn wir den Pol durch P, die Endpunkte der Meridianbogen aber durch A und A_1 bezeichnen:

1. Die Kürzeste zwischen A und A_1, $= s$.
2. Die Breiten dieser beiden Punkte: λ, λ_1.
3. Die Längendifferenz derselben, $= \sigma$.
4. Die Azimuthe dieser beiden Punkte: α, α_1.

Es ist klar, daß durch diese sechs Stücke das sphäroidische Dreieck ebenfalls bestimmt wird, wie durch die drei Seiten und die drei Winkel.

143. Aus drei gegebenen dieser Stücke die übrigen durch Rechnung zu finden, ist der Zweck der sphäroidischen Trigonometrie. Sie erfordert einen weit größern Aufwand analytischer Hülfsmittel, als die beiden ersten Trigonometrieen, und die Formeln fallen oft sehr weitläufig aus. Wir müssen uns daher in diesem Artikel auf eine vollständige Entwickelung der Grundformeln, und die Auflösung einiger der wichtigsten Hauptaufgaben beschränken. Ihre wichtigsten Anwendungen findet diese Wissenschaft in der Geographie und höhern Geodäsie, also bei einem Sphäroid, welches durch eine Ellipse mit sehr kleiner Excentricität erzeugt worden ist. Hieraus ergiebt sich in den meisten Fällen eine bedeutende Abkürzung der Rechnungen und Formeln, indem man höhere Potenzen der Excentricität vernachlässigt, ohne der Genauigkeit zu schaden. Die obigen Grundbegriffe sind eigentlich aus der Geographie entlehnt, mußten aber hier entwickelt werden, wenn die sphäroidische Trigonometrie als für sich bestehende, rein mathematische, Wissenschaft dastehen sollte.

Reducirte Breiten.

144. Du-Ségour (Mém. de Paris. 1778.) hat zuerst die Formeln der sphäroidischen Trigonometrie durch Beziehung des sphäroidischen Dreiecks auf ein correspondirendes sphärisches Dreieck auf der in das Sphäroid be-

schriebenen Kugel zu vereinfachen gesucht. Hierzu dienen vorzüglich die sogenannten reducirten Breiten. Denkt man sich nämlich über der Axe als Durchmesser in das Sphäroid eine Kugel beschrieben; so heißt der Winkel, unter welchem ein durch einen Punkt auf der Oberfläche dieser Kugel, welcher von der Ebene des Aequators auf derselben Seite eben so weit entfernt ist, als ein Punkt auf dem Sphäroid, gezogener Radius der Kugel gegen die Ebene des Aequators geneigt ist, die reducirte Breite des Punktes auf dem Sphäroid. Die reducirten Breiten sind mit den wahren gleichzeitig positiv und negativ, und sollen durch l, l_1 bezeichnet werden.

145. Durch den Punkt A denke man sich einen Meridian gelegt, und bezeichne die Coordinaten dieses Punktes, den Mittelpunkt als Anfang angenommen durch x, y; so ist die Gleichung der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

woraus leicht erhalten wird:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{a^2y}{b^2x}.$$

Folglich die Gleichung der Normale:

$$z - y = \frac{a^2y}{b^2x}(u - x).$$

Also

$$\tang \lambda = \frac{a^2y}{b^2x},$$

wo offenbar x immer als positiv anzusehen, aber tang λ, und folglich auch λ, positiv oder negativ ist, jenachdem y es ist. M. v. die Art. Normale und Linie, gerade.

Für den Kreis wäre

$$\tang \lambda = \frac{y}{x}.$$

146. Also ist, wenn x' die Abscisse eines Punktes auf der Oberfläche der in das Sphäroid beschriebenen Kugel, dessen Ordinate = y ist, bezeichnet:

$$\tang \lambda = \frac{a^2y}{b^2x}, \quad \tang l = \frac{y}{x'}.$$

Aber

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

und augenscheinlich

$$x'^2 + y^2 = b^2,$$

woraus durch Elimination:

$$\frac{\tang\lambda}{\tang l} = \frac{a^2x'}{b^2x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{ax'}{bx}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2b^2 - a^2y^2}}{\sqrt{a^2b^2 - a^2y^2}} = \frac{a}{b};$$

$$\tang l = \frac{b}{a} \tang\lambda, \quad \tang\lambda = \frac{a}{b} \tang l.$$

Diese Formeln dienen, aus der wahren die reducirte Breite zu finden, und umgekehrt.

147. Setzt man

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}};$$

$$e^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{e^2}{1 - e^2};$$

$$1 - e^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}, \quad 1 + \varepsilon^2 = \frac{1}{1 - e^2};$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{1 + \varepsilon^2};$$

so ist

$$\tang l = \tang\lambda . \sqrt{1 - e^2} = \frac{\tang\lambda}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

$$= \tang\lambda . (1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4 - \ldots)$$

$$\tang\lambda = \frac{\tang l}{\sqrt{1 - e^2}} = \tang l . \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

$$= \tang l . (1 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4 + \ldots)$$

und folglich mit Vernachlässigung der zweiten oder vierten Potenzen von e^2:

$$\tang l = \tang\lambda . (1 - \tfrac{1}{2}e^2),$$
$$\tang\lambda = \tang l . (1 + \tfrac{1}{2}e^2);$$

oder

$$\tang l = \tang\lambda . (1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4),$$
$$\tang\lambda = \tang l . (1 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4).$$

148. Aus (80.) ergiebt sich, da das dortige

$$\varkappa = \frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{b - a}{b + a} = -\frac{a - b}{a + b},$$

gesetzt werden kann, wegen der Gleichungen in (146.) augenblicklich:

$$l = \lambda - \frac{a-b}{a+b}\sin 2\lambda + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.\sin 4\lambda$$
$$- \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3.\sin 6\lambda + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4.\sin 8\lambda - \ldots$$
$$\lambda = l + \frac{a-b}{a+b}\sin 2l + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.\sin 4l$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3.\sin 6l + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4.\sin 8l + \ldots$$

Sind a und b sehr wenig von einander verschieden, also $\frac{a-b}{a+b}$ ein sehr kleiner Bruch; so erhält man mit Vernachlässigung der Quadrate:

$$l = \lambda - \frac{a-b}{a+b}\sin 2\lambda,$$
$$\lambda = l + \frac{a-b}{a+b}\sin 2l.$$

149. Um $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n$ nach Potenzen von e oder ε zu entwickeln, woraus sich merkwürdige Reihen ergeben, wollen wir zuerst überhaupt

$$y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n,$$

in eine Reihe nach den fallenden Potenzen von x entwickeln. Zu dem Ende differentiire man y zwei Mal; so erhält man:

$$n^2 y - x\frac{\partial y}{\partial x} - (x^2 - 1)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o.$$

Setzt man nun

$$y = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + \ldots;$$

so ergiebt sich, nachdem man $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ entwickelt, durch Substitution in obige Gleichung:

$$\begin{aligned} o = & \{n^2 - n - n(n-1)\}Ax^n \\ & + \{n^2 - (n-1) - (n-1)(n-2)\}Bx^{n-1} \\ & + \left\{\begin{matrix}[n^2 - (n-2) - (n-2)(n-3)]C \\ + n(n-1)A\end{matrix}\right\} x^{n-2} \\ & + \left\{\begin{matrix}[n^2 - (n-3) - (n-3)(n-4)]D \\ + (n-1)(n-2)B\end{matrix}\right\} x^{n-3} \\ & + \left\{\begin{matrix}[n^2 - (n-4) - (n-4)(n-5)]E \\ + (n-2)(n-3)C\end{matrix}\right\} x^{n-4} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Setzt man nun alle Coefficienten = o; so erhellet sogleich, daß

$$B = D = F = H = \ldots = 0.$$

Da $n^2 - n - n(n-1) = 0$ ist; so bleibt A unbestimmt. Allgemein ist nun

$$0 = [n^2 - (n-\alpha) - (n-\alpha)(n-\alpha-1)]N + (n-\alpha+2)(n-\alpha+1)L,$$

woraus

$$N = -\frac{(n-\alpha+2)(n-\alpha+1)}{\alpha(2n-\alpha)}L = -\frac{(n-\alpha+2)(n-\alpha+1)}{2\alpha(n-\frac{1}{2}\alpha)}L.$$

Also

$$C = -\frac{n}{4}A \qquad = -\frac{n}{4}A,$$

$$E = -\frac{n-3}{8}C \qquad = \frac{n(n-3)}{4.8}A,$$

$$G = -\frac{(n-4)(n-5)}{12(n-3)}E = -\frac{n(n-4)(n-5)}{4.8.12}A,$$

$$I = -\frac{(n-6)(n-7)}{16(n-4)}G = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4.8.12.16}A.$$

etc. etc. etc. etc.

Entwickelt man aber y nach dem binomischen Lehrsatze; so erhält man als erstes Glied

$$\left\{1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots\right\} x^n = (1+1)^n x^n = 2^n x^n.$$

Also $A = 2^n$, und folglich

$$y = (2x)^n - n(2x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2x)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}(2x)^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}(2x)^{n-8} - \ldots\ldots$$

Da, wie leicht erhellet,

$$(x - \sqrt{x^2-1})^n = (x + \sqrt{x^2-1})^{-n}$$

ist; so ist, für

$$(x - \sqrt{x^2-1})^n = y;$$

$$
\begin{aligned}
y = {} & (2x)^{-n} \\
& + n(2x)^{-n-2} \\
& + \frac{n(n+3)}{2}(2x)^{-n-4} \\
& + \frac{n(n+4)(n+5)}{2.3}(2x)^{-n-6} \\
& + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{2.3.4}(2x)^{-n-8} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

150. Nach (147.) ist

$$
\begin{aligned}
\frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} &= \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \\
&= \frac{(1-\sqrt{1-e^2})^2}{(1+\sqrt{1-e^2})(1-\sqrt{1-e^2})} \\
&= \left\{\frac{1}{e} - \sqrt{\frac{1}{e^2}-1}\right\}^2.
\end{aligned}
$$

Folglich, nach den vorher bewiesenen Reihen:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n = {} & \left(\frac{2}{e}\right)^{-2n} \\
& + \frac{2n}{1}\left(\frac{2}{e}\right)^{-2n-2} \\
& + \frac{2n(2n+3)}{1.2}\left(\frac{2}{e}\right)^{-2n-4} \\
& + \frac{2n(2n+4)(2n+5)}{1.2.3}\left(\frac{2}{e}\right)^{-2n-6} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
= {} & \left(\frac{e}{2}\right)^{2n}\left\{1 + \frac{2n}{1}\left(\frac{e}{2}\right)^2 \right. \\
& + \frac{2n(2n+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^4 \\
& + \frac{2n(2n+4)(2n+5)}{1.2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 \\
& \left. + \ldots\ldots\ldots \right\}
\end{aligned}
$$

Auf ähnliche Art ist, wenn man $\sqrt{-1} = i$ setzt:

$$
\begin{aligned}
\frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1} &= \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}-1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}+1} \\
&= \frac{(\sqrt{1+\varepsilon^2}-1)(\sqrt{1+\varepsilon^2}+1)}{(\sqrt{1+\varepsilon^2}+1)^2}
\end{aligned}
$$

$$= -\left\{\frac{\varepsilon i}{1 + \sqrt{1 - (\varepsilon i)^2}}\right\}^2$$

$$= -\left\{\frac{1}{\varepsilon i} + \sqrt{\left(\frac{1}{\varepsilon i}\right)^2 - 1}\right\}^{-2}$$

$$\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^n = \pm\left\{\left(\frac{2}{\varepsilon i}\right)^{-2n} + \frac{2n}{1}\left(\frac{2}{\varepsilon i}\right)^{-2n-2} + \frac{2n(2n+3)}{1.2}\left(\frac{2}{\varepsilon i}\right)^{-2n-4} + \frac{2n(2n+4)(2n+5)}{1.2.3}\left(\frac{2}{\varepsilon i}\right)^{-2n-6} + \ldots\ldots\right\},$$

das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades n. Also

$$\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^n = \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{-2n} - \frac{2n}{1}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{-2n-2} + \frac{2n(2n+3)}{1.2}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{-2n-4} - \frac{2n(2n+4)(2n+5)}{1.2.3}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{-2n-6} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2n}\left\{1 - \frac{2n}{1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{2n(2n+3)}{1.2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4 - \frac{2n(2n+4)(2n+5)}{1.2.3}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^6 + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

151. Da man nach dem Obigen die reducirten Breiten immer leicht aus den wahren berechnen kann, und umgekehrt; so sollen in der Folge immer jene statt dieser in die Formeln eingeführt werden, weil dieselben dadurch abgekürzt werden. Noch sind folgende Ausdrücke zu bemerken. Nach (145.) und (146.) ist

$$\tang\lambda = \frac{a^2y}{b^2x}, \quad \tang l = \frac{b}{a}\tang\lambda.$$

Also

$$\tang l = \frac{ay}{bx} = \frac{\sin l}{\cos l},$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$(b^2x^2 + a^2y^2)\sin l^2 = a^2y^2,$$
$$a^2b^2\sin l^2 = a^2y^2,\ b^2\sin l^2 = y^2.$$

Da nun l, also auch sin l, mit y gleichzeitig positiv und negativ ist; so ist

$$b \sin l = y,$$

und folglich

$$\cos l = \frac{\sin l}{\tang l} = \frac{y}{b} \cdot \frac{bx}{ay} = \frac{x}{a},$$

$$a \cos l = x.$$

Kürzeste Linie zwischen A und A_1.

152. Sey

$$u = f(x, y, z) = o$$

überhaupt die Gleichung einer krummen Fläche, auf welcher die kürzeste Linie s gezogen werden soll; so ist

$$s = \int \partial x \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}}$$

$$= \int \partial x \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Nach Variationsrechnung (38.) ist

$$v = \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}, \ \partial s = v \partial x,$$

$$\left.\begin{matrix} N = Q = R = \ldots. \\ N' = Q' = R' = \ldots. \end{matrix}\right\} = o,$$

und, da y, z wegen der gegebenen Gleichung der krummen Fläche nicht ganz unabhängig von einander sind:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \delta y - \frac{\partial P'}{\partial x} \delta z = o, \ \delta u = o;$$

d. i.

$$\frac{\partial P}{\partial x} \delta y + \frac{\partial P'}{\partial x} \delta z = o,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \delta z = o,$$

woraus leicht: wenn man $\frac{\delta z}{\delta y}$ eliminirt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial P'}{\partial x} = o,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot \partial P - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \partial P' = o.$$

Aber (Variationsrechnung 27. 38.)

$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) = \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}}$$

$$= \frac{y_1}{v} = \frac{\partial y}{v \partial x} = \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial z_1}\right) = \frac{z_1}{\sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}}$$
$$= \frac{z_1}{v} = \frac{\partial z}{v \partial x} = \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Also
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) . \partial \frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) . \partial \frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung, in Verbindung mit der gegebenen Gleichung
$$f(x, y, z) = 0,$$
reicht zur Bestimmung der kürzesten Linie hin.

Durch Vertauschung der Buchstaben erhält man aus obiger Gleichung:
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) . \partial \frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) . \partial \frac{\partial x}{\partial s} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) . \partial \frac{\partial z}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) . \partial \frac{\partial y}{\partial s} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) . \partial \frac{\partial x}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) . \partial \frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Betrachtet man ∂s als constant; so werden diese Gleichungen:
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial^2 y - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial^2 x = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial^2 z - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial^2 y = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial^2 x - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial^2 z = 0.$$

153. Bei einem Revolutionssphäroid sey jetzt die Axe der Drehung die Axe der z. Denkt man sich von irgend einem Punkte seiner Oberfläche auf die Ebene der xy ein Perpendikel z gefällt, und durch dessen Fußpunkt nach dem Anfange der Coordinaten die Linie t gezogen; so sind t, z Coordinaten der erzeugenden Curve, deren Gleichung also durch
$$\varphi(t, z) = 0$$
bezeichnet werden kann, so daß folglich t eine Function von z ist, und demnach
$$t = \varphi' z$$
gesetzt werden kann. Da offenbar

Da nun l, also auch sin l, mit y gleichzeitig positiv und negativ ist; so ist

$$b \sin l = y,$$

und folglich

$$\cos l = \frac{\sin l}{\text{tang}\, l} = \frac{y}{b} \cdot \frac{bx}{ay} = \frac{x}{a},$$

$$a \cos l = x.$$

Kürzeste Linie zwischen A und A_1.

152. Sey

$$u = f(x, y, z) = o$$

überhaupt die Gleichung einer krummen Fläche, auf welcher die kürzeste Linie s gezogen werden soll; so ist

$$s = \int \partial x \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}}$$

$$= \int \partial x \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Nach Variationsrechnung (38.) ist

$$v = \sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}, \; \partial s = v \partial x,$$

$$\left. \begin{array}{l} N = Q = R = \ldots . \\ N' = Q' = R' = \ldots . \end{array} \right\} = o,$$

und, da y, z wegen der gegebenen Gleichung der krummen Fläche nicht ganz unabhängig von einander sind:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \delta y - \frac{\partial P'}{\partial x} \delta z = o, \; \delta u = o;$$

d. i.

$$\frac{\partial P}{\partial x} \delta y + \frac{\partial P'}{\partial x} \delta z = o,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \delta z = o,$$

woraus leicht: wenn man $\frac{\delta z}{\delta y}$ eliminirt

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial P'}{\partial x} = o,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot \partial P - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \partial P' = o.$$

Aber (Variationsrechnung 27. 38.)

$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) = \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}}$$

$$= \frac{y_1}{v} = \frac{\partial y}{v \partial x} = \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial z_1}\right) = \frac{z_1}{\sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}}$$
$$= \frac{z_1}{v} = \frac{\partial z}{v\partial x} = \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Also

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).\partial\frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\partial\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung, in Verbindung mit der gegebenen Gleichung

$$f(x, y, z) = 0,$$

reicht zur Bestimmung der kürzesten Linie hin.

Durch Vertauschung der Buchstaben erhält man aus obiger Gleichung:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).\partial\frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\partial\frac{\partial x}{\partial s} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).\partial\frac{\partial z}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).\partial\frac{\partial y}{\partial s} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).\partial\frac{\partial x}{\partial s} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).\partial\frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

Betrachtet man ∂s als constant; so werden diese Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial^2 y - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial^2 x = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial^2 z - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial^2 y = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial^2 x - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial^2 z = 0.$$

153. Bei einem Revolutionssphäroid sey jetzt die Axe der Drehung die Axe der z. Denkt man sich von irgend einem Punkte seiner Oberfläche auf die Ebene der xy ein Perpendikel z gefällt, und durch dessen Fußpunkt nach dem Anfange der Coordinaten die Linie t gezogen; so sind t, z Coordinaten der erzeugenden Curve, deren Gleichung also durch

$$\varphi(t, z) = 0$$

bezeichnet werden kann, so daß folglich t eine Function von z ist, und demnach

$$t = \varphi' z$$

gesetzt werden kann. Da offenbar

$$t^2 = x^2 + y^2;$$

so ist

$$x^2 + y^2 = (\varphi' z)^2,$$

oder, wenn man

$$-(\varphi' z)^2 = f' z$$

setzt,

$$x^2 + y^2 + f' z = o,$$

die Gleichung eines jeden Revolutionssphäroids, wo $f'z$ in jedem Falle aus der Gleichung der erzeugenden Curve bestimmt werden muß.

Setzen wir also in (152.)

$$u = x^2 + y^2 + f' z;$$

so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2x, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y,$$

$$x . \partial \frac{\partial y}{\partial s} - y . \partial \frac{\partial x}{\partial s} = o;$$

$$\left.\begin{array}{l} x . \partial \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial s} \partial x \\ - y . \partial \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \partial y \end{array}\right\} = o,$$

$$\partial . x \frac{\partial y}{\partial s} - \partial . y \frac{\partial x}{\partial s} = o,$$

$$x \frac{\partial y}{\partial s} - y \frac{\partial x}{\partial s} = C.$$

Also

$$x \partial y - y \partial x = C \partial s,$$

eine Gleichung, deren Integral, nebst der Gleichung

$$x + y^2 + f' z = o,$$

die kürzeste Linie bestimmt.

154. Die Gleichung einer Kugel ist bekanntlich

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = o,$$

den Mittelpunkt als Anfang der Coordinaten angenommen. Ohne aber diese Gleichung weiter zu berücksichtigen, läßt sich die kürzeste Linie auf der Kugel sehr leicht auf folgende Art bestimmen. Da man nämlich in diesem Falle, wenn der Anfang der Coordinaten der Mittelpunkt ist, jede Coordinatenaxe als Drehungsaxe annehmen kann; so lassen sich in der vorher gefundenen Differentialgleichung x, y, z gegen einander vertauschen. Dies giebt

Digitized by Google

$$x\partial y - y\partial x = C\partial s,$$
$$y\partial z - z\partial y = C'\partial s,$$
$$z\partial x - x\partial z = C''\partial s,$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen respective mit z, x, y, und addirt; so erhält man

$$o = Cz\,\partial s + C'x\,\partial s + C''y\,\partial s,$$
$$C'x + C''y + Cz = o,$$

welches die Gleichung einer durch den Mittelpunkt gehenden Ebene ist, wie sich leicht aus Krumme Fläche (4.) ergiebt. Demnach ist die kürzeste Linie auf der Kugel ein durch die beiden gegebenen Punkte gehender Bogen eines größten Kugelkreises.

155. Führt man nun in die Gleichung

$$x\partial y - y\partial x = C\,\partial s \quad (153.)$$

statt x, y die polaren Coordinaten φ, v ein; so ist

$$x = v\cos\varphi, \quad y = v\sin\varphi,$$

den Anfang der Coordinaten als Pol angenommen. Also

$$\partial x = \cos\varphi\,\partial v - v\sin\varphi\,\partial\varphi,$$
$$\partial y = \sin\varphi\,\partial v + v\cos\varphi\,\partial\varphi,$$

woraus leicht:

$$x\partial y - y\partial x = v^2\,\partial\varphi,$$

so daß also

$$\frac{v^2\,\partial\varphi}{\partial s} = C$$

eine constante Größe ist, für jede kürzeste Linie auf einem Rotationssphäroid.

Ferner erhält man leicht:

$$\partial s^2 = (\cos\varphi\,\partial v - v\sin\varphi\,\partial\varphi)^2$$
$$+ (\sin\varphi\,\partial v + v\cos\varphi\,\partial\varphi)^2$$
$$+ \partial z^2$$
$$= \partial v^2 + v^2\,\partial\varphi^2 + \partial z^2.$$

Also, wenn man ∂s aus dieser und obiger Gleichung eliminirt:

$$v^2(v^2 - C^2)\,\partial\varphi^2 = C^2(\partial v^2 + \partial z^2).$$

Durch Elimination von $\partial\varphi$ ergiebt sich:

$$(v^2 - C^2)\,\partial s^2 = v^2(\partial v^2 + \partial z^2).$$

Durch Verbindung dieser Gleichungen lassen sich manche bemerkenswerthe Relationen finden. Z. B.

$$\partial\varphi\,\partial s = \frac{C(\partial v^2 + \partial z^2)}{v^2 - C^2},$$

$$\frac{\partial s^2 + v^2\partial\varphi^2}{\partial s^2 - v^2\partial\varphi^2} = \frac{v^2 + C^2}{v^2 - C^2}.$$

156. Ist nun (Fig. 64.) P der Endpunkt der Rotationsaxe, beim elliptischen Sphäroid der Pol, und AA_1 ein Theil der kürzesten Linie durch A und A_1; so sey $A_1B = \partial s$, und durch A_1 lege man eine mit der Ebene der xy parallele Ebene, deren Durchschnitt A_1C mit der Oberfläche des Sphäroids ein Kreis ist. Der Radius dieses Kreises ist, wenn x, y, z die Coordinaten von A_1 sind, offenbar $= v$, und, da $\partial\varphi$ immer zu einem Kreise gehört, dessen Halbmesser $= 1$ ist; so ist

$$1 : v = \partial\varphi : A_1C, \quad A_1C = v\partial\varphi,$$

wobei zu bemerken ist, daß, so wie ∂s und $\partial\varphi$, offenbar auch A_1C und $\partial\varphi$ gleichzeitig positiv und negativ sind. Bezeichnen wir nun die Winkel PA_1B, BA_1C respective durch α, γ; so ist in dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck BA_1C:

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \cos\gamma, \quad \frac{v\partial\varphi}{\partial s} = \cos\gamma.$$

Da aber auch PA_1 auf A_1C senkrecht ist; so ist klar, daß immer

$$\cos\gamma = \sin\alpha,$$

und folglich

$$\frac{v\partial\varphi}{\partial s} = \sin\alpha, \quad \frac{v^2\partial\varphi}{\partial s} = v\sin\alpha,$$

also $v\sin\alpha = C$ ist, woraus sich die merkwürdige Eigenschaft jeder kürzesten Linie auf einem Rotationssphäroid ergiebt, daß immer $v\sin\alpha$ eine constante Größe ist.

Hat man auf der Oberfläche des Sphäroids drei durch kürzeste Linien mit einander verbundene Punkte, wodurch ein Dreieck AA_1A_2 gebildet wird, und man bezeichnet die Halbmesser der Parallelkreise durch A, A_1, A_2 durch v, v′, v″, die Winkel der Seiten AA_1, A_1A_2, A_2A mit PA, PA_1; PA_1, PA_2; PA_2, PA aber respective durch α, α'_1; α', α''_1; α'', α_1; so ist

$$v\sin\alpha = v'\sin\alpha'_1$$
$$v'\sin\alpha' = v''\sin\alpha''_1$$
$$v''\sin\alpha'' = v\sin\alpha_1,$$

woraus durch Multiplication sich leicht ergiebt:

$$\sin\alpha \sin\alpha' \sin\alpha'' = \sin\alpha_1 \sin\alpha'_1 \sin\alpha''_1,$$

für jedes Dreieck wie AA_1A_2 auf der Oberfläche eines Rotationssphäroids.

157. Ist nun das Sphäroid ein elliptisches; so ist offenbar v die immer als positiv betrachtete Abscisse der erzeugenden Ellipse. Beziehen sich daher jetzt v, α auf den Punkt A, dagegen v_1, α_1 auf den Punkt A_1; so ist (151.):

$$v = a\cos l, \; v_1 = a\cos l_1.$$

Also, da $v\sin\alpha$ constant ist:

$$a\cos l \sin\alpha = a\cos l_1 \sin\alpha_1,$$

$$\cos l \sin\alpha = \cos l_1 \sin\alpha_1.$$

Diese Gleichung enthält eine sehr wichtige allgemeine Relation zwischen den reducirten Breiten und Azimuthen irgend zweier Punkte. Man kann diese Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{\sin(90^0 - l)}{\sin(90^0 - l_1)} = \frac{\sin(180^0 - \alpha_1)}{\sin\alpha},$$

woraus erhellet, daß sie einem sphärischen Dreieck angehört, dessen zwei Seiten und Gegenwinkel $90^0 - l$, $90^0 - l_1$ und $180^0 - \alpha_1$, α sind. Wir wollen dieses für das Folgende sehr wichtige Dreieck immer das Hülfsdreieck nennen, und die dritte Seite nebst ihrem Gegenwinkel durch f und ψ bezeichnen.

158. Bezeichnet man den Radius des Parallelkreises durch A_1 mit ϱ, so daß in (156.) $v = \varrho$, den Radius des Krümmungskreises der Ellipse für denselben Punkt aber durch r; so bleibt r auch für C unverändert, und das unendlich kleine BC kann als ein Theil des Krümmungskreises in C betrachtet werden. Da nun BC offenbar das Differential der Breite von A_1 ist, welche wir hier $= \lambda$ setzen wollen; so ist

$$1 : r = \partial\lambda : BC, \; BC = r\partial\lambda.$$

Also im Dreieck A_1BC nach (156.), da $A_1B^2 = A_1C^2$ BC^2 ist,

$$\partial s = \partial\varphi \sqrt{\varrho^2 + r^2 \frac{\partial\lambda^2}{\partial\varphi^2}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{\varrho\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2}},$$

$$\frac{v^2 \partial\varphi}{\partial s} = \frac{\varrho^2 \partial\varphi}{\partial s} = \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2}}.$$

Also (155.)

$$\frac{\varrho}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2}} = C,$$

eine constante Größe, und, weil $C = v \sin\alpha = \varrho \sin\alpha$ (156.), immer

$$\sin\alpha \sqrt{1 + \left(\frac{r}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2} = 1.$$

Fundamentale Differentialformeln.

159. Wir fanden oben (155.)

$$v^2(v^2 - C^2)\partial\varphi^2 = C^2(\partial v^2 + \partial z^2),$$
$$(v^2 - C^2)\partial s^2 = v^2(\partial v^2 + \partial z^2).$$

Da nun v, z offenbar mit x, y bei der erzeugenden Ellipse einerlei sind; so ist (151.), wenn man jetzt alle veränderliche Größen auf A_1 beziehet:

$$v = a\cos l_1, \quad z = b\sin l_1;$$
$$\partial v = -a\sin l_1 \partial l_1, \quad \partial z = b\cos l_1 \partial l_1;$$
$$\partial v^2 + \partial z^2 = (a^2 \sin l_1{}^2 + b^2 \cos l_1{}^2)\partial l_1{}^2$$
$$= a^2(1 - e^2 \cos l_1{}^2)\partial l_1{}^2$$
$$= b^2(1 + \varepsilon^2 \sin l_1{}^2)\partial l_1{}^2.$$

Aber, wenn sich v einmal auf A beziehet:

$$C = v\sin\alpha = a\sin\alpha\cos l \quad (156.);$$

also

$$v^2 - C^2 = a^2(\cos l_1{}^2 - \sin\alpha^2 \cos l^2).$$

Sind nun L und L_1 die Längen der Punkte A und A_1; so erhellet augenblicklich, daß $\varphi = L_1$. Aber immer

$$L_1 - L = \pm\sigma,$$

und folglich auch

$$\varphi - L = \pm\sigma, \quad \partial\varphi = \pm\partial\sigma,$$

da L als constant angesehen werden muß. Also immer $\partial\varphi^2 = \partial\sigma^2$.

Nach gehöriger Substitution dieser Ausdrücke in die beiden obigen Gleichungen ergiebt sich

$$\partial\sigma = \pm \frac{\sin\alpha \cos l \sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \partial l_1}{\cos l_1 \sqrt{\cos l_1^2 - \sin\alpha^2 \cos l^2}},$$

$$\partial s = \pm \frac{a \cos l_1 \sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \partial l_1}{\sqrt{\cos l_1^2 - \sin\alpha^2 \cos l^2}},$$

welche zwei Formeln, nebst der Formel

$$\cos l \sin\alpha = \cos l_1 \sin\alpha_1,$$

die Grundformeln der sphäroidischen Trigonometrie sind.

Es ist nur noch zu bestimmen, welche Vorzeichen man für $\partial\sigma$ und ∂s nehmen muß. Ist $\alpha_1 < 90^0$; so erhellet aus Fig. 65. augenblicklich, daß mit einem Wachsthum von σ und s auch ein Wachsthum von l_1 verbunden ist, und demnach die obern Zeichen zu nehmen sind. Ist aber $\alpha > 90^0$; so zeigt (Fig. 66.), daß mit einem Wachsthum von σ und s eine Abnahme von l_1 verbunden ist, und daher die untern Zeichen zu nehmen sind. Daß $\partial\sigma$ und ∂s immer einerlei Zeichen haben, erhellet augenblicklich. Die Quadratwurzel ist, wenn man diese Regeln für die Zeichen befolgt, immer positiv zu nehmen. Anstatt e läßt sich leicht ε oder b in die Gleichungen einführen.

Transformation dieser Gleichungen.

160. In dem Hülfsdreieck (157.), wo α, $90^0 - l$ unveränderlich sind, hat man (131.):

$$\partial(90^0 - l_1) = \cos(180^0 - \alpha_1)\partial f,$$

$$\tan(180^0 - \alpha_1)\partial(90^0 - l_1) = -\tan(90^0 - l_1)\partial(180^0 - \alpha_1),$$

$$-\partial(180^0 - \alpha_1) = \cos(90^0 - l_1)\partial\psi,$$

d. i.

$$\partial l_1 = \cos\alpha_1 \partial f,$$

$$\tan\alpha_1 \partial l_1 = \cot l_1 \partial\alpha_1,$$

$$\partial\alpha_1 = \sin l_1 \partial\psi.$$

Hieraus erhält man leicht, wenn man $\partial\alpha_1$ eliminirt:

$$\partial l_1 = \frac{\cos\alpha_1 \cos l_1}{\sin\alpha_1} \partial\psi.$$

Aber (159.):

$$\sin\alpha_1 = \frac{\sin\alpha \cos l}{\cos l_1},$$

$$\pm \cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{\cos l_1^2 - \sin \alpha^2 \cos l^2}}{\cos l_1}.$$

Die Wurzel wird immer positiv genommen (159.), und auch $\cos l_1$ ist, da l_1 nie $> 90^0$, immer positiv. Also ist dieser Bruch immer positiv, und folglich das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $\alpha_1 <$ oder $> 90^0$ ist. Nach gehöriger Substitution erhält man:

$$\partial\sigma = \pm \frac{\sin \alpha \cos l \sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \cos \alpha_1 \cos l_1 \partial\psi}{\cos l_1 \sin \alpha_1 \cdot \pm \cos \alpha_1 \cos l_1},$$

$$\partial s = \pm \frac{a \cos l_1 \sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \cos \alpha_1 \partial f}{\pm \cos \alpha_1 \cos l_1},$$

wo die obern oder untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem $\alpha_1 <$ oder $> 90^0$ ist. (M. s. vorher und 159.). Hieraus ergeben sich nach leichter Reduction als Grundformeln der sphäroidischen Trigonometrie:

$$\sin \alpha \cos l = \sin \alpha_1 \cos l_1,$$
$$\partial\sigma = \sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \partial\psi,$$
$$\partial s = a\sqrt{1 - e^2 \cos l_1^2} \cdot \partial f;$$

wo die Quadratwurzel immer positiv zu nehmen ist. ε oder b lassen sich leicht statt e einführen.

161. Nun ist aber (57.) in dem Hülfsdreieck:

$$\cos(90^0 - l_1) = \sin(90^0 - l) \sin f \cos \alpha + \cos(90^0 - l) \cos f,$$
$$\sin l_1 = \cos l \cos \alpha \sin f + \sin l \cos f.$$

Setzen wir daher für die beiden Hülfswinkel h und h_1:

$$\sin l_1 = \cos h \sin(h_1 + f) = \cos h \cos h_1 \sin f + \cos h \sin h_1 \cos f;$$

so ergiebt sich:

$$\cos l \cos \alpha = \cos h \cos h_1,$$
$$\sin l = \cos h \sin h_1,$$

und hieraus

$$\tang h_1 = \frac{\tang l}{\cos \alpha}, \quad \cos h = \frac{\sin l}{\sin h_1},$$

mittelst welcher Formeln sich die beiden Hülfswinkel berechnen lassen. h und h_1 sind als constant zu betrachten, da man hier immer α, l als constant betrachtet.

Setzt man nun in der Formel für ∂s

$$\cos l_1^2 = 1 - \cos h^2 \sin(h_1 + f)^2;$$

so erhält man nach einigen Reductionen:

$$\partial s = a\sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos h^2 \sin(h_1 + f)^2}.\partial f$$
$$= b\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos h^2 \sin(h_1 + f)^2}.\partial f.$$

Da ferner nach der ersten Hauptformel in (160.) und nach den dort bewiesenen Differentialformeln

$$\partial\psi = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1 \cos l_1}\partial l_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\cos l_1}\partial f$$
$$= \frac{\sin\alpha \cos l}{\cos l_1^2}\partial f$$

ist; so ist

$$\partial\sigma = \frac{\sin\alpha\cos l\sqrt{1 - e^2\cos l_1^2}}{\cos l_1^2}\partial f.$$

Integration der Formeln für ∂s und $\partial\sigma$.

162. Um diese Integration mit Leichtigkeit auszuführen, ist zuerst zu bemerken, daß die Größe $1 \pm p^2 \sin x^2$ sich immer in zwei imaginäre Factoren zerfällen läßt. Bezeichnet man nämlich die Basis der hyperbolischen Logarithmen, um sie von der Excentricität zu unterscheiden, hier durch c, und $\sqrt{-1}$ durch i; so setze man

$$1 + p^2 \sin x^2 = m^2(1 - nc^{2ix})(1 - nc^{-2ix}),$$

woraus nach Entwickelung des Products, indem man

$$\frac{c^{ix} - c^{-ix}}{2i} = \sin x$$

setzt (Differentialformeln. 48.), leicht erhalten wird.

$$1 + p^2 \sin x^2 = m^2\{(1-n)^2 + 4n\sin x^2\}.$$

Dies giebt die beiden Gleichungen $m^2(1-n)^2 = 1$, $4m^2 n = p^2$, aus denen nach bekannten Regeln

$$n = \frac{p^2 + 1 \pm 2\sqrt{p^2+1} + 1}{p^2}$$
$$= \left\{\frac{\sqrt{p^2+1} \pm 1}{p}\right\}^2 = \frac{\sqrt{p^2+1} - 1}{\sqrt{p^2+1} + 1},$$

wenn man nur das untere Zeichen beibehält. Ferner

$$m = \frac{p^2}{2(\sqrt{p^2+1} \pm 1)} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{p^2+1} \mp 1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{p^2+1} + 1),$$

wenn man, wie vorher, das untere Zeichen beibehält.

Eben so setze man

$$1 - p^2 \sin x^2 = \mu^2 (1 - \nu c^{2ix})(1 - \nu c^{-2ix})$$
$$= \mu^2 \{(1 - \nu)^2 + 4\nu \sin x^2\},$$
$$\mu^2 (1 - \nu)^2 = 1,\ 4\mu^2 \nu = - p^2;$$
$$\nu = - \frac{(1 - p^2) \mp 2\sqrt{1 - p^2} + 1}{p^2}$$
$$= - \left\{\frac{\sqrt{1 - p^2} \mp 1}{p}\right\}^2 = \frac{\sqrt{1 - p^2} - 1}{\sqrt{1 - p^2} + 1},$$

wenn man das obere Zeichen beibehält.

$$\mu = \frac{p^2}{2(\sqrt{1 - p^2} \mp 1)} = - \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 - p^2} \pm 1)$$
$$= - \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 - p^2} + 1),$$

wenn man ebenfalls das obere Zeichen beibehält.

Man hat bei dieser Entwickelung zu merken, daß

$$p^2 = (\sqrt{p^2 + 1} - 1)(\sqrt{p^2 + 1} + 1)$$
$$- p^2 = (\sqrt{1 - p^2} - 1)(\sqrt{1 - p^2} + 1)$$

ist.

163. Wendet man nun die erste Zerlegung auf die Formel

$$\partial s = b\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos h^2 \sin (h_1 + f)^2} . \partial f,$$

indem man $p = \varepsilon \cos h$ setzt, an; so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos h^2} - 1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos h^2} + 1} = \varepsilon_1$$

gesetzt wird:

$$\partial s = \tfrac{1}{2} b \left\{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos h^2} + 1\right\}$$
$$\times \left\{1 - \varepsilon_1 c^{2i(h_1 + f)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \left\{1 - \varepsilon_1 c^{-2i(h_1 + f)}\right\}^{\frac{1}{2}} . \partial f.$$

Entwickelt man nun die beiden imaginären Factoren nach dem Binomialtheorem in Reihen; so ergiebt sich, indem man das Product nach den positiven und negativen geraden Potenzen von $c^{i(h_1 + f)}$ ordnet, und

$$\mathfrak{A} = 1 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot \varepsilon_1^{\,2} + \left(\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\right)^2 \varepsilon_1^{\,4} + \left(\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 \cdot \varepsilon_1^{\,6} + \left(\frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\right)^2 \cdot \varepsilon_1^{\,8} + \ldots,$$

$$\overset{1}{\mathfrak{A}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4} \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{\,3} - \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\varepsilon_1^{\,5} - \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8} \cdot \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\varepsilon_1^{\,7} - \ldots,$$

$$\overset{2}{\mathfrak{A}} = \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\varepsilon_1^{\,2} - \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{\,4} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \frac{1.1}{2.4}\varepsilon_1^{\,6} - \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10} \cdot \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\varepsilon_1^{\,8} - \ldots,$$

$$\overset{3}{\mathfrak{A}} = \frac{1.1.3}{2.4.6}\varepsilon_1^{\,3} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{\,5} - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \cdot \frac{1.1}{2.4}\varepsilon_1^{\,7} - \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,.\,9}{2\,.\,4\,.\,.\,.\,12} \cdot \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\varepsilon_1^{\,9} - \ldots,$$

$$\overset{4}{\mathfrak{A}} = \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\varepsilon_1^{\,4} - \frac{1.1.3..7}{2.4\ldots10} \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^{\,6} - \frac{1.1.3..9}{2.4\ldots12} \cdot \frac{1.1}{2.4}\varepsilon_1^{\,8} - \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,.\,11}{2\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,14} \cdot \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\varepsilon_1^{\,10} - \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

setzt, dieses Product

$$\begin{aligned} &= \mathfrak{A} - \overset{1}{\mathfrak{A}}\left\{c^{2i(h_1+f)} + c^{-2i(h_1+f)}\right\} \\ &\quad - \overset{2}{\mathfrak{A}}\left\{c^{4i(h_1+f)} + c^{-4i(h_1+f)}\right\} \\ &\quad - \overset{3}{\mathfrak{A}}\left\{c^{6i(h_1+f)} + c^{-6i(h_1+f)}\right\} \\ &\quad - \overset{4}{\mathfrak{A}}\left\{c^{8i(h_1+f)} + c^{-8i(h_1+f)}\right\} \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots \\ &= \mathfrak{A} - 2\overset{1}{\mathfrak{A}}\cos 2(h_1+f) \\ &\quad - 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\cos 4(h_1+f) \\ &\quad - 2\overset{3}{\mathfrak{A}}\cos 6(h_1+f) \\ &\quad - 2\overset{4}{\mathfrak{A}}\cos 8(h_1+f) \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

(Differentialformeln. 48.) und folglich

$$\partial s = \tfrac{1}{2}b\left\{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos h^2} + 1\right\}\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A} - 2\overset{1}{\mathfrak{A}}\cos 2(h_1+f) \\ &\quad - 2\overset{2}{\mathfrak{A}}\cos 4(h_1+f) \\ &\quad - 2\overset{3}{\mathfrak{A}}\cos 6(h_1+f) \\ &\quad - 2\overset{4}{\mathfrak{A}}\cos 8(h_1+f) \\ &\quad - \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\partial f$$

Aber

$$\int \cos n(h_1 + f)\partial f = \frac{1}{n} \sin n(h_1 + f).$$

Also

$$s = \tfrac{1}{2} b \{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos h^2}+1\}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}f - \frac{1}{1}\overset{1}{\mathfrak{A}} \sin 2(h_1 + f) \\ \quad - \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} \sin 4(h_1 + f) \\ \quad - \frac{1}{3}\overset{3}{\mathfrak{A}} \sin 6(h_1 + f) \\ \quad - \frac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}} \sin 8(h_1 + f) \\ \quad - \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} + \text{Const.}$$

Da aber offenbar $s = 0$ für $\alpha_1 = \alpha$, $l_1 = l$, d. i., wie augenblicklich erhellet, da denn das Hülfsdreieck in den Meridianbogen durch A übergeht, für $f = 0$; so erhält man

$$\text{Const} = \tfrac{1}{2} b \{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos h^2}+1\}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}\overset{1}{\mathfrak{A}} \sin 2h_1 + \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} \sin 4h_1 \\ \quad + \frac{1}{3}\overset{3}{\mathfrak{A}} \sin 6h_1 \\ \quad + \frac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}} \sin 8h_1 \\ \quad + \ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$$s = \tfrac{1}{2} b \{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos h^2}+1\}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}f - \frac{1}{1}\overset{1}{\mathfrak{A}}[\sin 2(h_1 + f) - \sin 2h_1] \\ \quad - \frac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}}[\sin 4(h_1 + f) - \sin 4h_1] \\ \quad - \frac{1}{3}\overset{3}{\mathfrak{A}}[\sin 6(h_1 + f) - \sin 6h_1] \\ \quad - \frac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}}[\sin 8(h_1 + f) - \sin 8h_1] \\ \quad - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$$s = \tfrac{1}{2} b \{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos h^2}+1\}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}f - \frac{2}{1}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cos(2h_1 + f)\sin f \\ \quad - \frac{2}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cos(4h_1 + 2f)\sin 2f \\ \quad - \frac{2}{3}\overset{3}{\mathfrak{A}} \cos(6h_1 + 3f)\sin 3f \\ \quad - \frac{2}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}} \cos(8h_1 + 4f)\sin 4f \\ \quad - \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

(Goniometrie. 28.)

Diese Formel soll im Folgenden immer durch (A) bezeichnet werden.

164. Wäre ε sehr klein, und es wäre verstattet, höhere Potenzen als ε^2 zu vernachlässigen; so erhielte man

$$\frac{\partial s}{b} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos h^2 \sin(h_1 + f)^2} \,.\, \partial f$$
$$= \{1 + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos h^2 \sin(h_1 + f)^2\}\partial f,$$
$$= \{1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2[1 - \cos 2(h_1 + f)]\}\partial f,$$
$$\frac{s}{b} = (1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2) f - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \cos h^2 \sin 2(h_1 + f) + \text{Const.}$$

Bestimmt man nun die Constante wie vorher; so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{s}{b} = f + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 \{f - \cos(2h_1 + f) \sin f\},$$

welche Näherungsformel immer durch (A′) bezeichnet werden soll.

165. Um nun auch σ zu finden, entwickele man in der Formel für $\partial\sigma$ (161.) die Quadratwurzel in eine Reihe; so erhält man:

$$\partial\sigma = \frac{\sin\alpha \cos l\, \partial f}{\cos l_1{}^2} - \tfrac{1}{2}e^2 \sin\alpha \cos l \left\{ 1 + \tfrac{1}{4}e^2 \cos l_1{}^2 + \frac{1\,.\,3}{4\,.\,6} e^4 \cos l_1{}^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{4\,.\,6\,.\,8} e^6 \cos l_1{}^6 + \ldots\ldots \right\} \partial f$$

$$\int \frac{\partial f}{\cos l_1{}^2} = \int \frac{\partial f}{1 - \cos h^2 \sin(h_1 + f)^2}$$
$$= \frac{1}{\sin h} \int \frac{\sin h\, \partial f}{1 - \cos h^2 \sin(h_1 + f)^2},$$

woraus, wenn man Zähler und Nenner mit $\cos(h_1 + f)^2$ dividirt, und $\partial f = \partial(h_1 + f)$ setzt, leicht erhalten wird:

$$\int \frac{\partial f}{\cos l_1{}^2} = \frac{1}{\sin h} \int \frac{\partial . \sin h \tang(h_1 + f)}{1 + \sin h^2 \tang(h_1 + f)^2}$$
$$= \frac{1}{\sin h} \text{Arc} \tang \sin h \tang(h_1 + f).$$

(Differentialformeln. 31.)

Die Constante muß hier wieder dadurch bestimmt wer-

den, daß $\sigma = o$ für $f = o$, wie leicht erhellet. Dadurch erhält man den ersten Theil der Reihe für $\sigma =$

$$\frac{\sin\alpha\cos l}{\sin h}\left\{\begin{matrix}\text{Arc tang}\sin h\,\text{tang}(h_1 + f)\\ - \text{Arc tang}\sin h\,\text{tang}\,h_1\end{matrix}\right\}.$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos l}{\sin h}(z - z').$$

Aber nach (161.)

$$\sin h^2 = 1 - \frac{\sin l^2}{\sin h_1{}^2},$$

$$\sin h_1{}^2 = \frac{\text{tang}\,h_1{}^2}{1 + \text{tang}\,h_1{}^2}$$

$$= \frac{\text{tang}\,l^2}{\cos\alpha^2 + \text{tang}\,l^2}$$

$$= \frac{\sin l^2}{\cos\alpha^2\cos l^2 + \sin l^2},$$

$$\sin h^2 = 1 - \sin l^2 - \cos\alpha^2\cos l^2,$$

$$= \cos l^2 - \cos\alpha^2\cos l^2$$

$$= \sin\alpha^2\cos l^2,$$

$$\sin h = \sin\alpha\cos l,$$

da $\sin\alpha\cos l$ immer positiv ist, weil α nicht $> 180^0$, l nicht $> 90^0$, und h, das durch seinen Cosinus gefunden wird (161.), auch nicht $> 180^0$ genommen zu werden braucht. Demnach ist der erste Theil unsers Integrals $=$

$$\left.\begin{matrix}\text{Arc tang}\sin h\,\text{tang}(h_1 + f)\\ - \text{Arc tang}\sin h\,\text{tang}\,h_1\end{matrix}\right\} = z - z'.$$

Aber

$$\text{tang}\,z = \sin h\,\text{tang}(h_1 + f),$$

$$\text{tang}\,z' = \sin h\,\text{tang}\,h_1.$$

Also

$$\text{tang}(z - z') = \frac{\sin h\{\text{tang}(h_1 + f) - \text{tang}\,h_1\}}{1 + \sin h^2\,\text{tang}(h_1 + f)\,\text{tang}\,h_1}$$

$$= \frac{\sin h\sin f}{\cos(h_1 + f)\cos h_1 + \sin h^2\sin(h_1 + f)\sin h_1},$$

$$= \frac{\sin h\sin f}{\cos f - \cos h^2\sin(h_1 + f)\sin h_1}$$

$$= \frac{\sin h\sin h_1\sin f}{\cos f\sin h_1 - \sin l^2\sin(h_1 + f)} \quad (161.)$$

$$= \frac{\sin h\sin f}{\cos l^2\cos f - \sin l^2\cot h_1\sin f}$$

$$= \frac{\sin h}{\cos l}\cdot\frac{\sin f}{\cos l\cos f - \sin l\sin f\cos\alpha},$$

wenn man $\cot h_1 = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{tang} l}$ (161.) setzt, oder

$$\operatorname{tang}(z - z') = \frac{\sin h}{\cos l} \cdot \frac{1}{\cos l \cot f - \sin l \cos\alpha}.$$

Nach (65.) ist aber im Hülfsdreieck:

$$\cot\psi = \frac{\sin(90^0 - l)\cot f - \cos(90^0 - l)\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\cos l \cot f - \sin l \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Also

$$\operatorname{tang}(z - z') = \frac{\sin h}{\sin\alpha\cos l} \operatorname{tang}\psi,$$
$$\operatorname{tang}(z - z') = \operatorname{tang}\psi,$$

und folglich $z - z' = \psi$, der erste Theil des Ausdrucks für σ.

Setzen wir nun

$$\varepsilon_2 = \frac{\sin h - 1}{\sin h + 1} = - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi - h)^2,$$

(Goniometrie. 40.); so giebt die zweite Zerlegung in (162.)

$$\cos l_1{}^2 = 1 - \cos h^2 \sin(h_1 + f)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(\sin h + 1)^2 \left\{1 - \varepsilon_2\, c^{2i(h_1 + f)}\right\}$$
$$\left\{1 - \varepsilon_2\, c^{-2i(h_1 + f)}\right\}.$$

Entwickelt man nun überhaupt die Factoren des Products

$$\left\{1 - \varepsilon_2\, c^{2i(h_1 + f)}\right\}^n . \left\{1 - \varepsilon_2\, c^{-2i(h_1 + f)}\right\}^n$$

nach dem binomischen Lehrsatze in Reihen, und ordnet die Glieder des Products nach den positiven und negativen geraden Potenzen von $c^{i(h_1 + f)}$; so erhält man, wenn allgemein

$$N = 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 . \varepsilon_2{}^2 + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 . \varepsilon_2{}^4 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\right)^2 . \varepsilon_2{}^6$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{1}{N} = 1 . \frac{n}{1}\varepsilon_2 + \frac{n}{1} . \frac{n(n-1)}{1.2}\varepsilon_2{}^3 + \frac{n(n-1)}{1.2} . \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varepsilon_2{}^5$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . \frac{n..(n-3)}{1...4}\varepsilon_2{}^7 + \ldots$$

$$\overset{2}{N} = 1 . \frac{n(n-1)}{1.2}\varepsilon_2{}^2 + \frac{n}{1} . \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varepsilon_2{}^4 + \frac{n(n-1)}{1.2} . \frac{n..(n-3)}{1...4}\varepsilon_2{}^6$$
$$+ \frac{n..(n-2)}{1.2.3} . \frac{n..(n-4)}{1...5}\varepsilon_2{}^8 + \ldots$$

$$\overset{3}{N} = 1 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varepsilon_2^{\,3} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n...(n-3)}{1..4}\varepsilon_2^{\,5} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{n..(n-4)}{1..5}\varepsilon_2^{\,7}$$
$$+ \frac{n..(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{n..(n-5)}{1...6} \cdot \varepsilon_2^{\,9} + \ldots$$

u. s. f. u. s. f.

gesetzt wird, obiges Product

$$\begin{aligned} = & \; N \\ & - \overset{1}{N}\{c^{2i(h_1+f)} + c^{-2i(h_1+f)}\} \\ & + \overset{2}{N}\{c^{4i(h_1+f)} + c^{-4i(h_1+f)}\} \\ & - \overset{3}{N}\{c^{6i(h_1+f)} + c^{-6i(h_1+f)}\} \\ & + \overset{4}{N}\{c^{8i(h_1+f)} + c^{-8i(h_1+f)}\} \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \; N \\ & - 2\overset{1}{N}\cos 2(h_1+f) \\ & + 2\overset{2}{N}\cos 4(h_1+f) \\ & - 2\overset{3}{N}\cos 6(h_1+f) \\ & + 2\overset{4}{N}\cos 8(h_1+f) \\ & - \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Also

$$\cos l_1^{\,2n} = \frac{1}{2^{2n}}(\sin h + 1)^{2n} \cdot \left\{\begin{aligned} & N \\ & - 2\overset{1}{N}\cos 2(h_1+f) \\ & + 2\overset{2}{N}\cos 4(h_1+f) \\ & - 2\overset{3}{N}\cos 6(h_1+f) \\ & + 2\overset{4}{N}\cos 8(h_1+f) \\ & - \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Da n immer eine positive ganze Zahl ist; so ist offenbar immer $\overset{n+1}{N} = 0$, und die Reihe bricht also immer mit diesem Gliede ab. Der zweite Theil von $\partial\sigma$ ist also das Product von $-\frac{1}{2}e^2 \sin\alpha \cos l \partial f$ in:

$$1 + \tfrac{1}{4}e^2 \cdot \left(\frac{\sin h + 1}{2}\right) \cdot \{A - 2\overset{1}{A}\cos 2(h_1+f)\}$$
$$+ \frac{1.3}{4.6}e^4 \cdot \left(\frac{\sin h + 1}{2}\right)^4 \cdot \left\{\begin{aligned} & B \\ & - 2\overset{1}{B}\cos 2(h_1+f) \\ & + 2\overset{2}{B}\cos 4(h_1+f) \end{aligned}\right.$$

$$+ \frac{1.3.5}{4.6.8} e^6 . \left(\frac{\sin h + 1}{2}\right)^6 . \Big\{ C - 2\overset{1}{C} \cos 2(h_1 + f) + 2\overset{2}{C} \cos 4(h_1 + f) - 2\overset{3}{C} \cos 6(h_1 + f) \Big\}$$

$$+ \frac{1 \ldots 7}{4 \ldots 10} e^8 . \left(\frac{\sin h + 1}{2}\right)^8 . \Big\{ D - 2\overset{1}{D} \cos 2(h_1 + f) + 2\overset{2}{D} \cos 4(h_1 + f) - 2\overset{3}{D} \cos 6(h_1 + f) + 2\overset{4}{D} \cos 8(h_1 + f) \Big\}$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ordnet man nun nach den Cosinussen der Vielfachen, und setzt

$$\mathfrak{B} = 1 + \tfrac{1}{4} e^2 . \left(\frac{\sin h + 1}{2}\right)^2 . A + \frac{1.3}{4.6} e^4 \left(\frac{\sin h + 1}{2}\right)^4 . B + \frac{1.3.5}{4.6.8} e^6 \left(\frac{\sin h + 1}{2}\right)^6 . C + \ldots\ldots$$

$$\overset{1}{\mathfrak{B}} = \tfrac{1}{4} e^2 . \frac{(\sin h + 1)^2}{2} . \overset{1}{A} + \frac{1.3}{4.6} e^4 . \frac{(\sin h + 1)^4}{2^3} . \overset{1}{B} + \frac{1.3.5}{4.6.8} e^6 . \frac{(\sin h + 1)^6}{2^5} . \overset{1}{C} + \ldots\ldots$$

$$\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{1.3}{4.6} e^4 . \frac{(\sin h + 1)^4}{2^3} . \overset{2}{B} + \frac{1.3.5}{4.6.8} e^6 . \frac{(\sin h + 1)^6}{2^5} . \overset{2}{C} + \frac{1 \ldots 7}{4 \ldots 10} e^8 . \frac{(\sin h + 1)^8}{2^7} . \overset{2}{D} + \ldots\ldots$$

$$\overset{3}{\mathfrak{B}} = \frac{1.3.5}{4.6.8} e^6 . \frac{(\sin h + 1)^6}{2^5} . \overset{3}{C} + \frac{1 \ldots 7}{4 \ldots 10} e^8 . \frac{(\sin h + 1)^8}{2^7} . \overset{3}{D} + \frac{1 \ldots 9}{4 \ldots 12} e^{10} . \frac{(\sin h + 1)^{10}}{2^9} . \overset{3}{E} + \ldots\ldots$$

u. s. f. u. s. f.

so wird der zweite Theil von $\partial\sigma =$

$$-\tfrac{1}{2}e^2 \sin\alpha\cos l \left\{ \mathfrak{B} - \overset{1}{\mathfrak{B}}\cos 2(h_1 + f) + \overset{2}{\mathfrak{B}}\cos 4(h_1 + f) - \overset{3}{\mathfrak{B}}\cos 6(h_1 + f) + \overset{4}{\mathfrak{B}}\cos 8(h_1 + f) - \ldots\ldots\ldots \right\} \partial f$$

wovon das Integral, wenn man zugleich die Constante so bestimmt, daß σ für $\alpha_1 = \alpha$, $l_1 = l$, d. h. für $f = 0$, verschwindet, ganz auf ähnliche Art wie vorher leicht auf folgenden Ausdruck gebracht wird:

$$-\tfrac{1}{2}e^2 \sin\alpha\cos l \left\{ \mathfrak{B}f - \tfrac{1}{1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(2h_1 + f)\sin f + \tfrac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(4h_1 + 2f)\sin 2f - \tfrac{1}{3}\overset{3}{\mathfrak{B}}\cos(6h_1 + 3f)\sin 3f + \tfrac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{B}}\cos(8h_1 + 4f)\sin 4f - \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

Also

$$\sigma = \psi - \tfrac{1}{2}e^2 \sin\alpha\cos l \left\{ \mathfrak{B}f - \tfrac{1}{1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(2h_1 + f)\sin f + \tfrac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(4h_1 + 2f)\sin 2f - \tfrac{1}{3}\overset{3}{\mathfrak{B}}\cos(6h_1 + 3f)\sin 3f + \tfrac{1}{4}\overset{4}{\mathfrak{B}}\cos(8h_1 + 4f)\sin 4f - \ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

Diese Formel soll im Folgenden immer durch (B) bezeichnet werden. Vernachlässigt man Glieder mit höhern Potenzen als e^2; so erhält man

$$\sigma = \psi - \tfrac{1}{2}e^2 f \sin\alpha\cos l,$$

oder, da

$$e^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} = \varepsilon^2 - \varepsilon^4 + \varepsilon^6 - \ldots$$

ist, mit demselben Grade der Genauigkeit in Bezug auf ε:

$$\sigma = \psi - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f \sin\alpha\cos l.$$

Die erstere Formel werden wir im Folgenden immer durch (B′) bezeichnen. Wie ψ durch α, l ausgedrückt wird, erhellet aus dem Obigen.

Auflösung einiger Aufgaben.

166. Die drei Formeln

$$\sin\alpha\cos l = \sin\alpha_1\cos l_1,\ (A),\ (B),$$

oder statt der beiden letztern, wenn der Gebrauch erlaubt ist, auch die verkürzten, (A'), (B') sind nun die entwickelten Grundformeln der sphäroidischen Trigonometrie. Aus der Verbindung dieser Formeln unter einander ergiebt sich wie in den beiden andern Trigonometrieen die Auflösung aller möglichen Fälle. Die Entwickelung kommt aber größtentheils auf die Umkehrung einer Reihe zurück. Daß diese Operation zu den weitläuftigsten der Analysis gehört, weiß Jeder. Der Raum erlaubt uns daher nicht, hier eine vollständige Ausführung zu geben, wozu ein weitläufiges Werk erforderlich seyn würde, und wir müssen uns, um die Methode zu zeigen, mit der Auflösung einiger, auch praktisch wichtigen, Fälle begnügen. Die übrigen, hier nicht behandelten, Fälle werden in der Anwendung wenig vorkommen. Wer übrigens die nöthigen analytischen Hülfsmittel in seiner Gewalt hat, wird die Auflösung aller Fälle leicht auszuführen im Stande seyn, besonders, wenn er sich nicht der vollständigen, sondern der verkürzten Formeln bedient, er möge denn, wie wir, blos die zweite Potenz, oder noch höhere Potenzen berücksichtigen.

Aus dem Azimuth α des einen Punktes und den Breiten l, l_1 die kürzeste Linie s, die Längendifferenz σ und das Azimuth α_1 zu finden.

In dem Hülfsdreieck berechne man aus den drei gegebenen Stücken α, $90^0 - l$, $90^0 - l_1$ die drei übrigen Stücke $180^0 - \alpha_1$, f, ψ, und mittelst der Formeln

$$\tan h_1 = \frac{\tan l}{\cos\alpha},\quad \cos h = \frac{\sin l}{\sin h_1}$$

die Hülfswinkel h_1 und h; so hat man aus $180^0 - \alpha_1$, auch α_1, und aus den Formeln (A) oder (A'), und (B) oder (B') ergeben sich s und σ. Man bemerke hierbei nur, daß sich die oben entwickelten Formeln auf Theile des Ra-

dius beziehen, die Bögen nach hinlänglich bekannten Methoden aber immer leicht in Secunden und umgekehrt ausgedrückt werden können.

Sollte man z. B. aus α, α_1 und 1 das Dreieck auflösen, so könnte man ganz wie vorher verfahren.

167. Eine der wichtigsten Aufgaben, mit deren Auflösung sich mehrere berühmte Mathematiker (Z. B. Legendre in den Mém. de Paris. 1787. p. 368. Oriani in seinen Elementi di Trig. sferoidica. Bologna 1806. 4. p. 49. beschäftigt haben, ist folgende:

Aus der Länge der kürzesten Linie s, der Breite l und dem Azimuth α des einen Punktes A, die Breite l_1, das Azimuth α_1, und die Längendifferenz σ zu finden.

Man übersieht leicht, daß die Auflösung auf die Umkehrung der Reihe (A) zurückkommt, um f aus s, α, l zu finden. Denn dann sind drei Stücke α, $90^0 - l$, f des Hülfsdreiecks gegeben, und $90^0 - l_1$, $180^0 - \alpha_1$, also auch l_1 und α_1 lassen sich nach bekannten Regeln, σ aber mittelst der Reihe (B) berechnen, da aus der Auflösung des Hülfsdreiecks sich auch ψ ergiebt. Für die Ausübung scheint folgendes Verfahren den Vorzug zu verdienen, wenn die Excentricität e, also auch ε, sehr klein ist, wie dies bei der Anwendung auf geodätische Messungen bekanntlich immer der Fall ist. Aus (A) ergiebt sich leicht:

$$f = \frac{1}{\mathfrak{A}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2s}{b\{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos h^2}+1\}} \\ + \frac{2}{1}\overset{1}{\mathfrak{A}} \cos(2h_1 + f) \sin f \\ + \frac{2}{2}\overset{2}{\mathfrak{A}} \cos(4h_1 + 2f) \sin 2f \\ + \frac{2}{3}\overset{3}{\mathfrak{A}} \cos(6h_1 + 3f) \sin 3f \\ + \frac{2}{4}\overset{4}{\mathfrak{A}} \cos(8h_1 + 4f) \sin 4f \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Da nun ε sehr klein ist, und $\overset{1}{\mathfrak{A}}$, $\overset{2}{\mathfrak{A}}$, $\overset{3}{\mathfrak{A}}$, u. s. f. alle schon in den ersten Gliedern ε enthalten; so setze man als ersten Näherungswerth

$$f = \frac{1}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{2s}{b\{\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos h^2}+1\}},$$

nachdem man h, h_1 wie vorher (166.) aus α, 1 berechnet hat. Diesen ersten Näherungswerth setze man für f in den zweiten Theil obiger Gleichung, woraus ein zweiter Näherungswerth von f hervorgeht, welcher eben so zu einem dritten, dieser wieder zu einem vierten führt, u. s. f. Man muß dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis zwei auf einander folgende Näherungswerthe sich in der verlangten Anzahl von Decimalstellen nicht mehr unterscheiden.

Dieses Verfahren ist, wie es uns scheint, für die Ausübung bei Weitem das brauchbarste, in diesem Falle, und in allen ähnlichen. Um indeß auch einen entwickelten Werth von f zu erhalten, und zugleich die Anwendung des von Oriani und Legendre ebenfalls häufig gebrauchten Lagrangischen Satzes zu zeigen, wollen wir hier noch f bis auf die vierte Potenz von ε berechnen. So weit geht auch Legendre a. a. O., Oriani dagegen giebt eine sehr complicirte allgemeine Reihe.

Entwickelt man ∂s bis zu dem Gliede mit ε^4; so ergiebt sich

$$\frac{\partial s}{b} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos h^2 \sin(h_1 + f)^2 \\ \quad - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \cos h^4 \sin(h_1 + f)^4 \end{array} \right\} \partial f,$$

woraus, wenn man

$$2 \sin(h_1 + f)^2 = 1 - \cos 2(h_1 + f),$$
$$2 \cos 2(h_1 + f)^2 = 1 + \cos 4(h_1 + f)$$

setzt, leicht erhalten wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{b} = & (1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 - \tfrac{3}{64}\varepsilon^4 \cos h^4)\partial f \\ & - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2) \cos 2(h_1 + f)\partial f \\ & - \tfrac{1}{64}\varepsilon^4 \cos h^4 \cos 4(h_1 + f)\partial f. \end{aligned}$$

Also, wenn man integrirt:

$$\begin{aligned} \frac{s}{b} = & (1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 - \tfrac{3}{64}\varepsilon^4 \cos h^4) f \\ & - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2) \sin 2(h_1 + f) \\ & - \tfrac{1}{256}\varepsilon^4 \cos h^4 \sin 4(h_1 + f) + C. \end{aligned}$$

Die Constante wird wie vorher so bestimmt, daß s = o für f = o. Dies giebt:

$$\begin{aligned} \frac{s}{b} = & (1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 - \tfrac{3}{64}\varepsilon^4 \cos h^4) f \\ & - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2) \cos(2h_1 + f) \sin f \\ & - \tfrac{1}{128}\varepsilon^4 \cos h^4 \cos(4h_1 + 2f) \sin 2f. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung muß f bestimmt werden. Da nun

$$(1 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 - \tfrac{3}{64}\varepsilon^4 \cos h^4)^{-1}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 + \tfrac{7}{64}\varepsilon^4 \cos h^4 - \ldots$$

ist; so erhält man, wenn man immer nur die Glieder mit ε^4 beibehält, leicht:

$$f = (1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 + \tfrac{7}{64}\varepsilon^4 \cos h^4)\frac{s}{b}$$
$$+ \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos h^2) \cos(2h_1 + f) \sin f$$
$$+ \tfrac{1}{128}\varepsilon^4 \cos h^4 \cos(4h_1 + 2f) \sin 2f$$
$$= \frac{s}{b}$$
$$+ \varepsilon^2 \left\{ \begin{array}{l} (-\tfrac{1}{4}\cos h^2 + \tfrac{7}{64}\varepsilon^2 \cos h^4)\frac{s}{b} \\ + \tfrac{1}{4}\cos h^2 (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos h^2)\cos(2h_1 + f)\sin f \\ + \tfrac{1}{128}\varepsilon^2 \cos h^4 \cos(4h_1 + 2f)\sin 2f \end{array} \right\}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung

$$x = y + u\varphi x,$$

des Lagrangischen Satzes (M. s. diesen Artikel oder auch Umkehrung der Reihen. 27. ff.); so erhält man

$$x = f,\ y = \frac{s}{b},\ u = \varepsilon^2;$$

$$\varphi x = \varphi f = (-\tfrac{1}{4}\cos h^2 + \tfrac{7}{64}\varepsilon^2 \cos h^4)\frac{s}{b}$$
$$+ \tfrac{1}{4}\cos h^2 (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos h^2)\cos(2h_1 + f)\sin f$$
$$+ \tfrac{1}{128}\varepsilon^2 \cos h^4 \cos(4h_1 + 2f)\sin 2f,$$

$$\varphi y = \varphi\left(\frac{s}{b}\right) = (-\tfrac{1}{4}\cos h^2 + \tfrac{7}{64}\varepsilon^2 \cos h^4)\frac{s}{b}$$
$$+ \tfrac{1}{4}\cos h^2 (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cos h^2)\cos\left(2h_1 + \frac{s}{b}\right)\sin\frac{s}{b}$$
$$+ \tfrac{1}{128}\varepsilon^2 \cos h^4 \cos\left(4h_1 + \frac{2s}{b}\right)\sin\frac{2s}{b}.$$

Nach dem Lagrangischen Satze ist nun

$$x = y + \varphi y \cdot \frac{\partial y}{\partial y} \cdot \frac{u}{1}$$
$$+ \frac{\partial \left\{ (\varphi y)^2 \cdot \frac{\partial y}{\partial y} \right\}}{\partial y} \cdot \frac{u^2}{1.2} + \ldots$$
$$= y + \varphi y \cdot \frac{u}{1} + \frac{\partial . (\varphi y)^2}{\partial y} \cdot \frac{u^2}{1.2} + \ldots$$

Um $\frac{\partial . (\varphi y)^2}{\partial y}$ zu entwickeln, muß man $(\varphi x)^2$ entwickeln,

in Bezug auf $x = f$ differentiiren, und dann $\frac{s}{b}$ für f setzen. Es erhellet aber, daß man bei der Entwickelung von $(\varphi x)^2$ weglassen kann:

1, alle Glieder, welche kein f enthalten, da diese, bei der Differentiation verschwinden; 2, alle Glieder, welche ε enthalten, da das Differential in $\frac{u^2}{1.2} = \frac{\varepsilon^4}{1.2}$ multiplicirt wird, und man bloß ε^4 berücksichtigt.

Hieraus erhält man:

$$(\varphi x)^2 = (\varphi f)^2$$

$$= \left\{ -\tfrac{1}{4}\cos h^2 \cdot \frac{s}{b} + \tfrac{1}{4}\cos h^2 \cos(2h_1 + f)\sin f \right\}^2,$$

$$= -\tfrac{1}{8}\cos h^4 \cos(2h_1 + f)\sin f \cdot \frac{s}{b}$$

$$+ \tfrac{1}{16}\cos h^4 \cos(2h_1 + f)^2 \cdot \sin f^2$$

$$= \tfrac{1}{8}\cos h^4 \left\{ -\frac{s}{b}\cos(2h_1 + f)\sin f + \tfrac{1}{2}\cos(2h_1 + f)^2 \sin f^2 \right\}$$

$$\frac{\partial . (\varphi f)^2}{\partial f} = \tfrac{1}{8}\cos h^4 \left\{ -\frac{s}{b}\cos(2h_1 + f)\cos f + \frac{s}{b}\sin(2h_1 + f)\sin f + \cos(2h_1 + f)^2 \sin f \cos f - \sin(2h_1 + f)\cos(2h_1 + f)\sin f^2 \right\}$$

$$= \tfrac{1}{8}\cos h^4 \left\{ -\frac{s}{b}\cos 2(h_1 + f) + \cos(2h_1 + f)\cos 2(h_1 + f)\sin f \right\}$$

$$= \tfrac{1}{8}\cos h^4 \cos 2(h_1 + f) \left\{ -\frac{s}{b} + \cos(2h_1 + f)\sin f \right\}$$

Also

$$\frac{\partial . (\varphi y)^2}{\partial y} = \tfrac{1}{8}\cos h^4 \cos 2\left(h_1 + \frac{s}{b}\right) \times \left\{ -\frac{s}{b} + \cos\left(2h_1 + \frac{s}{b}\right)\sin\frac{s}{b} \right\}.$$

Substituirt man nun die gefundenen Ausdrücke in die Reihe für $x = f$, und ordnet nach Potenzen von ε; so erhält man nach einigen leichten Reductionen:

$$f = \frac{s}{b}$$

$$- \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos h^2 \left\{ \frac{s}{b} - \cos\left(2h_1 + \frac{s}{b}\right)\sin\frac{s}{b} \right\}$$

$$+\tfrac{1}{8}e^4\cos h^4\left\{\begin{array}{l}\tfrac{3}{8}\frac{s}{b}-\cos(2h_1+\frac{s}{b})\sin\frac{s}{b}\\ +\tfrac{1}{16}\cos(4h_1+\frac{2s}{b})\sin\frac{2s}{b}\\ -\tfrac{1}{2}\cos(2h_1+\frac{2s}{b})\\ \times\left[\frac{s}{b}-\cos(2h_1+\frac{s}{b})\sin\frac{s}{b}\right]\end{array}\right\}$$

Geht man nur bis e^2; so wird die Formel

$$f=(1-\tfrac{1}{2}e\cos h)(1+\tfrac{1}{2}e\cos h)\frac{s}{b}$$
$$+\tfrac{1}{4}e^2\cos h^2\cos(2h_1+\frac{s}{b})\sin\frac{s}{b},$$

die noch einfach genug ist, um sich ihrer zur Berechnung eines ersten Näherungswerthes von f zu bedienen, den man dann bei der oben gelehrten successiven Annäherungsmethode weiter gebrauchen kann.

168. Sollen aus den Breiten l, l_1 und der Längendifferenz σ die kürzeste Entfernung s der Punkte A, A_1 und die Azimuthe α, α_1 gefunden werden; so ergiebt sich aus (B) leicht:

$$\psi=\sigma+\tfrac{1}{2}e^2\sin\alpha\cos l\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{B}f\\ -\tfrac{1}{1}\overset{1}{\mathfrak{B}}\cos(2h_1+f)\sin f\\ +\tfrac{1}{2}\overset{2}{\mathfrak{B}}\cos(4h_1+2f)\sin 2f\\ -\tfrac{1}{3}\overset{3}{\mathfrak{B}}\cos(6h_1+3f)\sin 3f\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

Da nun e sehr klein ist; so setze man als ersten Näherungswerth

$$\psi=\sigma,$$

und berechne hieraus und aus l, l_1 im Hülfsdreieck α und f, und hieraus ferner h_1 (166.). Diese Werthe setze man in den zweiten Theil obiger Gleichung, so ergiebt sich ein zweiter Näherungswerth von ψ. Mittelst desselben berechne man im Hülfsdreieck wieder α, f, und dann auch h_1, setze dies wieder in den zweiten Theil obiger Gleichung, woraus sich ein dritter Näherungswerth von ψ ergiebt. Dieses Verfahren setze man nun so lange fort, bis sich zwei auf einander folgende Näherungswerthe von ψ nicht mehr in der verlangten Anzahl von Decimalstellen von einander un-

terscheiden, wodurch also ψ gefunden ist. Nun berechne man aus ψ, l, l_1 im Hülfsdreieck α, α_1, f, und hieraus endlich durch die Formel (A) die kürzeste Entfernung s.

169. Diese Beispiele werden hinreichend seyn, um zu zeigen, worauf es bei diesen Untersuchungen ankommt. Möge das Vorhergehende als ein kurzer, in Bezug auf die Grundformeln vollständiger, Abriß dieses wichtigen, im Ganzen noch wenig bearbeiteten, Theils der Trigonometrie betrachtet werden. Daß ich mich weiterer Entwickelungen enthielt, möge der beschränkte Raum, und Eulers Urtheil: „Mais il n'en est pas de même si l'un des „deux autres élémens σ et s se trouvoit parmi les „connues; car puisque les formules, qui expri„ment les valeurs de σ et s sont si compliquées, et „qu'elles n'ont lieu que lorsque la différence des „axes est extrêmement petite, on n'en saurait éli„miner les élémens inconnus.“ Mém. de Berlin. 1753. p. 277. entschuldigen.

IV. Polygonometrie.

170. Die Polygonometrie ist, ähnlich der Trigonometrie, die Wissenschaft, welche aus gegebenen Seiten und Winkeln eines Vielecks, wodurch dasselbe bestimmt wird, die übrigen durch Rechnung zu finden lehrt. Man kann aber unter die gegebenen Stücke die Diagonalen mit aufnehmen, wodurch diese Wissenschaft bedeutend erweitert wird, und, vollständig ausgeführt, ein eignes großes Werk erfordern würde. Wir halten uns daher hier blos an den ersten eingeschränktern Begriff, und betrachten blos ebene Polygone, da die sphärische Polygonometrie noch sehr der Bearbeitung bedarf. M. s. indeß eine Abhandlung von Rabe über diesen Gegenstand in Crelle's Journal für reine und angew. Math. II. 1. S. 9.

Entwickelung der Grundformeln.

171. Bei jedem Polygon wird eine bestimmte Folge

der Seiten und Winkel angenommen. Werden nämlich in einem neck die Spitzen von der linken nach der rechten Hand hin durch

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ldots.\mu,\ \nu$$

bezeichnet; so sollen die Seiten

$$\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\delta,\ldots.\mu\nu,\ \nu\alpha$$

respective durch

$$a,\ b,\ c,\ d,\ldots..m,\ n$$

bezeichnet werden.

172. Jede Seite $\alpha\beta$ hat zwei Richtungen, von α nach β, und von β nach α, jenachdem α oder β als Anfangspunkt angesehen wird. Der Winkel einer Seite mit einer angenommenen Axe wird erhalten, wenn man durch den Anfang der Seite eine Parallele mit der Axe zieht, und von dieser Parallele an aufwärts von der linken nach der rechten Hand hin die Winkel von 0^0 bis 360^0 zählt. Diese Neigungswinkel der Seiten

$$\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\delta,\ldots.\mu\nu,\ \nu\alpha$$

sollen, wenn man

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots.\mu,\ \nu$$

als Anfangspunkte annimmt, durch

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ldots\mu_1,\ \nu_1;$$

wenn man aber

$$\beta,\ \gamma,\ \delta,\ldots.\nu,\ \alpha$$

als Anfangspunkte annimmt, durch

$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ldots\mu_2,\ \nu_2$$

bezeichnet werden.

173. Aus Fig. 67. erhellet augenblicklich, daß immer

$$\pm\alpha_1 \mp \alpha_2 = 180^0,\ \pm\alpha_1 = 180^0 \pm \alpha_2,$$

also

$$\sin(\pm\alpha_1) = -\sin(\pm\alpha_2),\ \sin\alpha_1 = -\sin\alpha_2,$$
$$\cos(\pm\alpha_1) = -\cos(\pm\alpha_2),\ \cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$$

ist. Sogleich fällt auch in die Augen, daß die Neigungswinkel der Seiten gegen alle parallelen Axen dieselben sind.

174. Man habe jetzt irgend ein Dreieck, durch dessen Spitzen Parallelen mit der Axe gezogen seyen. Den Punkt in der untersten Parallele bezeichne man immer durch α,

die beiden von der linken nach der rechten Hand hin darauf folgenden durch β, γ, und die entsprechenden Seiten wie vorher. Die spitzen Neigungswinkel der Seiten gegen die Axe seyen α', β', γ', die nach dem obigen Gesetz (172.) genommenen dagegen α_1, β_1, γ_1. Die Entfernungen der obersten und untersten, obersten und mittelsten, untersten und mittelsten Parallelen von einander seyn p, q, r, so daß immer $p = q + r$. Man muß nun zwei Fälle unterscheiden, jenachdem β in der mittelsten, γ in der obersten, oder β in der obersten, γ in der mittelsten Parallele liegt. Im ersten Falle ist, wie augenblicklich erhellet, $r = a \sin\alpha'$, $q = b \sin\beta'$, $p = c \sin\gamma'$. Also

$$c \sin\gamma' = a \sin\alpha' + b \sin\beta'.$$

Aber offenbar $\alpha_1 < 180^0$, $\beta_1 < 180^0$, $\gamma_1 > 180^0$. Also $\sin\alpha' = \sin\alpha_1$, $\sin\beta' = \sin\beta_1$, $\sin\gamma' = -\sin\gamma_1$, und folglich

$$-c \sin\gamma_1 = a \sin\alpha_1 + b \sin\beta_1,$$
$$a \sin\alpha_1 + b \sin b_1 + c \sin\gamma_1 = o.$$

Im zweiten Falle dagegen ist $p = a \sin\alpha'$, $q = b \sin\beta'$, $r = c \sin\gamma'$. Also

$$a \sin\alpha' = b \sin\beta' + c \sin\gamma'.$$

Aber $\alpha_1 < 180^0$, $\beta_1 > 180^0$, $\gamma_1 > 180^0$. Also $\sin\alpha' = \sin\alpha_1$, $\sin\beta' = -\sin\beta_1$, $\sin\gamma' = -\sin\gamma_1$, und folglich

$$a \sin\alpha_1 = -b \sin\beta_1 - c \sin\gamma_1,$$

oder ebenfalls

$$a \sin\alpha_1 + b \sin\beta_1 + c \sin\gamma_1 = o.$$

175. Zieht man jetzt durch die drei Spitzen des gegebenen Dreiecks Perpendikel auf die angenommene Axe, und läßt p, q, r die Entfernung der beiden äußersten Perpendikel, des am weitesten rechts und des mittelsten, und des am weitesten links liegenden Perpendikels und des mittelsten bedeuten; so muß man, wenn α den in dem Perpendikel am weitesten links liegenden Punkt bezeichnet, wieder zwei Fälle unterscheiden, jenachdem β in dem mittelsten, γ in dem Perpendikel rechts, oder β in dem Perpendikel rechts, γ in dem mittelsten Perpendikel liegt.

Immer ist $p = q + r$, und im ersten Falle $r = a\cos\alpha'$, $q = b\cos\beta'$, $p = c\cos\gamma'$, also

$$c\cos\gamma' = a\cos\alpha' + b\cos\beta',$$

wie augenblicklich erhellet. Offenbar liegt aber in diesem Falle immer α_1 zwischen 90° und 270°, β_1 zwischen 90° und 270°, γ_1 zwischen 270° und 90°, so daß $\cos\alpha' = -\cos\alpha_1$, $\cos\beta' = -\cos\beta_1$, $\cos\gamma' = \cos\gamma_1$, und folglich

$$c\cos\gamma_1 = -a\cos\alpha_1 - b\cos\beta_1,$$
$$a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1 = 0$$

ist. Im zweiten Falle ist $p = a\cos\alpha'$, $q = b\cos\beta'$, $r = c\cos\gamma'$. Also

$$a\cos\alpha' = b\cos\beta' + c\cos\gamma'$$

In diesem Falle liegt aber immer α_1 zwischen 90° und 270°, β_1 zwischen 270° und 90°, γ_1 zwischen 270° und 90°, so daß $\cos\alpha' = -\cos\alpha_1$, $\cos\beta' = \cos\beta_1$, $\cos\gamma' = \cos\gamma_1$, und folglich

$$-a\cos\alpha_1 = b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1,$$
$$a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1 = 0$$

ist, wie vorher.

Man hat also immer

$$a\sin\alpha_1 + b\sin\beta_1 + c\sin\gamma_1 = 0,$$
$$a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1 = 0.$$

176. Denkt man sich nun das neck $\alpha\beta\gamma\delta\ldots\mu\nu$ durch die Diagonale $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$, ... $\alpha\mu$ in die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\delta\varepsilon$, ... $\alpha\mu\nu$ zerlegt, und bezeichnet jetzt die Neigungswinkel der Diagonalen gegen die angenommene Axe durch α', β', γ', δ', ...; so ist in den einzelnen auf einander folgenden Dreiecken, da offenbar jede Diagonale nach ihren beiden Richtungen (172.) genommen werden muß, nach (173.) und (175.)

$$a\sin\alpha_1 + b\sin\beta_1 + \alpha\gamma.\sin\alpha' = 0$$
$$-\alpha\gamma.\sin\alpha' + c\sin\gamma_1 + \alpha\delta.\sin\beta' = 0$$
$$-\alpha\delta.\sin\beta' + d\sin\delta_1 + \alpha\varepsilon.\sin\gamma' = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-\alpha\lambda.\sin\iota' + l\sin\lambda_1 + \alpha\mu.\sin\varkappa' = 0$$
$$-\alpha\mu.\sin\varkappa' + m\sin\mu_1 + n\sin\nu_1 = 0,$$

und ganz auf dieselbe Art:

$$a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + a\gamma.\cos\alpha' = 0$$
$$-a\gamma.\cos\alpha' + c\cos\gamma_1 + a\delta.\cos\beta' = 0$$
$$-a\delta.\cos\beta' + d\cos\delta_1 + a\epsilon.\cos\gamma' = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-a\lambda.\cos\iota' + l\cos\lambda_1 + a\mu.\cos\varkappa' = 0$$
$$-a\mu.\cos\varkappa' + m\cos\mu_1 + n\cos\nu_1 = 0,$$

woraus sich folgende, für jedes Polygon geltende, zwei merkwürdige Gleichungen ergeben:

$$a\sin\alpha_1 + b\sin\beta_1 + c\sin\gamma_1 + d\sin\delta_1 + \ldots = 0,$$
$$a\cos\alpha_1 + b\cos\beta_1 + c\cos\gamma_1 + d\cos\delta_1 + \ldots = 0,$$

die sich auch leicht in Worten ausdrücken lassen würden. Ich finde sie zuerst, wenigstens die zweite, in Carnot Geom. der Stellung, a. d. F. v. Schumacher. II. S. 58. Indeß sagt Carnot S. 57., daß schon seit langer Zeit eine Abhandlung von L'Huilier im Sekretariat des Nationalinstituts niedergelegt sey, worin die zweite Gleichung ebenfalls vorkomme. In L'Huiliers Polygonométrie. Genève. 1789. finden sie sich noch nicht.

177. Man bezeichne nun die äußern Winkel des gegebenen Vielecks durch

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \mu, \nu,$$

wobei zu bemerken ist, daß die äußern Winkel negativ genommen werden, wenn der entsprechende innere Winkel $> 180^0$ ist. Bezeichne λ den lten äußern Winkel und λ' seinen positiven Werth, $\varkappa_1$ dagegen den $(l-1)$ten und λ_1 den lten Neigungswinkel; so ergiebt sich aus (Fig. 68.) sogleich $\lambda_1 = \lambda' + \varkappa_1$, oder $\lambda_1 = -\lambda' + \varkappa_1$, $\lambda_1 - 180^0 = \lambda' + \varkappa_1 - 180^0$, $\lambda_1 - 180^0 = -\lambda' + \varkappa_1 - 180^0$, d. i. allgemein $\lambda_1 = \lambda + \varkappa_1$, so daß also der lte Neigungswinkel erhalten wird, wenn man den lten äußern Winkel und den $(l-1)$ten Neigungswinkel zu einander addirt.

178. Nehmen wir daher die Seite $\nu\alpha$ als Axe an; so ist, da die Neigungs- und Außenwinkel jetzt so auf einander folgen:

$$\nu_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots \mu_1;$$
$$\nu, \alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu;$$

$$\nu_1 = 0,$$
$$\alpha_1 = \alpha,$$
$$\beta_1 = \alpha + \beta,$$
$$\gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$\delta_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu.$$

Aber (Vieleck. 4.):

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu = 360^\circ.$$

Also

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu) = 0,$$
$$\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu) = 1;$$

und folglich, da auch $\sin\nu_1 = 0$, $\cos\nu_1 = 1$ ist:

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha,$$
$$\sin\beta_1 = \sin(\alpha + \beta),$$
$$\sin\gamma_1 = \sin(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\sin\delta_1 = \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin\mu_1 = \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu),$$
$$\sin\nu_1 = \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu),$$

und eben so:

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha,$$
$$\cos\beta_1 = \cos(\alpha + \beta),$$
$$\cos\gamma_1 = \cos(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$\cos\delta_1 = \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos\mu_1 = \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu),$$
$$\cos\nu_1 = \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu).$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen in (176.); so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = \; & a\sin\alpha \\ & + b\sin(\alpha + \beta) \\ & + c\sin(\alpha + \beta + \gamma) \\ & + d\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + m\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu) \\ & + n\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu); \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
o = \;& a\cos\alpha \\
&+ b\cos(\alpha + \beta) \\
&+ c\cos(\alpha + \beta + \gamma) \\
&+ d\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\
&\;\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ m\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu) \\
&+ n\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu).
\end{aligned}
$$

Diese zwei sehr merkwürdigen Formeln sind von Lexell (Nov. Comm. Petrop. T. XIX. XX. De resol. polyg. rectilin. dissertatio 1. et 2.) gefunden, und dadurch der Grund zur Polygonometrie gelegt worden. Auch L'Huilier ist auf dieselben gekommen, ohne Etwas von Lexells Arbeit zu wissen. M. s. L'Huilier Polygonométrie. p. 5. Sie sind p. 18. und 22. auf folgende Art dargestellt.

$$
\begin{aligned}
o = \;& a\sin\alpha \\
&+ b\sin(\alpha + \beta) \\
&+ c\sin(\alpha + \beta + \gamma) \\
&+ d\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\
&\;\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ m\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
o = \;& n \\
&+ a\cos\alpha \\
&+ b\cos(\alpha + \beta) \\
&+ c\cos(\alpha + \beta + \gamma) \\
&+ d\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\
&\;\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ m\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu).
\end{aligned}
$$

L'Huilier gelangt aber auf einem Umwege zu diesen Formeln, da er von einer Formel für den Flächeninhalt der Polygone, die wir nachher (186.) auch beweisen werden, ausgeht.

Auflösung der einzelnen Fälle.

179. Aus den vorher entwickelten Formeln ergiebt sich die Auflösung aller einzelnen Fälle. Es ist im Folgenden nur unsere Absicht, die Möglichkeit einer vollständigen Polygonometrie zu zeigen, wenn bloß Seiten und Winkel ge-

geben sind, und wir müssen, weiterer Ausführung wegen, auf andere Werke verweisen.

180. Ein Polygon wird (Vieleck. 8.), wenn die Anzahl seiner Seiten = n ist, durch 2n — 3 Stücke bestimmt, worunter aber wenigstens n — 2 Seiten seyn müssen, weil, wenn nur n — 3 Seiten, und also alle n Winkel gegeben wären, doch eigentlich nur n — 1 Winkel, und demnach überhaupt nur 2n — 4 Stücke gegeben wären, da durch n — 1 Winkel immer der nte bestimmt wird, indem die Summe aller = 4R ist, vorausgesetzt, daß wir unter Winkeln eines Polygons immer seine äußern Winkel verstehen. Hiernach sind nun bloß folgende Fälle denkbar:

a. Gegeben n — 1 Seiten und n — 2 Winkel.

α. Die beiden gesuchten Winkel liegen an der gesuchten Seite.

β. Die beiden gesuchten Winkel liegen nicht an der gesuchten Seite, aber neben einander.

γ. Die beiden gesuchten Winkel liegen nicht an der gesuchten Seite und auch nicht neben einander.

b. Gegeben n — 2 Seiten und n — 1 d. i. n Winkel.

c. Gegeben n Seiten und n — 3 Winkel.

Dieselbe Eintheilung befolgt L'Huilier a. a. O. p. 37. Sie scheint uns zu unserm Zwecke, welcher keine große Ausführlichkeit gestattet, am passendsten. Mit Mehrerem s. m. Crelle Geometrie. I. Berlin. 1826. S. 451.

181. Gesucht α, ν, n (180. a. α.). Aus (178.) ergiebt sich sehr leicht:

$$\begin{aligned}
o = \; & a \sin\alpha \\
& + b \sin\alpha \cos\beta \\
& + c \sin\alpha \cos(\beta + \gamma) \\
& + d \sin\alpha \cos(\beta + \gamma + \delta) \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + m \sin\alpha \cos(\beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu) \\
& + b \cos\alpha \sin\beta
\end{aligned}$$

$$+ c\cos\alpha\sin(\beta + \gamma)$$
$$+ d\cos\alpha\sin(\beta + \gamma + \delta)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ m\cos\alpha\sin(\beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu);$$

woraus für

$$P = a$$
$$+ b\cos\beta$$
$$+ c\cos(\beta + \gamma)$$
$$+ d\cos(\beta + \gamma + \delta)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ m\cos(\beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu);$$
$$Q = b\sin\beta$$
$$+ c\sin(\beta + \gamma)$$
$$+ d\sin(\beta + \gamma + \delta)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ m\sin(\beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu),$$

sich sogleich ergiebt:

$$\tan g\,\alpha = -\frac{Q}{P},$$

wodurch α gefunden wird. ν erhält man aus der Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu + \nu = 360^\circ,$$

und (178.)

$$n = -a\cos\alpha$$
$$- b\cos(\alpha + \beta)$$
$$- c\cos(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$- m\cos(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu).$$

Indeß kann man n auch unmittelbar aus den gegebenen Stücken finden, ohne α zu kennen. Es ist nämlich

$$o = a\sin\alpha$$
$$+ b\sin(\alpha + \beta)$$
$$+ c\sin(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ m\sin(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu)$$
$$-n = a\cos\alpha$$
$$+ b\cos(\alpha + \beta)$$
$$+ c\cos(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ m\cos(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \mu);$$

also die Summe der Quadrate der zweiten Theile dieser Gleichungen $= n^2$. Sind nun

$$i \sin(\alpha + \beta + \ldots + \iota);$$
$$l \sin(\alpha + \beta + \ldots + \iota + \varkappa + \ldots + \lambda),$$

und

$$i \cos(\alpha + \beta + \ldots + \iota)$$
$$l \cos(\alpha + \beta + \ldots + \iota + \varkappa + \ldots + \lambda),$$

irgend zwei allgemeine Glieder der zweiten Theile obiger Gleichungen; so sind offenbar

$$2il \sin(\alpha + \beta + \ldots + \iota)$$
$$\times \sin(\alpha + \beta + \ldots + \iota + \varkappa + \ldots + \lambda)$$

und

$$2il \cos(\alpha + \beta + \ldots + \iota)$$
$$\times \cos(\alpha + \beta + \ldots + \iota + \varkappa + \ldots + \lambda),$$

die allgemeinen Glieder der Quadrate, deren Summe, wie augenblicklich erhellet,

$$= 2il \cos(\varkappa + \ldots + \lambda)$$

ist, vorausgesetzt, daß l von einer höhern Ordnung ist als i. Ist $i = l$; so sind die allgemeinen Glieder

$$i^2 \sin(\alpha + \beta + \ldots + \iota)^2,$$
$$i^2 \cos(\alpha + \beta + \ldots + \iota)^2,$$

deren Summe $= i^2$. Setzt man nun für i und l alle Werthe von a bis m; so erhält man:

$$\begin{aligned} n^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + m^2 \\ + 2ab \cos\beta \\ + 2ac \cos(\beta + \gamma) \\ + 2ad \cos(\beta + \gamma + \delta) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 2am \cos(\beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu) \\ + 2bc \cos\gamma \\ + 2bd \cos(\gamma + \delta) \\ \ldots\ldots\ldots \\ + 2bm \cos(\gamma + \delta + \ldots + \mu) \\ + 2cd \cos\delta \\ \ldots\ldots \\ + 2cm \cos(\delta + \ldots + \mu) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 2kl \cos\lambda \\ + 2km \cos(\lambda + \mu) \\ + 2lm \cos\mu; \end{aligned}$$

wodurch n aus den gegebenen Stücken unmittelbar erhalten wird.

Für das Dreieck giebt diese allgemeine Formel:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \beta),$$

woraus, wenn man die Winkel nach trigonometrischer Art bezeichnet, sogleich folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

da offenbar $\gamma = 180^\circ - \beta$, indem das Dreieck nie einen einspringenden Winkel hat. Wie in (7.).

182. Die Seiten und Winkel des gegebenen Polygons seyen jetzt:

$$a, b, \ldots m, n, a', b', \ldots m', n';$$
$$\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, \alpha', \beta', \ldots \mu', \nu';$$

und gesucht werde: ν, α', n' (180. a. β.); so hat man bekanntlich:

$$\begin{aligned} o = \; & a\sin\alpha \\ & + b\sin(\alpha + \beta) \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & + m\sin(\alpha + \beta + \ldots + \mu) \\ & + n\sin(\alpha + \beta + \ldots + \mu + \nu) \\ & + a'\sin(\alpha + \ldots + \nu + \alpha') \\ & + b'\sin(\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \beta') \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + m'\sin(\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \beta' + \ldots + \mu'). \end{aligned}$$

Aber

$$\alpha + \ldots + \nu + \alpha' = 360^\circ - (\beta' + \gamma' + \ldots + \nu'),$$
$$\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \beta' = 360^\circ - (\gamma' + \delta + \ldots + \nu'),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \beta' + \ldots + \mu' = 360^\circ - \nu'.$$

Also

$$\begin{aligned} o = \; & a\sin\alpha \\ & + b\sin(\alpha + \beta) \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & + m\sin(\alpha + \beta + \ldots + \mu) \\ & + n\sin(\alpha + \beta + \ldots + \mu + \nu) \\ & - a'\sin(\beta' + \gamma' + \ldots + \nu') \\ & - b'\sin(\gamma' + \delta' + \ldots + \nu') \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & - m'\sin\nu' \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} & n\sin(\alpha + \beta + \ldots + \mu + \nu) \\ = \; & a'\sin(\beta' + \gamma' + \ldots + \nu') \\ & + b'\sin(\gamma' + \delta' + \ldots + \nu') \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$+ m' \sin \nu'$$
$$- a \sin \alpha$$
$$- b \sin(\alpha + \beta)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$- m \sin(\alpha + \beta + \ldots + \mu).$$

Hieraus ergiebt sich $\alpha + \beta + \ldots + \mu + \nu$, und folglich, da $\alpha + \beta + \ldots + \mu$ gegeben ist, auch ν. Den Winkel α' erhält man mittelst der Formel $\alpha + \beta + \ldots + \nu + \alpha' + \ldots + \nu' = 360^0$, und

$$n' = - a \cos \alpha$$
$$- b \cos(\alpha + \beta)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$- n \cos(\alpha + \beta + \ldots + \nu)$$
$$- a' \cos(\alpha + \ldots + \nu + \alpha')$$
$$- b' \cos(\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \beta')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- m' \cos(\alpha + \ldots + \nu + \alpha' + \ldots \mu').$$

Man könnte auch n' unmittelbar aus den gegebenen Stücken finden, welches aber hier zu weit führen, auch keinen besondern Nutzen gewähren würde.

Bei dieser und der vorhergehenden Aufgabe (da auch derselbe Werth von $\tan \alpha$ zu einem positiven oder negativen Winkel gehören kann) ist bei der Berechnung der Winkel immer eine besondere Bestimmung über die Art des gesuchten Winkels nöthig, die bei der Anwendung auf specielle Fälle leicht ist, im Allgemeinen aber eine weitläufige Auseinandersetzung erfordern würde, hier also füglich übergangen werden kann.

183. Die Seiten und Winkel des Polygons seyen

$$a, \ldots n, a', \ldots n', a'', \ldots n'';$$
$$\alpha, \ldots \nu, \alpha', \ldots \nu', \alpha'', \ldots \nu''.$$

Gesucht ν, ν', n'' (180. a γ.). Man denke sich die Diagonale $\nu\nu'$ gezogen; so sind in dem Polygone $\nu\alpha' \ldots \nu'$ nur die Seite $\nu\nu'$ und die beiden anliegenden Winkel unbekannt, welche man nach dem Obigen berechnen kann (181.). In dem Polygon $\alpha \ldots \nu\nu'\alpha'' \ldots \nu''$ sind nun bloß die beiden bei ν und ν' liegenden Winkel und die Seite $\alpha\nu'' =$ n'' unbekannt, welche man nach (182.) berechnen kann. Also hat man n'', und in den beiden obigen Poly-

gonen die Winkel bei ν und ν' an der Seite $\nu\nu'$. Aus diesen Winkeln lassen sich nun auch die Winkel ν und ν' des gegebenen Polygons finden, wobei nur in jedem besondern Falle gehörig beurtheilt werden muß, ob diese Winkel durch Addition oder Subtraction der Winkel bei ν und ν' in den beiden Polygonen, in welche man das gegebene zerlegt hat, berechnet werden müssen. Den hier vorgezeichneten Gang würde man selbst auch bei wirklichen Anwendungen am vortheilhaftesten einzuschlagen haben. Die Entwickelung allgemeiner Formeln ist weitläufig.

184. In dem Vieleck

$$\alpha\beta\ldots\mu\nu\alpha'\beta'\ldots\mu'\nu',$$

seyen alle Winkel gegeben, und alle Seiten, außer $\nu\alpha' = \mathrm{n}$, $\nu'\alpha = \mathrm{n}'$, welche gesucht werden (180. b.). Es ist

$$\begin{aligned}
0 = \; & a\sin\alpha \\
& + b\sin(\alpha+\beta) \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& + m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu) \\
& + n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) \\
& + a'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha') \\
& + b'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\beta') \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& m'\sin(\alpha+\ldots+\nu+\alpha'+\ldots+\mu') \\
= \; & a\sin\alpha \\
& + b\sin(\alpha+\beta) \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& + m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu) \\
& + n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) \\
& - a'\sin(\beta'+\gamma'+\ldots+\nu') \\
& - b'\sin(\gamma'+\ldots+\nu') \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - m'\sin\nu';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu+\nu) = \; & a'\sin(\beta'+\gamma'+\ldots+\nu') \\
& + b'\sin(\gamma'+\ldots+\nu') \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + m'\sin\nu' \\
& - a\sin\alpha \\
& - b\sin(\alpha+\beta) \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& - m\sin(\alpha+\beta+\ldots+\mu),
\end{aligned}$$

woraus sich n ergiebt. Ganz eben so erhält man:

$$
\begin{aligned}
n' \sin(\alpha' + \beta' + \ldots + \mu' + \nu') = {} \\
& a \sin(\beta + \gamma + \ldots + \nu) \\
& + b \sin(\gamma + \ldots + \nu) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + m \sin \nu \\
& - a' \sin \alpha' \\
& - b' \sin(\alpha' + \beta') \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& - m' \sin(\alpha' + \beta' + \ldots + \mu'),
\end{aligned}
$$

woraus n' gefunden wird.

185. In dem Polygon

$$\alpha \ldots \nu\alpha' \ldots \nu'\alpha'' \ldots \nu''$$

seyen alle Seiten und Winkel außer α, α', α'' gegeben. (180. c.). Man ziehe die Diagonalen $\alpha\alpha'$, $\alpha'\alpha''$, $\alpha''\alpha$; so wird dadurch die gegebene Figur in vier Theile, deren einer das Dreieck $\alpha\alpha'\alpha''$ ist, getheilt. In $\alpha \ldots \nu\alpha'$ sind alle Seiten und Winkel, außer $\alpha\alpha'$, und die an α und α' liegenden Winkel gegeben. Man kann also diese Stücke berechnen (181.). In $\alpha' \ldots \nu'\alpha''$ sind alle Stücke außer $\alpha'\alpha''$ und die Winkel bei α' und α'' gegeben, die sich also, so wie auch in $\alpha'' \ldots \nu''\alpha$ die Seite $\alpha\alpha''$ und die Winkel an α und α'' berechnen lassen (181.). Also hat man in dem Dreieck $\alpha\alpha'\alpha''$ alle drei Seiten, so daß sich folglich seine Winkel berechnen lassen. Folglich hat man alle durch die gezogene Diagonale und die Seiten der gegebenen Figur gebildeten Winkel an α, α', α'', durch deren gehörige Vereinigung durch Addition oder Subtraction, sich die Winkel α, α', α'' in jedem Falle finden lassen, wobei immer auf die Lage der Diagonale und Seiten besonders Rücksicht zu nehmen ist. Dies mag hinreichen, eine Uebersicht der Polygonometrie zu geben. Exempel findet man bei L'Huilier a. a. O. S. 57. ff.

Inhalt der Polygone.

186. Bezeichnet man den Flächeninhalt durch s; so ist für das Dreieck $\alpha\beta\gamma$:

$$2s = ab \sin\beta \quad (19.)$$

Im Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig. 69.) ziehe man die Diagonale $\alpha\gamma$; so erhellet leicht, daß

$$2s = ab \sin\beta + cd \sin\delta,$$

wobei zu bemerken, daß für einspringende Winkel das Dreieck $\alpha\gamma\delta$ subtractiv ist, aber auch δ negativ, und folglich $cd \sin\delta$ negativ wird, demnach obiger Ausdruck allgemein ist. Aber (178.)

$$\begin{aligned} o = {} & b\sin\gamma & = {} & b\sin\gamma \\ & + a\sin(\gamma+\beta) & & + a\sin(\gamma+\beta) \\ & + d\sin(\gamma+\beta+\alpha) & & - d\sin\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cd\sin\delta = {} & ac\sin(\beta+\gamma) \\ & + bc\sin\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s = {} & ab\sin\beta \\ & + ac\sin(\beta+\gamma) \\ & + bc\sin\gamma. \end{aligned}$$

In dem Fünfeck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ziehe man $\alpha\delta$; so ist

$$\begin{aligned} 2s = {} & ab\sin\beta \quad + de\sin\varepsilon \\ & + ac\sin(\beta+\gamma) \\ & + bc\sin\gamma \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} o = {} & c\sin\delta \\ & + b\sin(\delta+\gamma) \\ & + a\sin(\delta+\gamma+\beta) \\ & + e\sin(\delta+\gamma+\beta+\alpha) \\ = {} & c\sin\delta \\ & + b\sin(\delta+\gamma) \\ & + a\sin(\delta+\gamma+\beta) \\ & - e\sin\varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de\sin\varepsilon = {} & ad\sin(\beta+\gamma+\delta) \\ & + bd\sin(\gamma+\delta) \\ & + cd\sin\delta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2s = {} & ab\sin\beta \\ & + ac\sin(\beta+\gamma) \\ & + ad\sin(\beta+\gamma+\delta) \\ & + bc\sin\gamma \\ & + bd\sin(\gamma+\delta) \\ & + cd\sin\delta. \end{aligned}$$

Das Gesetz und die Art, wie man weiter gehen kann, liegt klar vor Augen. Es ist immer für ein neck:

$$
\begin{aligned}
2s = \; & ab \sin\beta \\
+ \; & ac \sin(\beta + \gamma) \\
+ \; & ad \sin(\beta + \gamma + \delta) \\
& \cdots\cdots\cdots \\
+ \; & am \sin(\beta + \gamma + \delta + \ldots + \mu) \\
+ \; & bc \sin\gamma \\
+ \; & bd \sin(\gamma + \delta) \\
& \cdots\cdots \\
+ \; & bm \sin(\gamma + \delta + \ldots + \mu) \\
+ \; & cd \sin\delta \\
& \cdots \\
+ \; & cm \sin(\delta + \ldots + \mu) \\
& \vdots \\
+ \; & kl \sin\lambda \\
+ \; & km \sin(\lambda + \mu) \\
+ \; & lm \sin\mu.
\end{aligned}
$$

Die Allgemeinheit dieser Formel (L'Huilier a. a. O. p. 8. ff.) kann durch die bekannte Schlußart von n auf n + 1 leicht bewiesen werden. Eine Formel für den Inhalt durch die Coordinaten der Spitzen s. m. im Art. Vieleck. (59.)

V. Tetragonometrie.

187. Diese Wissenschaft ist dasselbe für die Vierecke, was die Polygonometrie für die Vielecke ist, und also eigentlich nur ein besonderer Fall der letztern, weshalb wir uns auch nur auf die Auflösung von ein Paar Aufgaben beschränken werden. Betrachtet man bloß Seiten und Winkel, so lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

a. Gegeben vier Seiten und ein Winkel.

b. Gegeben drei Seiten und zwei Winkel.

α. Die gesuchten Winkel liegen beide an der gesuchten Seite.

β. Die gesuchten Winkel liegen nicht beide an der gesuchten Seite, aber neben einander.

αα. Einer der gesuchten Winkel liegt an der gesuchten Seite.

ββ. Keiner der gesuchten Winkel liegt an der gesuchten Seite.

γ. Die gesuchten Winkel liegen nicht beide an der gesuchten Seite und auch nicht neben einander, wo keine Unterabtheilung weiter statt finden kann, da immer einer der gesuchten Winkel an der gesuchten Seite liegen muß.

c. Gegeben zwei Seiten und drei (d. i. alle vier) Winkel.

α. Gegeben zwei an einander liegende Seiten.

β. Gegeben zwei gegenüberstehende Seiten.

Eine Seite und vier Winkel können nicht gegeben seyn, da dann im Grunde doch nur vier Stücke gegeben wären, weil drei Winkel schon den vierten bestimmen. Nach dieser Uebersicht würde mit Hülfe der allgemeinen polygonometrischen Formeln eine vollständige Ausführung der Tetragonometrie keine Schwierigkeit haben. Betrachtet man aber auch die Diagonalen als Stücke des Vierecks, so wird die Anzahl der Aufgaben sehr vervielfältigt.

188. Die polygonometrischen Grundformeln (178.) werden in Bezug auf das Viereck:

$$o = a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) \qquad o = d + a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\beta) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma),$$

woraus wie in (181.)

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\beta + 2ac\cos(\beta+\gamma) + 2bc\cos\gamma.$$

Hieraus würde sich auch leicht eine Gleichung zwischen den vier Seiten und zwei Gegenwinkeln ableiten lassen, die sich indeß noch leichter so ergiebt. Ist nämlich x die den Winkeln β, δ (immer die äußern Winkel) gegenüberstehende Diagonale; so ist (7.):

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta,$$
$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\delta;$$

also

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd\cos\delta.$$

189. Der Beschränktheit des Raumes wegen müssen wir uns hier nur auf einige Beispiele beschränken, wo in den erstern nur Seiten und Winkel, im letzten aber auch die Diagonalen vorkommen.

Wären z. B. a, b, c, α, β gegeben, und also d, γ, δ gesucht (187. b. β. $\alpha\alpha$.); so ist aus der ersten Gleichung in (188.)

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = -\frac{a\sin\alpha + b\sin(\alpha + \beta)}{c} = p,$$

woraus sich γ leicht finden läßt. Es ist

$$p = \sin(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos(\alpha + \beta)\sin\gamma,$$
$$p - \cos(\alpha + \beta)\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)\cos\gamma,$$

woraus man, wenn auf beiden Seiten quadrirt wird, leicht erhält:

$$\sin\gamma^2 - 2p\cos(\alpha + \beta)\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)^2 - p^2,$$

und hieraus, indem man auf beiden Seiten $p^2\cos(\alpha+\beta)^2$ addirt:

$$\sin\gamma = p\cos(\alpha + \beta) \pm \sin(\alpha + \beta).\sqrt{1 - p^2}.$$

Also für $p = \cos\varphi$:

$$\sin\gamma = \cos(\alpha + \beta \mp \varphi).$$

Hat man γ, so hat man auch δ aus der Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ,$$

und d ergiebt sich aus der Gleichung:

$$d = -a\cos\alpha - b\cos(\alpha + \beta) - c\cos(\alpha + \beta + \gamma),$$

in (188.), wo d einen doppelten Werth hat, so wie γ, wie sich auch leicht aus der Zeichnung einer Figur ergiebt.

Um d unmittelbar aus den Datis zu finden hat man (188.):

$$-c\sin(\alpha + \beta + \gamma) = a\sin\alpha + b\sin(\alpha + \beta),$$
$$-c\cos(\alpha + \beta + \gamma) = d + a\cos\alpha + b\cos(\alpha + \beta),$$

woraus, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, und addirt, sich durch Auflösung einer quadratischen Gleichung leicht ergiebt:

$$d = -a\cos\alpha - b\cos(\alpha + \beta)$$
$$\pm\sqrt{c^2 - [a\sin\alpha + b\sin(\alpha + \beta)]^2}.$$

190. Sind a, b, c, α, δ gegeben, β, γ, d gesucht (187. b. β. $\beta\beta$.); so erhält man leicht:

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{a\sin\alpha - c\sin\delta}{b},$$

aus der ersten Gleichung in (188.), weil $\sin\delta = -\sin(\alpha+\beta+\gamma)$. Hieraus wird β, und folglich auch leicht γ gefunden. Ist $c > 1$, $a > 1$; so kann man setzen:

$$\sin\alpha = c\sin\varphi^2, \ \sin\delta = a\sin\psi^2.$$

Dies giebt leicht:

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{a c \sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)}{b}.$$

Für $c < 1$, $a < 1$ setze man

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi^2}{a}, \quad \sin\delta = \frac{\sin\psi^2}{c},$$

woraus

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{\sin(\varphi+\psi)\sin(\varphi-\psi)}{b}.$$

Für $c > 1$ und $a < 1$ dagegen setze man

$$\sin\alpha = c\sin\varphi^2, \ \sin\delta^2 = \frac{\sin\psi^2}{a},$$

woraus

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{c}{ab}(a^2\sin\varphi^2 - \sin\psi^2).$$

Setzt man nun ferner $a\sin\varphi = \sin\omega$, so wird

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{c\sin(\omega+\psi)\sin(\omega-\psi)}{ab}.$$

Für $c < 1$ und $a > 1$ sey

$$\sin\alpha = \frac{\sin\varphi^2}{c}, \ \sin\delta = a\sin\psi^2,$$

$c\sin\psi = \sin\omega$; so erhält man:

$$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{a\sin(\varphi+\omega)(\sin\varphi-\omega)}{bc}.$$

Da man nun β und γ hat; so wird auch d leicht gefunden, da

$$d = -a\cos\alpha - b\cos(\alpha+\beta) - c\cos(\alpha+\beta+\gamma).$$

Da offenbar auch

$$\begin{array}{ll} o = d\sin\alpha & o = a \\ \quad + c\sin(\alpha+\delta) & \quad + d\cos\alpha \\ \quad + b\sin(\alpha+\delta+\gamma) & \quad + c\cos(\alpha+\delta) \\ & \quad + b\cos(\alpha+\delta+\gamma), \end{array}$$

also

$$-b\sin(\alpha+\delta+\gamma) = d\sin\alpha + c\sin(\alpha+\delta)$$
$$-b\cos(\alpha+\delta+\gamma) = a + d\cos\alpha + c\cos(\alpha+\delta)$$

ist; so erhält man auf ähnliche Art wie vorher (189.) unmittelbar aus den Datis:

$$d = -a\cos\alpha - c\cos\delta \pm \sqrt{b^2 - (a\sin\alpha - c\sin\delta)^2}.$$

191. Sind a, b, c, β, γ gegeben (187. b. α.); so hat man wie in (181.) für

$$P = a + b\cos\beta + c\cos(\beta+\gamma) \qquad Q = b\sin\beta + c\sin(\beta+\gamma)$$

$$\tang\alpha = -\frac{Q}{P},$$

woraus α, also auch δ gefunden wird. Für

$$R = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\beta + 2ac\cos(\beta+\gamma) + 2bc\cos\gamma,$$

erhält man unmittelbar aus den Datis:

$$d = \sqrt{R}.$$

Setzt man

$$a' = a + \frac{b\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}, \quad c' = c + \frac{b\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)};$$

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sqrt{a'c'}}{a'+c'};$$

so erhält man leicht:

$$(a'+c')^2\cos\varphi^2 = a'^2 + c'^2 + 2a'c'\cos(\beta+\gamma),$$

und, wenn man in dieser Gleichung für a', c' die obigen Ausdrücke setzt, verglichen mit der Gleichung $d = \sqrt{R}$, nach einigen leichten Reductionen:

$$d = (a'+c')\cos\varphi.$$

Auf ähnliche Art wird man die andern Fälle behandeln können.

192. Zu einem Beispiel, wo auch die Diagonalen vorkommen, wählen wir die sogenannte Pothenotische Aufgabe. Seyen nämlich im Viereck ABCD (Fig. 70.) AB = a, BC = b, ABC = γ, ADB = α, BDC = β gegeben; man soll die übrigen Stücke bestimmen. Für

$$360^0 - \alpha - \beta - \gamma = \lambda$$

ist offenbar, wenn man BAD = x, BCD = y setzt:

$$y = \lambda - x.$$

Aber

$$a : BD = \sin\alpha : \sin x,$$
$$b : BD = \sin\beta : \sin y,$$
$$BD = \frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin(\lambda - x)}{\sin\beta},$$

woraus nach einigen leichten Reductionen sich ergiebt:

$$\cot x = \cot\lambda + \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \sin\lambda}.$$

Für

$$\cot\lambda = v, \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \sin\lambda} = w,$$

setze man

$$\tang\varphi = \sqrt{\frac{w}{v}} = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha \cos\lambda};$$

so wird

$$\sec\varphi^2 = 1 + \frac{w}{v} = \frac{v + w}{v},$$
$$\cot x = \cot\lambda \sec\varphi^2 = \frac{\cot\lambda}{\cos\varphi^2}.$$

Hieraus erhält man x, also auch $y = \lambda - x$. Die Diagonale AC, und die Winkel derselben an A und C, erhält man durch Auflösung des Dreiecks ABC, und für die übrigen Stücke hat man:

$$AD = \frac{a \sin(\alpha + x)}{\sin\alpha}, \quad CD = \frac{b \sin(\beta + y)}{\sin\beta},$$
$$BD = \frac{a \sin x}{\sin\alpha} = \frac{b \sin y}{\sin\beta}.$$

Im Sinne der Geodäsie wird nach dieser Aufgabe, wenn die Lage dreier Punkte A, B, C gegeben ist, die Lage eines vierten D bestimmt, mittelst der in D gemessenen scheinbaren Größen α, β der Entfernungen AB, BC. Sie heißt gewöhnlich die Pothenotische Aufgabe. (M. s. Problème de Géometrie pratique etc. Mém. de Paris. 1692. p. 188.), obgleich eigentlich Snellius (Erathostenes Batavus de terrae ambitus vera quantitate. Leid. 1614. Lib. II. Cap. X.) der erste Erfinder ist. Sehr ausführlich, auch in Bezug auf Geschichte und Literatur, handelt Kästner von ihr in den geom. Sammlungen. I. S. 393., so wie auch Pfleiderer (Ebene Trigonometrie. Tüb. 1802. S. 273. Hindenburgs Archiv. 11. Heft. S. 318.). Außer den in diesen Auf-

sätzen erwähnten Schriften s. m. noch: Cagnoli Trigon. 2ème ed. p. 211.; J. J. J. Hoffmann, das Pothenotische Problem und seine Auflösung. Mainz. 1826., eine bequeme praktische Auflösung von Bohnenberger in der Zeitschr. für Astronomie. VI. S. 121., und eine von Burkhardt in der monatl. Corresp. Oct. 1801. S. 359.

VI. Geschichte.

193. So wie die Geodäsie die Veranlassung zur Erfindung der Geometrie wurde, war die Trigonometrie eine Tochter der Astronomie. Die Feldmesser begnügten sich in alter Zeit mit der Zeichnung ähnlicher Dreiecke. Eben so mögen vielleicht die ersten Astronomen (Kästner Gesch. d. Math. I. S. 512.) sich zur Auflösung astronomischer Aufgaben einer Kugel bedient haben, auf welcher sie Kreise verzeichneten, oder auch wohl bewegliche Kreise in verschiedene Lagen bringen konnten. Aber bald mußte die Ungenauigkeit dieser construirenden Methoden fühlbar werden, und die Vorzüge rechnender Methoden in die Augen fallen. Die sphärische Trigonometrie entstand zuerst. Hipparchos aus Nikäa (160 — 125. v. Ch.), auch Rhodius genannt, weil er zu Rhodus seine Beobachtungen anfing, (Weidler Hist. Astr. p. 140.), scheint sich zuerst mit Trigonometrie beschäftigt zu haben, wenigstens erwähnt Theon, der Alexandriner, in Comm. in Alm. l. 1. c. 9., daß Hipparch in zwölf, Menelaus (etwa 98 n. Ch.) in sechs Büchern die Behandlung und Benutzung der Sehnen im Kreise vor Ptolemäus gelehrt, dieser aber die Berechnung mit bewundernswürdiger Geschicklichkeit auf wenige passende Lehrsätze zurückgeführt habe (Pfleiderer Trig. S. 9.) Von Menelaus sind noch übrig: Sphaericor. libr. III. Quos olim, coll. MSS. hebr., arab. typis exprimendos curavit E. Halleius. Oxon. 1758. 8. Was uns von Trigonometrie noch aus der Zeit der Griechen übrig ist, findet sich in *Κλ. Πτολεμαιου Μεγαλης Συνταξεως Βιβλ. ιγ. Θεωνος Αλεξαν-*

δρεως εἰς τα αυτα Ὑπομνηματων Βιβλ. ια. Basil. 1538. Fol., gewöhnlich Almagest genannt. Es ist eine Chordentafel von 30 zu 30′, den Halbmesser = 60 gesetzt, nebst ihrer Berechnung, worüber, so wie über trigonometrische Tafeln überhaupt, der Art. Cyclotechnie nachzusehen ist, und die Berechnung ebener und sphärischer Dreiecke, aber nur auf astronomische Aufgaben angewandt. Die Theorie dieser Rechnungen mag Ptolemäus aus der obigen Schrift des Menelaus (Kästner G. d. M. I. S. 518.), und auch aus des Theodosius von Tripolis (etwa 50 v. Ch. G) Σφαιρικων βιβλ. γ. (Oxoniae 1707. 8. Lat. von Barrow. Lond. 1675. 4. Deutsch von Nizze. Stralsund. 1826. 8.), (S. Heilbronner Hist. Math. p. 291.), geschöpft haben. Die Reihe der Beobachtungen des Ptolemäus im Almagest geht von 125 — 141 n. Ch. G., um welche Zeit er also gelebt hat. Die Berechnung ebener Dreiecke kommt nur bei astronomischen Untersuchungen in bestimmten Beispielen vor. Wir geben die Behandlung zweier Fälle nach Pfleiderer a. a. O. S. 832. ff. Die Arithmetik des Ptolemäus kennen zu lernen, dient auch: Ueber die Arithmetik der Griechen. A. d. Franz. nach Delambre von J. J. J. Hoffmann. Mainz. 1817. 4. Um die rechtwinkligen Dreiecke wird immer ein Kreis beschrieben, die schiefwinkligen werden immer in rechtwinklige zerlegt.

In dem bei α rechtwinkligen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 71.) sey $\beta = 7^0 40'$, b $= 5\frac{1}{4}$ gegeben; man soll die Hypotenuse a finden. Der Winkel β enthält $7\frac{40}{60}$ solcher Theile, als vier rechte 360, oder $15\frac{20}{60}$ solcher Theile, als zwei rechte 360 enthalten. Also enthält nach einfachen geometrischen Gründen der Bogen $\alpha\gamma$ $15\frac{20}{60}$ solcher Theile, als der um das Dreieck beschriebene Kreis 360 enthält. In der ptolemäischen Tafel kommt dem Bogen $15\frac{20}{60}$ am nächsten $15\frac{30}{60}$. Diesem entspricht die Chorde 16 Th. 10 M. 56 S. in Sexagesimaltheilen des Halbmessers. Also enthält die Chorde von $\alpha\gamma$ zunächst 16 solcher Theile wie $\beta\gamma$ 120. Dies giebt das Verhältniß $\alpha\gamma : \beta\gamma = 16 : 120$ $=$ b : a. Also a $= \frac{15}{2}$ b $= 39\frac{3}{8} = 39\frac{22}{60}$ nahe.

Im stumpfwinkligen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 72.) sey $b = 2\frac{1}{2}$, $c = 60$, $\gamma\alpha\delta = 30^0$ gegeben. Man fälle das Perpendikel $\gamma\delta$. Wie vorher schließt man, daß der Bogen $\gamma\delta$ 60 solcher Theile enthält, wie der Kreis um das Dreieck $\gamma\alpha\delta$ 360 enthält, so daß also der Bogen $\alpha\delta = 120$ solcher Theile. Nach der Tafel sind die Sehnen $\gamma\delta = 60$, $\alpha\delta = 103\frac{55}{60}$, $\alpha\gamma = 120$, in verhältnißmäßigen Zahlen. Also $\gamma\delta = \frac{60}{120}\alpha\gamma$ $= \frac{1}{2}\alpha\gamma = \frac{1}{2}.2\frac{1}{2} = 1\frac{15}{60}$, und eben so $\alpha\delta = \frac{103\frac{55}{60}}{120}.2\frac{1}{2} =$ $2\frac{95}{576} = 2\frac{10}{60}$ nahe. Folglich $\beta\delta = \beta\alpha + \alpha\delta = 60 + 2\frac{10}{60}$ $= 62\frac{10}{60}$. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze findet man nun aus $\beta\delta$ und $\gamma\delta$ die Hypotenuse $\beta\gamma = 62\frac{11}{60}$. Aus der Proportion $62\frac{11}{60} : 1\frac{15}{60} = 120 : \gamma\delta$ findet man, daß $\gamma\delta = 2\frac{25}{60}$ nahe (genau $= 2\frac{1538}{3731}$) solcher Theile ist, wie $\beta\gamma$ 120 enthält. Nach der Tafel sind die Chorden von $2^0 30'$ und $2^0 0'$ respective $2\frac{37}{60}$, $2\frac{5}{60}$; daraus schließt Ptolemäus, daß $\beta = 2\frac{18}{60}$ solcher Theile enthält, als zwei rechte Winkel 360 enthalten, oder daß $\beta = 1^0 9'$. Aber $\gamma\alpha\delta = 30^0$, also $\beta\alpha\gamma = 150^0$, $\beta\alpha\gamma + \beta = 151^0 9'$, $\alpha\gamma\beta = 180^0 - 151^0 9' = 28^0 51'$. Mehrere Exempel s. m. a. a. O. Bei der Auflösung der sphärischen Dreiecke bedient sich Ptolemäus gewisser Zusammensetzungen von Verhältnissen, woraus, da immer sechs Größen mit einander in Verbindung kommen, die nachher so genannte regula de sex quantitatibus entstanden ist, über die sich aber hier in der Kürze Nichts beibringen läßt. Ein Beispiel giebt Kästner in den geom. Samml. I. S. 534.: Aus der Schiefe der Ekliptik und der Länge der Sonne die Abweichung zu finden, d. i. in einem rechtwinkligen Dreieck aus der Hypotenuse und einem anliegenden Winkel die gegenüberstehende Cathete zu finden. Kästner übersetzt des Ptolemäus Vorschrift in folgenden Ausdruck:

$$2r : \text{Sehne } 2\beta = \begin{cases} 2r : \text{Sehne } 2b \\ \text{Sehne } 2a : 2r \end{cases}$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$2r : \text{Sehne } 2\beta = \text{Sehne } 2a : \text{Sehne } 2b,$$
$$r : \tfrac{1}{2}\text{Sehne } 2\beta = \tfrac{1}{2}\text{Sehne } 2a : \tfrac{1}{2}\text{Sehne } 2b,$$
$$r : \sin\beta = \sin a : \sin b,$$

d. i. $\sin b = \sin\beta \sin a$ für $r = 1$, übereinstimmend mit

76*. M. s. auch F. T. Schubert Trigonom. sph. e Ptolemaeo. Nov. Act. Petrop. XII. — Trigonom. des anciens. Soc. Philomath. An 7. p. 191.

Eine neue Gestalt gewann die Trigonometrie durch die Araber, welche statt der Sehnen die Sinus einführten (Cyclotechnie. S. 667.). Der Erste, welcher sie gebrauchte ist Albategnius oder Mohammed Al Batani um 880. (Kästner G. d. M. I. S. 520.). Rudimenta astron. Alfragani, item Albategnius de motu stellar. Norimb. 1537. 4. Mahometis Albatenii de scientia stellar. liber cum aliquot add. J. Regiomontani. Bonon. 1645. Auch hat Jahia ben Mesva über die Sinus geschrieben (Montucla I. p. 374.) Mohammed ben Musa schrieb über die ebenen und sphär. Dreiecke (Montucla I. p. 373.), und Alchindi, mit seinem vollständigen Nahmen Jacob Ben Isaac Ben Al-Szabah Abu-Joseph Al-Chindi, bei den Arabern wegen seiner großen Gelehrsamkeit κατ᾽ ἐξοχὴν Philosophus genannt, um 864. n. Ch. (Gartz de interpret. et explanator. Euclidis arab. Halae. 1823. 4. p. 20. 27.), erläuterte die regula de sex quantitatibus in einer Schrift, welche sich nach Cardan in der Bibliothek zu Mailand befindet (Montucla I. p. 374.). Die meisten Verdienste um die Trigonometrie unter den Arabern hat aber Geber ben Aphla (nach Riccioli um 1090.), welcher seine Astronomie um das Ende des 11ten oder den Anfang des 12ten Jahrhunderts geschrieben haben soll. Instrumentum primi mobilis a P. Appiano nunc primum inventum et editum. Acc. Gebri filii Affla Hispalensis libri IX. de Astron. per Girardum Cremonensem latinitate donati. Norimb. 1534. fol. Weidler (Bibliograph. astron. p. 15.) führt noch an: Geberi, Hispalensis libri IX. commentar. in Ptol. Alm. edd. Petreius cum instr. pr. mob. P. Appiani. Norimb. 1533. 4. Geber unterscheidet in der ebenen Trigonometrie schon die vier Hauptfälle, löset die Aufgaben aber auch noch durch Umschreibung eines

Kreises und Zerfällung in rechtwinklige Dreiecke mit Hülfe der ptolemäischen Chordentafel auf. Pfleiderer a. a. O. S. 337. ff. theilt Mehreres aus Astron. lib. I. mit. Das von Montucla (I. p. 373.) über die Araber, und insbesondere über Geber gefällte Urtheil scheint zu günstig zu seyn. Denn von den trigonometrischen Haupttheoremen mag Geber doch nur das erste gekannt haben, wenn er es auch nicht auf den jetzt gewöhnlichen kurzen Ausdruck: die Seiten verhalten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel, bringt. (M. s. Pfleiderer a. a. O. S. 339. 340.)

Sehr gefördert ward die Trigonometrie durch die Mathematiker des 16ten Jahrhunderts, und erhielt nun erst eine streng systematische Form, freilich noch immer mit Beibehaltung ihres geometrischen Charakters. Zuerst ist zu erwähnen: J. Regiomontani de triangulis omnimodis libri V. Norimb. 1533. fol., eine vollständige ebene und sphär. Trig., von welcher Montucla (I. p. 544.) urtheilt, daß sie sich mit Ausnahme der Logarithmen und einiger neuern Theoreme von der seiner Zeit nicht wesentlich unterscheide. Im 5ten Buche werden auch schwerere Aufgaben, wenn z. B. Summen und Differenzen der Seiten gegeben sind, aufgelöst. Indeß werden die schiefwinkligen Dreiecke doch auch nur durch Zerlegung in zwei rechtwinklige berechnet. Im dritten Falle, wenn im Dreieck ABC Fig. 73.) die drei Seiten gegeben sind, fällt R. das Perpendikel CE, nimmt DE = EB, und zieht CD; so ist $AC^2 - AE^2 = BC^2 - BE^2 = BC^2 - DE^2$, $AC^2 - BC^2 = AE^2 - BE^2 = (AE + BE)(AE - DE) = AB . AD$. Dies giebt

$$AD = \frac{AC^2 - BC^2}{AB} \quad \text{(l. I. p. 44.)}$$
$$= \frac{(AC + BC)(AC - BC)}{AB} \quad \text{(l. I. p. 45.)},$$

Hieraus hat man AD, also auch DB, DE = $\frac{1}{2}$DB, AE und BE. Die Winkel findet man durch Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke ACE, BEC. Man sieht, daß diese Auflösung mit der in unsern Elementarwerken gewöhnlichen einerlei ist. (Pfleiderer a. a. O. S. 344.) Den

zweiten Fall, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, löset R. ebenfalls durch die mehr erwähnte Zerlegung auf, und, obgleich R. die Tangenten in die Trig. einführte, deren Tafel er tab. foecundam nannte: so scheint die zur Auflösung dieses Falls dienende Proportion

$$a + b : a - b = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$

doch erst in T. Finkii Geometriae rotundi lib. XIV. Basil. 1583, deren 10tes Buch die Trig. enthält, deutlich ausgesprochen vorzukommen, wenn auch R. die Anwendung seines canon. foec. auf diesen Fall kennen mochte, und auch Fink auf R. hinzuweisen scheint, worüber mit Mehrerem Pfleiderer a. a. O. S. 353 — 357 nachzusehen ist. So wie ich Finks Worte (S. 357.) verstehe, drückt er die Proportion so aus:

$$\frac{a+b}{2} : \frac{a+b}{2} - b = \text{tang}\,\frac{180^0 - \gamma}{2} : \begin{cases} \text{tang}\left(\frac{180^0 - \gamma}{2} - \beta\right) \\ \text{tang}\left(\alpha - \frac{180^0 - \gamma}{2}\right) \end{cases}$$

welches offenbar unsere obige Proportion ist. Eben so findet sie sich in Clavii Geom. pract. Lugd. 1607. 4. p. 47. In Clavii Theodosii Trip. Sphaer. lib. V. Item Clavii sinus, tangentes et secantes, triangula rectilinea et sphaerica. Rom. 1586. 4. p. 312. wird sie so ausgedrückt:

$$a - b : a + b = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma : \text{tang}(\tfrac{1}{2}\gamma + \beta),$$

welche ebenfalls auf die obige zurückkommt, da $\frac{1}{2}\gamma = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma = \cot\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\frac{1}{2}\gamma + \beta = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \beta = 90^0 - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, $\text{tang}(\frac{1}{2}\gamma + \beta) = \cot\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, also $a - b : a + b = \cot\frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \cot\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha - \beta) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

Ferner gehören hierher noch folgende merkwürdige Schriften aus dem 16ten Jahrhundert:

N. Copernicus de laterib. triangulor. tum planor. tum sphaer. Viteb. 1542. 4., noch vor Bekanntmachung von Regiomontans Trigonometrie ausgearbeitet (Pfleiderer a. a. O. S. 349.).

Bressii, Lutet. Prof., Metrices astronomicae

lib. V. Paris. 1581. fol., enthält im III. und IV. Buche die eb. u. sph. Trig.

Nicol. Raymari Ursi Dithmari fundamentum astr., i. e. nova doctr. sin. et triangulor. Argent. 1588. 4.

Lansberg triang. Geom. Lugd. 1591. 4. Auch Amsterd. 1631. 4.

Opus palatinum de triang. a G. J. Rhetico coeptum, L. V. Otho consummavit. Neostadii in Palatinatu. 1596. fol. Eine sehr vollständige rein geom. Abhandlung der sph. Trig., von Rhäticus für rechtwinklige, von Otho für schiefwinklige Dreiecke.

Diclides coelometricae, seu valvae astronomicae universales. Auth. Nath. Torporlaeo. Lond. 1602. Enthält auch Trig., mit vielen neuen Kunstwörtern. Torporley war eine Zeitlang Sekretair des Vieta. (Montucla II. p. 120.).

Aber das ausgezeichnetste trigonometrische Werk dieses Zeitraums ist unstreitig:

Barth. Pitisci Trigonometriae seu de dimensione triangulorum libri V. Francof. 1599. Aug. Vindel. 1608. Francof. 1612. 4. Eine kleine Abhandl. hatte Pitiscus (geb. zu Schlaue, einem Dorfe bei Grünberg in Schlesien, 1561, gest. 1613.) schon seines Landsmanns Abr. Sculteti Sphaer. lib. III. Access. de resol. Triang. tractatus brevis et persp. B. Pitisci. Heidelb. 1595. beigefügt, so daß man also eigentlich vier Ausgaben seiner Trig. hat. Kästner (G. d. M. I. S. 564.) nennt sie das erste gründliche und vollständige Lehrbuch der Trigonometrie, und Montucla rühmt sie ebenfalls sehr.

Zu verbinden ist hier die Geschichte der Aufgabe, den Inhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten zu finden, im Art. Dreieck, da diese Aufgabe mit dem dritten Hauptfalle der Trigonometrie nahe zusammenhängt. Ueber die prostaphäretische Methode s. m. diesen Artikel.

Mit dem Anfange des 17ten Jahrhunderts beginnt eine neue Epoche der Geschichte unserer Wissenschaft, als

Neper im Jahre 1614. die Erfindung der Logarithmen bekannt machte. Der trigonometrische Calcul nahm hierdurch eine ganz andere Gestalt an, und zugleich machte sich Neper um die Auflösung der sphärischen Dreiecke durch seine allgemeine Regel für rechtwinklige, und die nach ihm benannten Analogieen für schiefwinklige Dreiecke (79. 61.) verdient. Nach Erfindung der Logarithmen sind als Verfasser trigonometrischer Lehrbücher zu merken: Benj. Ursinus (Coloniae — an der Spree — 1625. 4.), A. Girard (Tables des sinus etc. A la Haye 1626., worin schon Bezeichnungen, wie sin, tang, sec gebraucht werden), H. Gellibrand (Trigon. britannica. Goudae. 1633. An Institution trigonometrical. London 1652. 8.), P. Krüger (Praxis Trig. log. Dantisci. 1634. 8. Synopsis Trig. Ibid. 1612. 8.), G. L. Frobenius (Clavis univ. trig. Hamb. 1634. 4. Jede Aufgabe wird auf die gemeine Art, prostaphäretisch und logarithmisch aufgelöset), Bonaventura Cavaleri (Bonon. 1643. 4.), Vieta (Opp. math. Lugd. 1646. fol. Variorum de rebus mathem. reponsorum lib. VIII. Gehört aber eigentlich nicht hierher, da Vieta schon 1603, vor Erfindung der Logarithmen, starb.), Dugthred (London. 1657. 4.), F. Schooten (Trigonometria a J. Magiro. Brux. 1683. Holländisch zu Leyden. 1627. Doctrina triangulorum edd. M. Hortensius. Lugd. 1627.), A. Vlacq Trig. artificialis enthält nur trig. Tafeln, alle obigen aber Abhandlungen der Trigonometrie. Ferner sind zu merken: J. Gordon (Leodii. 1704. 4.), J. B. Wideburg (Helmst. 1717. 4.), J. Wilson (Lugd. 1718. 8. Kurz aber deutlich). J. Wards Postumous works. Lond. 1730, deren zweiter Theil die sphärische Trigonometrie enthält, und Beyers Beschreibung eines neu erfundenen Modells der sphär. Trig. Hamb. 1732. 4. enthalten schon Hülfsmittel zur sinnlichen Darstellung der Sätze der sphärischen Trigonometrie, in welcher Beziehung auch die neue Knie'sche, in Breslau bei dem Verfertiger für 7½ Rthlr. zu beziehende, Sammlung zu empfehlen ist.

Bisher war die Darstellung der Trigonometrie immer nur rein geometrisch gewesen. Ungefähr mit dem zweiten Viertheil des 18ten Jahrhunderts beginnt aber ein neuer Abschnitt ihrer Geschichte, indem man um diese Zeit die algebraische Analysis mit ihr zu verbinden anfing. Gewöhnlich legt man dem Akademiker F. C. Mayer zu Petersburg (Comm. Petrop. T. II. 1727.) die ersten Verdienste in dieser Beziehung bei (Goniometrie. S. 617); aber noch frühere Ansprüche scheint der Jesuit J. Kresa durch seine Analysis speciosa, Trig. sph., primo mobili, triangulis rectil. applicata. Pragae. 1720. 4. zu haben, und selbst schon in den Act. Erud. 1711. p. 324. findet sich ein zur analytischen Trigonometrie gehörender kurzer Aufsatz des Grafen Herberstein (Bemerkungen über denselben von J. W. Pelican ebendas. p. 502.), worin auch der Verdienste Kresa's mit vielem Lobe gedacht wird. Das erste vollständige Werk über analytische Trignnometrie war aber F. W. Oppels Analysis triangulorum. Dresd. et Lips. 1746. 4., welches sich mit vieler Ausführlichkeit über beide Trigonometrieen verbreitet. Die Methoden aller dieser Mathematiker sind indeß immer noch sehr schwerfällig, weil sie alle die trigonometrischen Linien noch durch einzelne Buchstaben bezeichnen, ohne sich der schon von A. Girard gebrauchten Bezeichnungen sin, tang, sec u. s. f. zu bedienen, welches bei Oppels Werke um so mehr zu verwundern ist, da Euler diese Bezeichnung schon in einer Abhandlung über die umgekehrte Methode der Tangenten (Act. Erud. 1744. p. 215.) durchgängig anwendet. Durch diese von Euler wieder in die Trigonometrie eingeführte Bezeichnung, so wie durch die Bezeichnung der Winkel und respectiven Gegenseiten durch A, B, C und a, b, c, oder α, β, γ und a, b, c hat die analytische Behandlung der Trigonometrie an Eleganz und Einfachheit außerordentlich gewonnen. Zugleich suchte aber auch Euler die ganze sphärische Trigonometrie aus einigen wenigen durch Construction bewiesenen Gleichungen mittelst rein analytischer Methoden abzuleiten. M. s. besonders seine Abhandlung: Trig. sphaer. univ. ex primis princi-

piis breviter et dilucide derivata. Acta Petrop. 1779. P. 1. p. 72., die man auch fast ganz eben so in Lacroix Trig. A. d. F. v. Ideler. Berlin. 1822. S. 64. M. Hirsch geom. Aufg. II. Berlin. 1807. S. 21. Bertrand Développ. nouv. de la partie élém. d. Math. Genève. 1778. T. II. p. 576. findet. Die Ableitung aus einer Grundformel versuchte auch de Gua (Mém. de Paris. 1785.), aber nach einer höchst weitschweifigen Methode. Den ersten zwar kurzen, aber sehr guten, Lehrbegriff der analyt. Trig. lieferte Klügel (Analyt. Trig. Brnschwg. 1770.), woran nur zu tadeln seyn möchte, daß noch zu oft Proportionen statt der Gleichungen gebraucht werden. Auch schon Lambert hatte (Beiträge z. M. I. S. 369.) mehrere analytische Formeln zur sphärischen Trig. geliefert. Das vollständigste neuere Werk ist: A. M. Cagnoli Trig. rect. et sphér., trad. de l'Ital. par Chompré. 2. ed. Paris. 1808. 4., nach gemischter Methode, etwas weitschweifig, leider ohne Anwendung der Eulerschen Bezeichnung der Seiten und Winkel, mit vielen Anwendungen. Eine sehr vollendete analytische Arbeit ist Lagrange Mém. sur la Trig. sphér. Journal de l'éc. polyt. Cahier VI. p. 270. worin die ganze sphärische Trigonometrie bloß aus den Formeln [24.] abgeleitet ist. Von neuen Lehrbüchern erwähne ich nur die von Scherffer (Eb. Trig. Halle. 1782. Mit vielen prakt. Bem.), J. K. Schulze (Eb. Trig. Berlin. 1784. Neuerlich hersg. von Grüson. Ganz elementar, aber sehr deutlich.), Pfleiderer (Eb. Trig. Tüb. 1802. Mit vielen höchst schätzbaren Bem. zur Gesch. u. Lit.), Zimmermann (bloß sph. Trig. Berlin. 1810.), Gerling (Gött. 1815. Sehr brauchbares Compendium.), Emmel (Frnkf. a. M. 1817. Recht vollständig, etwas weitschweifig, mit wenig Eleganz.), Hestermann Trig. sph. leges et formulae. Vindob. 1820. 4. (Ganz analytisch, mit Hülfe der allgemeinen Formeln der analyt. Geom.), Wilde (Berlin. 1825. Sehr vollständig, und in jeder Beziehung sehr zu empfehlen), v. Münchow (Bonn. 1826. Hat vorzüglich den Zweck, den Gebrauch

des ± auf strenge Principien mittelst der Coordinaten-Methode zurückzuführen, rein analytisch, sehr zu empfehlen.); Sniadecki (A. d. Poln. v. Feldt. Lpzg. 1828. Nur sph. Trig. mit Anwendungen auf Astronomie.). Unter den französischen Werken zeichnen sich aus Trembley Essai de Trig. sphér. Neuchat. 1783., Mém. sur la Trig. sphér. et son appl. Paris. 1801. 8., Legendre Élémens de Géom. et Trig. 11 ed. Paris. 1817., Lacroix eb. u. sphär. Trig. u. s. w. A. d. F. v. Ideler. Berlin. 1822. Das neueste sehr vollständige englische Werk mit vielen Anwendungen ist: M. D. Lardner an analytical Treatise of plane and spher. Trig. London. 1826. 8., außerdem T. Simpson Trig. plane and spherical. London. 1748., Playfair Elem. of Geom. and Trig. Edinb. 1810., Leslie Elem. of Geom. and pl. Trig. Edinb. 1820. 4 ed. Eine sehr ausführliche Abhandlung der sph. Trig. enthalten auch Delambre Traité d'Astr. T. I. Chap. X., und Abrégé d'Astr., so wie beider Trigonometrieen Puissant Traité de Géodésie. T. I. Liv. 2.; viele Formeln enthält die Base du syst. metrique und Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien. Paris. An VII. von Delambre, unter den auch ältern Mauduit Principes d'Astron. sphér. Paris. 1768. Sehr viele Anwendungen findet man in M. Hirsch geom. Aufgaben, Schulze's Taschenbuch der Meßkunst, Puissant recueil de div. propos. de Géom. etc. Die einzelnen Verdienste von Legendre, Gauß, Delambre, Mollweide, Lexell, Camerer, Olbers, L'Huilier, Pfleiderer, Wolf, u. s. f. sind oben erwähnt.

Die Grundformeln der sphäroidischen Trigonometrie stellte zuerst Euler auf in der wichtigen, diese Wissenschaft begründenden, Abhandlung: Élém. de Trig. sphéroid., tirés de la méthode des plus grands et plus petits. Mém. de Berl. 1753. p. 258., nachdem schon Clairaut (Mém. de Paris. 1733 1739.) die Haupteigenschaft (156.) der kürzesten Linie gefunden hatte. Du Sejour suchte die Formeln durch Reduction der sphäroidischen Dreiecke auf die

Oberfläche der eingeschriebenen Kugel zu vereinfachen (Mém. de Paris. 1778. Traité anal. des mouv. appar. des corps cél. T. II.); eine ziemlich vollständige Analyse lieferte Legendre in den Mém. de l'Institut. 1806., und das erste vollständige Werk Barnaba Oriani (Elementi di Trigonometria sferoidica. Bologna. 1806. 4.), bei welchem jedoch einige Weitschweifigkeit und Ungelenkigkeit nicht zu verkennen ist. Dann erschien Tentamen circa Trig. sphaeroid. Auct. E. G. Fog Thune, Hauniae. 1815. 4., worin die Formeln auch noch sehr complicirt sind, und der Darstellung alle Eleganz mangelt. Vorzüglich wichtig ist Bessels Aufsatz: Ueb. d. Berechnung d. geogr. Längen u. Breiten aus geodät. Vermessungen. Schumachers astron. Nachr. IV. 1826. No. 86., welcher auch unserer hier gegebenen Behandlung vorzüglich zum Grunde liegt. Puissant (Traité de Géod. II. p. 212.) und Stein (Geograph. Trigonometrie. Mainz. 1825. 4. S. 107. Enthält alle drei Theile der Trig. mit Anwendungen auf höhere Geodäsie.), folgen ganz Legendre. Noch ist zu erwähnen eine Abhandlung von Caluso (Mém. de Turin. IV. V.), und Delambre Méthodes analyt. etc. Mehreres hierher Gehörende findet man auch in der monatl. Corresp. an verschiedenen Orten.

Die ersten Ideen zur Polygonometrie finden sich schon in Girards Tables des sinus etc. (Kästner G. d. M. III. S. 108.) Die Veranlassung zu ihrer Bearbeitung gab aber vorzüglich Lambert durch seine Anlage zur Tetragonometrie (Beiträge. II. S. 175.), einer Aufzählung aller möglichen Fälle, wonach J. J. Mayer (Tetragon. specimen I. Gott. 1773. 4.), und Biörnsen in einem sehr ausführlichen Werke (Introd. in Tetr. Hauniae. 1780. 8.) die Ausführung versuchten. Den Grund zur Polygonometrie legte Lexell durch die beiden allgemeinen Formeln in (178.) (Comm. Petrop. XIXXX. Uebers. unter dem Titel: Polygonometrie oder Anweisung zur Berechnung jeder geradl. Figur. Lpzg. 1783.). Das erste ausführliche Lehrbuch mit einer allgemeinen Formel für den Inhalt der Polygone (186.) lieferte L'Huilier (Polygonometrie

et Abregé d'Isopérimetrie. Genèv. 1789. 4.), und, nebst Carnot (176.), zwei andere allgemeine Formeln, auf welche hier die Polygonometrie gegründet worden ist. Unter den deutschen Lehrbüchern sind zu erwähnen: Magold math. Lehrb. Landshut. 1805. III., Schiereck Polygonometrie. Gießen. 1820. und Handbuch für Geometer u. s. w. Cöln. 1827. Zu empfehlen ist auch die analytische Behandlung von Crelle in seinem Lehrb. d. Geom. Berlin. 1826. I. S. 437.

Ueber die Geschichte der Trig. ist zu vergl. Hutton in der Einleitung zu seinen Mathematical Tables. Lond. 1801.

Trigonometrie, rationale, s. Trigonometrie. (34.)

Trigonoscopie, s. Trigonometrie. (3.)

Trigonum, s. Dreieck.

Trilaterum, Dreiseit, gleichbedeutend mit Dreieck.

Trillion ist eine Million von Billionen, die Bezeichnung der achtzehnten Ordnung im decadischen Zahlensystem. S. Zahl.

Trinomisch heißt jede aus drei, durch + oder — mit einander verbundenen, Theilen bestehende Größenform, wie A + B + C, A — B + C, u. s. f. Größen von der Form $x^2 - 2px + q^2$ nennt Euler (Intr. in Anal. inf. I. Cap. 9.) trinomische Factoren. Im Art. Unmögliche Größen ist gezeigt, daß jede ganze reelle Function immer in lauter solche reelle Factoren des zweiten, und in reelle Factoren des ersten Grades zerlegt werden kann, welches ein Hauptsatz der höhern Algebra ist. M. s. auch die Artt. Cotesischer Lehrsatz, und Anwendung der Geometrie auf die Algebra. VI. VII.; auch eine Abhandlung von Aepinus Nov. Comm. Petrop. VIII. p. 181. Legendre (Théorie des nombres. p. 292.) nennt forme

trinaire einer Zahl jede Art, dieselbe als eine Summe dreier Quadrate darzustellen, wie z. B. $59 = 25 + 25 + 9 = 49 + 9 + 1$. Er unterscheidet formes trinaires propres und formes trinaires impropres, jenachdem die drei Quadrate keine, oder eine Quadratzahl (1 ausgenommen) zum gemeinschaftlichen Theiler haben, wie z. B. $189 = 13^2 + 4^2 + 2^2 = 10^2 + 8^2 + 5^2 = 11^2 + 8^2 + 2^2$ für die erste, $189 = 12^2 + 6^2 + 3^2$ für die zweite Art. Diviseurs trinaires sind solche trinomische Factoren von der allgemeinen Form $px^2 + qxy + ry^2$, welche sich in drei Quadrate zerlegen lassen.

Trinomium, eine aus drei durch + oder — mit einander verbundenen Theilen bestehende Größe, wie $a + b + c$, $a - b + c$, $a + \sqrt{b} - \sqrt[3]{c}$, ꝛc.

Tripartition. Eintheilung einer Größe in drei gleiche Theile.

Triplicata ratio, s. Verhältniß. (14.)

Triquetrum, eine veraltete, nur selten vorkommende Benennung des Dreiecks. In der angewandten Mathematik ein astronomisches Instrument, dessen Erfindung dem Ptolemäus zugeschrieben wird. Die Beschreibung findet man z. B. in Stevini Geometria practica. Lib. II. p. 363.

Trisection des Winkels, oder vielmehr Aufgabe von der Trisection des Winkels, ist die im Alterthume sehr berühmte Aufgabe von der Theilung eines Winkels oder Bogens in drei gleiche Theile. Es wird zweckmäßig seyn, zuerst die allgemeine analytische Auflösung dieser, die Kräfte der euclidischen Geometrie übersteigenden Aufgabe zu geben, und dann der Bemühungen der griechischen Geometer zu gedenken.

1. Sey α ein gegebener Kreisbogen, dessen Halbmesser $= r$. Durch den einen Endpunkt desselben ziehe man einen Durchmesser und bezeichne in Beziehung auf den-

selben als Axe, den Mittelpunkt des Kreises als Anfang der Abscissen, die Coordinaten des andern Endpunktes der Bogen α und $\frac{1}{3}\alpha$ durch x', y'; x, y; so ist

$$x' = r\cos\alpha,\ y' = r\sin\alpha;$$
$$x = r\cos\tfrac{1}{3}\alpha,\ y = r\sin\tfrac{1}{3}\alpha.$$

Aber

$$r^2\sin\tfrac{2}{3}\alpha = 2r\sin\tfrac{1}{3}\alpha . r\cos\tfrac{1}{3}\alpha$$
$$= r\sin\alpha . r\cos\tfrac{1}{3}\alpha - r\cos\alpha . r\sin\tfrac{1}{3}\alpha,$$
$$2xy = xy' - x'y,\ y = \frac{xy'}{2x + x'}.$$

Diese Gleichung enthält beide Coordinaten x und y. Beschreibt man also eine ihr entsprechende Curve; so wird der dritte Theil des gegebenen Bogens durch den Durchschnittspunkt dieser Curve mit dem gegebenen Kreise bestimmt werden.

2. Nimmt man einen Punkt, dessen Coordinaten $-\frac{1}{2}x'$, $\frac{1}{2}y'$ sind, als Anfang der Coordinaten an, und die positiven neuen Ordinaten auf der Seite der negativen primitiven Ordinaten; so ist, wenn die neuen Ordinaten durch x'', y'' bezeichnet werden:

$$x = x'' - \tfrac{1}{2}x',\ y = -y'' + \tfrac{1}{2}y',$$

woraus nach gehöriger Substitution:

$$x''y'' = \tfrac{1}{4}x'y',$$

welches die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist. (Hyperbel. 8. 9. 31.).

Ist also AB (Fig. 74.) $= \alpha$; so nehme man CE $= \frac{1}{2}$CD, EG $= \frac{1}{2}$BD, ziehe durch G eine Linie mit Aa parallel, und eine andere darauf senkrecht, und beschreibe zwischen diesen Linien als Asymptoten eine gleichseitige Hyperbel, deren Potenz $= \frac{1}{4}x'y'$ ist; so wird ihr Durchschnitt F mit dem Kreise den Bogen AF $= \frac{1}{3}$ AB bestimmen.

3. Für alle Punkte aber, welche diese beiden Curven mit einander gemein haben, ist

$$2xy = xy' - x'y,\ x^2 + y^2 = r^2,$$

woraus durch Elimination von y leicht:

$$x^4 + x'x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x^2 - r^2x'x - \tfrac{1}{4}r^2x'^2 = 0,$$

erhalten wird. Diese Gleichung des vierten Grades zeigt an, daß es im Allgemeinen vier Durchschnittspunkte der beiden Curven giebt, wenn nicht etwa einige Wurzeln derselben Gleichung imaginär sind.

4. Um die Gleichung aufzulösen gebe man ihr folgende Form:

$$(x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x - \tfrac{1}{4}r^2x')(x + x') = 0,$$

woraus $x = -x'$ eine Wurzel der Gleichung. Ferner setze man

$$x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x - \tfrac{1}{4}r^2x' = 0.$$

Aber (Goniometrie. 141.)

$$(\cos\tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{3}\alpha - \tfrac{1}{4}\cos\alpha = 0,$$
$$(r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{3}{4}r^2.(r\cos\tfrac{1}{3}\alpha) - \tfrac{1}{4}r^2.(r\cos\alpha) = 0,$$
$$(r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{3}{4}r^2.(r\cos\tfrac{1}{3}\alpha) - \tfrac{1}{4}r^2x' = 0.$$

Dies giebt die neue Wurzel $x = r\cos\tfrac{1}{3}\alpha$. Durch Subtraction erhält man leicht:

$$x^3 - \tfrac{3}{4}r^2x - \tfrac{1}{4}r^2x' =$$
$$x^3 - (r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)^3 - \tfrac{3}{4}r^2(x - r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)$$
$$= (x^2 + xr\cos\tfrac{1}{3}\alpha + r^2\cos\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \tfrac{3}{4}r^2)(x - r\cos\tfrac{1}{3}\alpha)$$
$$x^2 + xr\cos\tfrac{1}{3}\alpha + r^2\cos\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \tfrac{3}{4}r^2 = 0,$$
$$x = -\tfrac{1}{2}r\cos\tfrac{1}{3}\alpha \pm r\sin\tfrac{1}{3}\alpha.\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

woraus, da

$$\cos 60^0 = \tfrac{1}{2},\ \sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

ist, leicht erhalten wird:

$$x = -r\cos(60^0 \pm \tfrac{1}{3}\alpha).$$

Die vier Wurzeln sind also:

$$x = -x' = -r\cos\alpha,$$
$$= r\cos\tfrac{1}{3}\alpha,$$
$$= -r\cos(60^0 + \tfrac{1}{3}\alpha),$$
$$= -r\cos(60^0 - \tfrac{1}{3}\alpha).$$

5. Diese Wurzeln sind alle reell. Also giebt es im Allgemeinen vier Durchschnittspunkte. Indeß kann es in besondern Fällen auch nur drei geben, wie z. B. für $\alpha = 0$, wo die beiden letzten Wurzeln einander gleich sind. Auch für $\alpha = 45^0$ ist $60^0 - \tfrac{1}{3}\alpha = 60^0 - 15^0 = 45^0 = \alpha$. Also sind in diesem Falle die erste und vierte Wurzel einander gleich. Der Punkt F ist, wenn wir annehmen, daß

α nicht $> 90^0$, der einzige Durchschnittspunkt, dessen Abscisse positiv ist. Also ist für diesen Punkt nach (4.) $x = r\cos\frac{1}{3}\alpha$, und der Bogen $AB = \alpha$ wird folglich von diesem Punkte trisecirt, wie wir schon oben bemerkten. Unter den übrigen drei Durchschnittspunkten ist, ohne Rücksicht auf das Zeichen, die Abscisse von F'' am größten, die von F''' am kleinsten. Da nun α nicht $> 90^0$ ist; so ist $60^0 + \frac{1}{3}\alpha > 60^0 - \frac{1}{3}\alpha$, $60^0 + \frac{1}{3}\alpha$ nicht $< \alpha$. Also ist $60^0 + \frac{1}{3}\alpha$ der größte Winkel, $\cos(60^0 + \frac{1}{3}\alpha)$ der kleinste Cosinus. Demnach $-r\cos(60^0 + \frac{1}{3}\alpha)$ die Abscisse von F''', und F''' bestimmt also, wenn man sich die Abscisse positiv genommen denkt, den dritten Theil von $3.(60^0 + \frac{1}{3}\alpha) = 180^0 + \alpha$, d. i. den dritten Theil des Bogens $aF'''AB$, so daß $aF''' = \frac{1}{3}aF'''AB$. Ferner ist $60^0 - \frac{1}{3}\alpha \gtreqless \alpha$, wenn $60^0 \gtreqless \frac{4}{3}\alpha$, $15^0 \gtreqless \frac{1}{3}\alpha$, $45^0 \gtreqless \alpha$ ist. Für $\alpha < 45^0$ ist also $60^0 - \frac{1}{3}\alpha > \alpha$, $\cos(60^0 - \frac{1}{3}\alpha) < \cos\alpha$, also $-r\cos(60^0 - \frac{1}{3}\alpha)$ die Abscisse von F', $-r\cos\alpha$ die von F'', so daß also, wenn man die Bogen von a an rechnet, $aF' = 60^0 - \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{3}(180^0 - \alpha) = \frac{1}{3}aB$, $aF'' = \alpha = AB$ ist. Ist $\alpha > 45^0$, so ist $60^0 - \frac{1}{3}\alpha < \alpha$, $\cos(60^0 - \frac{1}{3}\alpha) > \cos\alpha$. Also $-r\cos\alpha$ die Abscisse von F', $-r\cos(60^0 - \frac{1}{3}\alpha)$ die von F'', $aF'' = \frac{1}{3}aB$, $aF' = \alpha = AB$, wie vorher. Für $\alpha = 45^0$ ist $60^0 - \frac{1}{3}\alpha = \alpha$, so daß also die Punkte F', F'' zusammenfallen, und $aF' = aF'' = \alpha = AB = \frac{1}{3}aB$ ist. Es erhellet hieraus, daß durch die Hyperbel immer sowohl der dritte Theil des gegebenen spitzen Winkels, als auch seines Supplements bestimmt wird. Wäre also ein stumpfer Winkel zu trisecirenn, so trisecire man sein Supplement, weil dann immer auch ein Zweig der Hyperbel den dritten Theil des gegebenen stumpfen Winkels bestimmt.

6. Obige Analysis führte uns unmittelbar zur Hyperbel, und es scheint nicht, daß eine einfachere Analysis möglich ist. Also übersteigt das Problem die Kräfte der Geometrie der geraden Linie und des Kreises. Der Grund hiervon läßt sich auf folgende Art am deutlichsten angeben. Wer nach dem dritten Theile eines gegebenen Bogens AB

fragt, fragt eigentlich, die Aufgabe ganz allgemein aufgefaßt, nach dem dritten Theile des zwischen den beiden Punkten A und B liegenden Bogens. Bezeichnen wir nun die Peripherie durch p, und setzen $p - \alpha = \alpha'$; so liegen zwischen diesen beiden Punkten, nach beiden Seiten hin von A ausgehend, folgende Bogen:

$$\alpha,\ p + \alpha,\ 2p + \alpha,\ 3p + \alpha, \text{ u. s. f.;}$$
$$\alpha',\ p + \alpha',\ 2p + \alpha',\ 3p + \alpha', \text{ u. s. f.}$$

Wer also nach $\frac{1}{3}\alpha$ fragt, fragt eigentlich nach dem dritten Theile aller dieser Bogen. Zu einer Auflösung in diesem allgemeinen Sinne sind aber drei Punkte erforderlich: einer, welcher $\frac{1}{3}\alpha$; einer, welcher $\frac{1}{3}\alpha'$, und einer, welcher $\frac{1}{3}(p + \alpha)$ bestimmt. Diese drei Punkte seyen f, f', f'' (Fig. 75.), so daß $Af = \frac{1}{3}\alpha$, $Af' = \frac{1}{3}(p + \alpha)$, $Af'' = \frac{1}{3}\alpha'$. Dann ist $\frac{1}{3}(2p + \alpha) = \frac{1}{3}(3p - p + \alpha) = p - \frac{1}{3}\alpha' = p - Af'' = Aff'f''$. Ferner ist $\frac{1}{3}(p + \alpha') = \frac{1}{3}(2p - \alpha) = \frac{1}{3}(3p - p - \alpha) = p - \frac{1}{3}(p + \alpha) = p - Af' = Af''f'$. Endlich ist $\frac{1}{3}(2p + \alpha') = \frac{1}{3}(3p - p + \alpha') = p - \frac{1}{3}(p - \alpha') = p - \frac{1}{3}\alpha = p - Af = Af''f'f$. Hat man nun allgemein den Bogen $np + \alpha$ oder $np + \alpha'$; so sey $n = 3n' + n''$, wo $n'' < 3$. Dann ist $\frac{1}{3}(np + \alpha) = \frac{1}{3}(3n'p + n''p + \alpha) = n'p + \frac{1}{3}(n''p + \alpha)$, $\frac{1}{3}(np + \alpha') = \frac{1}{3}(3n'p + n''p + \alpha') = n'p + \frac{1}{3}(n''p + \alpha')$, so daß also $\frac{1}{3}(np + \alpha)$, $\frac{1}{3}(np + \alpha')$ erhalten werden, wenn man zu dem aus dem Obigen bekannten Bogen $\frac{1}{3}(n''p + \alpha)$ oder $\frac{1}{3}(n''p + \alpha')$ das bekannte Vielfache der Peripherie addirt. Da also zu der Auflösung unserer allgemeinen Aufgabe drei Punkte nothwendig sind, der Kreis aber von der geraden Linie oder dem Kreise nur in zwei Punkten geschnitten werden kann; so muß die Aufgabe die Kräfte der Elementargeometrie übersteigen. Auf ganz ähnliche Art würde sich zeigen lassen, daß zur Theilung eines Bogens in zwei, vier, fünf, u. s. f. gleiche Theile im allgemeinen Sinne, auch zwei, vier, fünf, u. s. f. Punkte erforderlich sind. M. s. über diesen Gegenstand Kästners Programm: Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus, welches sich auch in der Sammlung: Dis-

sertationes math. et phys. quas Soc. reg. Gott. ann. 1756—66 exhibuit A. G. Kaestner. Altenb. 1771. 4. p. 150 — 175. befindet. Gilberts Geom. nach Legendre etc. Halle. 1798. 8. S. 181. ff.

7. Daß unsere Hyperbel die Aufgabe von der Trisection allgemein auflöset, ist leicht zu zeigen. Es ist nämlich (Fig 74.) nach (5.) $AF = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}\alpha$, aF' (oder aF'') $= \frac{1}{3}aB = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}p - \alpha)$, $aF''' = \frac{1}{3}aF'''AB = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}p + \alpha)$. Also $\frac{1}{2}p - aF'$ (oder aF'') $= AF'$ (oder AF'') $= \frac{1}{2}p - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}p - \alpha) = \frac{1}{3}(p + \alpha)$, $\frac{1}{2}p - aF''' = AF''' = \frac{1}{2}p - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}p + \alpha) = \frac{1}{3}(p - \alpha) = \frac{1}{3}\alpha'$, so daß also durch F, F' (oder F''), F''' die dritten Theile der Bogen α, $p + \alpha$, α' bestimmt werden, wie nach (6.) zur allgemeinen Auflösung erforderlich ist.

8. Obgleich man den eigentlichen Urheber unsers Problems nicht kennt; so ist doch keinem Zweifel unterworfen, daß es der platonischen Schule angehört (Montucla. T. I. p. 178.). Auch schreibt Montucla (p. 177.) folgende zwei Auflösungen dieser Schule zu.

Ist ACB (Fig. 76.) der gegebene Winkel, so werde aus C mit willkührlichem Radius ein Halbkreis beschrieben, und durch B die Linie BE so gezogen, daß DE dem Radius des Kreises gleich ist, wozu aber keine weitere Anweisung ertheilt wird. Dann ist $\angle E = \frac{1}{3}\angle ACB$, weil $DE = CD = CB$, $\angle CBD = \angle CDB$, $\angle DCE = \angle DEC$, $\angle CDB = 2.\angle E = \angle B$, $\angle ACB = \angle E + \angle B = 3.\angle E$, $\angle E = \frac{1}{3}\angle ACB$.

Ist ferner BAC (Fig. 77.) der gegebene Winkel, so beschreibe man das Rechteck ABCD, verlängere CD, und ziehe durch A die Linie AF so, daß $FE = 2AC$, wozu wiederum keine weitere Anweisung ertheilt wird. Dann ist $\angle FAB = \frac{1}{3}\angle BAC$, welches sich leicht beweisen läßt, wenn man FE in G halbirt, und CG zieht.

9. Auch Vieta (Supplementum Geometriae. Prop. IX.) und Newton in der Arithmetica universali haben auf den ersten der beiden vorigen Sätze die Trisection des Winkels gegründet. Macht man in Fig. 78. die Li-

nien DB, BC, CA, AE, EF, u. s. f. einander gleich; so ist ∠CBA = 2D, ∠ACE = ∠D + ∠BAC = 3D, ∠EAF = ∠D + ∠AEC = 4D, u. s. f., welches als eine Erweiterung des Satzes anzusehen ist.

10. Ein mechanisches Verfahren, die Linie BE (Fig. 76.) nach der Vorschrift (8.) zu ziehen, läßt sich leicht ausdenken. Wie man sich eines bloßen Lineals bedient, zeigt Montucla T. I. p. 177. Ein eignes Instrument hat der Jesuit Thomas Ceva erdacht. T. Cevae e. S. J. Instrumentum pro sectione cujuscunque anguli rectilinei in partes quotcunque aequales. Mediol. 1695; abgedruckt Act. Erud. 165. p. 290 — 294. T. Cevae S. J. Opuscula mathematica. Mediol. 1699. Act Erud. Suppl. T. III. 1749. p. 368., wo Mehreres über unsere Aufgabe vorkommt. Das Instrument zur Trisection besteht aus vier Linealen, die einen Rhombus abcd (Fig. 79.) bilden, und um a, b, c, d beweglich sind. Soll ∠gdh trisecirt werden, so nehme man gd = dh = ab = ac = bd = cd, befestige des Instruments Mittelpunkt mit einer Spitze in d, und bewege die Lineale so lange, bis sie durch g und h gehen, so ist nach (8.) $x = \frac{1}{3}z$; $y = \frac{1}{3}v$, ∠bac = $\frac{1}{3}$∠gdh. Das Instrument zur Multisection s. m. l. c.; ein anderes Instrument in De l'Hospital Tractatus de sect. con. I. 10. Prop. 6. Dergleichen Instrumente sind von keinem praktischen Nutzen.

11. Von zwei andern elementaren Auflösungen ertheilt Kästner Nachricht in den geom. Samml. I. N. 33. 34. Die eine findet sich in Albrecht Dürers Underweysung der messung mit dem zirkel unn richtscheyt. 1525. fol., ist aber nach Kästners Urtheile unrichtig. Die andere rührt von Campanus (Transalpinus Gallus. M. s. auch Kästners G. d. M. I. S. 297. 305.) her, findet sich am Ende des vierten Buchs von Ratdolts Ausgabe des Euclid (Venetiis. 1482.), und führt die Trisection auf folgende ebenfalls nicht rein geometrisch auflösbare Aufgabe zurück. (Gilbert a. a. O. S. 180. 181.). Wenn ACB (Fig. 80.) der gegebene Winkel, und CD auf dem

Durchmesser BE senkrecht ist, die Sehne AF so zu ziehen, daß GF dem Halbmesser gleich ist. Dann ist Bog. EF $=$ $\frac{1}{3}$ Bog. AB. Zieht man nämlich CF, so ist, wegen CF $= FG$, $x = y$, $z = 2(R - x)$, d. i. $z = 2q$. Aber $y = v + w = x$, $x - w = v$, $p + w = R = x + q$, $p = x + q - w = v + q = z + q = 3q$, $q = \frac{1}{3}p$.

12. Wlochatius elementar.-geom. Aufl. des delischen Problems, der Aufgabe vom Dreischnitt des Winkels u. s. f. Königsberg. 1804. ist ein merkwürdiges Beispiel geometrischen Unsinns. Der ganzen Untersuchung liegt folgender Satz zum Grunde: Wenn man (Fig. 81.) von A durch D eine Linie nach M zieht, so wird der Halbkreis ADB von MQ in E so geschnitten, daß BE der dritte Theil dieses Halbkreises ist. Falsch! Denn wäre BE $= \frac{1}{3}\pi = 60^0$, also DE $= 30^0$; so wäre $x = 15^0$, $z = 45^0 = x + y$, $y = 30^0$. Aber

$$\sin x : \sin y = DM : DQ,$$
$$\sin 15^0 : \sin 30^0 = \sin 15^0 : 2\sin 15^0 . \cos 15^0$$
$$= 1 : 2\cos 15^0 = DM : DQ = 1 : 2.$$

Also $2\cos 15^0 = 2$, $\cos 15^0 = 1$, welches ungereimt ist. Eben so falsch sind alle übrigen Sätze.

Noch gehört von neuern Versuchen hierher: Essai sur la trisection de l'angle par Pierre Petit de Dreux, dit le Polygoniste. 8., welches ich aber nicht habe zu sehen bekommen können. Ueber die Theilung eines Bogens von L. Rössel. Oldenburg. 1815.

13. Durch Näherung kann man $\frac{1}{3}$AB (Fig. 82.) $= \frac{1}{3}\alpha$ auf folgende Art finden. Man nehme Aa $= \frac{1}{4}\alpha$, ab $= \frac{1}{4}$Aa $= \frac{1}{4^2}\alpha$, bc $= \frac{1}{4}$ab $= \frac{1}{4^3}\alpha$, cd $= \frac{1}{4}$bc $= \frac{1}{4^4}\alpha$, u. s. f.; so ist, dies ins Unendliche fortgesetzt, der ganze erhaltene Bogen

$$= (\tfrac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots)\alpha$$
$$= \tfrac{1}{4} . \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} . \alpha = \tfrac{1}{3}\alpha.$$

Bricht man die Reihe mit dem nten Gliede ab; so ist der Fehler

$$= \frac{1}{4^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right)\alpha$$

$$= \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4}{3}\alpha = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\alpha,$$

welches für $n = 4$ nur $\frac{1}{768}$ beträgt. Geometrie von Paucker. Königsberg. 1823. S. 293.

Der rechte Winkel ABC (Fig. 82ª.) wird leicht in drei gleiche Theile getheilt, wenn man über BC ein gleichseitiges Dreieck beschreibt, so wie auch über CD, und BE zieht, weil offenbar $y + z = \frac{2}{3}R$, $y = z = \frac{1}{3}R$; also auch $x = \frac{1}{3}R$.

14. Wir geben nun noch von einigen nicht elementargeometrischen Auflösungen Nachricht.

Die Hyperbel hat zuerst Pappus zur Auflösung anzuwenden gelehrt. Andere haben sich der Parabel bedient. De la Chapelle Abh. v. d. Kegelschnitten. A. d. F. v. Böckmann. Carlsruhe. 1771. S. 243.

Nicomedes erdachte, wie zur Auflösung des delischen Problems, auch zur Trisection des Winkels die Conchoide. Seine Schrift ist verloren gegangen. Thl. I. S. 531. Clavius (Geometria practica. Lugd. 1607. 4. p. 356.) lehrt folgendes Verfahren. Wenn ABC (Fig. 83.) der gegebene Winkel ist, so fälle man von dem willkührlichen Punkte A in AB auf BC das Perpendikel AD, nehme DC = 2AB, und beschreibe aus B als Pol mit AD als Basis und dem Intervall DC die obere Conchoide CE (S. diesen Artikel), ziehe AE mit BC parallel; so ist, wenn man noch BE zieht, der Winkel CBE = $\frac{1}{3}$ABC. Denn nach der Natur der Conchoide ist CD = FE = 2AB. Halbirt man nun FE in G, und zieht AG; so ist, weil FAE = 90°, FG = GE = AG = AB. Also $x = y$, $p = q$, $y = 2q = x$, $q = z$, $x = 2z$, $z = \frac{1}{3}$ABC. Ist der gegebene Winkel stumpf, so theile man die Hälfte in drei gleiche Theile, und nehme dieser Theile zwei. Uebrigens wird, welches Clavius nicht erwähnt, der stumpfe Nebenwinkel ABC′ (Fig. 84.) durch die untere Conchoide trisecirt. Ist nämlich C′E′ die untere Conchoide, so ist E′F′ = C′D = 2AB. Also, wenn man

E'F' in G halbirt, und AG zieht, E'G = GA = GF' = AB; folglich t = u, v = w, t = 2v = u, v = r, u = 2r. Also r = $\frac{1}{3}$ABC'.

Dinostratus, des Menächmus Bruder, erdachte zur Theilung eines Winkels nach einem gegebenen Verhältnisse die Quadratrix. Montucla. I. p. 180. Kästner geom. Samml. II. S. 240. — Thl. II. S. 319. dieses Wörterbuchs. Montucla (T. I. p. 181.) vermuthet, daß ein gewisser Hippias von Elis die Quadratrix erfunden, und Dinostratus sie nur zur Quadratur des Kreises gebraucht habe, welches aber nach Reimer (Bossuts Gesch. d. Math. A. d. F. von Reimer. I. Hamb. 1804. S. 76.) ganz ohne Grund ist. Zu bedauern ist, daß Reimer seinen Vorsatz (Hist. problematis de cubi duplicatione. Gott. 1798. p. XI.), auch die Geschichte des Problems von der Trisection des Winkels zu schreiben, nicht zur Ausführung gebracht hat. Wir würden dann einen sehr guten Beitrag mehr zur Geschichte der Mathematik besitzen. Ueber die Entstehung der Quadratrix s. m. diesen Art. Sehr ausführlich ist sie auch untersucht in Clavii Geom. pract. p. 320., und in dessen Euclid (Coloniae. 1591. fol. T. I. p. 349.). Soll der Bogen AD (Fig. 85.), welcher $< 90^0$, nach dem Verhältnisse a : b getheilt werden, so beschreibe man mit dem Radius BC die Quadratrix BE, und ziehe CD, welche die Quadratrix in F schneidet. Dann ziehe man FG mit AC parallel, und theile CG in H so, daß GH : CH = a : b. Zieht man nun HL mit AC parallel, welche die Quadratrix in L schneidet, und hierauf CLM; so ist MD : AM = a : b. Denn nach der Natur der Quadratrix (S. diesen Art. 1.) ist

$$AB : BD = BC : BG,$$
$$AB : AB - BD = BC : BC - BG,$$
$$AB : BC = AD : CG.$$
$$AB : BM = BC : BH,$$
$$AB : AB - BM = BC : BC - BH,$$
$$AB : BC = AM : CH.$$
$$AD : CG = AM : CH,$$
$$AD - AM : AM = CG - CH : CH,$$
$$MD : AM = GH : CH.$$

Also nach dem Obigen

$$MD : AM = a : b.$$

Soll der ganze Quadrant nach demselben Verhältnisse getheilt werden; so mache man (Fig. 86.) $BD : CD = a : b$, ziehe GD mit AC parallel, und ziehe CFH; so ist $BH : AH = a : b$, welches wie vorher bewiesen wird.

Soll ein Bogen, welcher $> 90^0$ ist, nach diesem Verhältnisse getheilt werden; so nenne man diesen Bogen A und Q den Quadranten. Nun theile man $A - Q$ in die Theile A', A'', so daß $A' : A'' = a : b$. Eben so theile man Q in Q' und Q'', so daß $Q' : Q'' = a : b$. Dann ist $A' : A'' = Q' : Q''$, $A' + Q' : A'' + Q'' = A' : A'' = a : b$. Aber $(A' + Q') + (A'' + Q'') = (A' + A'') + (Q' + Q'') = A - Q + Q = A$. Also ist A in die Theile $A' + Q'$ und $A'' + Q''$ nach dem Verhältnisse $a : b$ getheilt.

Der von ihm so genannten Ophiuride oder Schlangenlinie bedient sich Uhlhorn in seinen Entdeckungen in der höhern Geometrie, theoretisch und prakt. abgehandelt ꝛc. Oldenburg. 1809. 4. Mehrere geometrische Auflösungen s. m. auch in Pappi Coll. math. L. IV. Prop. 31 sqq.

Dergleichen Theilungen sind indeß nie von praktischem Nutzen, sondern nur als Anwendungen der Theorie der Curven zu betrachten.

Trochoidalis Leibnitii ist eine Curve, welche von einem festen Punkte auf der Ebene eines Kreises oder einer andern Linie beschrieben wird, indem diese Linie sich auf einer geraden Linie oder einem Kreise fortwälzt, und also der Bogen der bewegten Linie von dem ersten Berührungspunkte bis zu irgend einem dem Wege auf der festen Linie gleich ist. Demnach nur eine Verallgemeinerung des Begriffs der Cycloide und Epicycloide.

Trochoides, s. Cycloide.

Trochois, eine andere Benennung der Cycloide.

Truncatus, abgestumpft, wird von Kegeln und Pyramiden gebraucht, welche von einer mit der Grundfläche parallelen Ebene durchschnitten sind.

Turbo, heißt zuweilen ein unten spitzer und oben breiter Körper, wie z. B. umgekehrte Kegel und Pyramiden. Indeß ist dieses Kunstwort ungewöhnlich und unnütz.

U.

Ueberkörperliche Aufgabe, (problema sursolidum), s. Aufgabe. Thl. I. S. 227.

Ueberrest, gleichbedeutend mit Rest.

Ueberschießende Zahl, s. Abundans numerus.

Ueberschuß, (excessus) ist die Größe, um welche eine Größe größer ist als eine andere, und folglich im Allgemeinen gleichbedeutend mit Differenz oder Unterschied. Ist $A = B + U$; so ist U der Ueberschuß von A über B.

Umbildung, s. Umformung.

Umbilicus, ist dasselbe, was sonst Brennpunkt oder Focus einer krummen Linie genannt wird; s. diese Artikel.

Umdrehung in der Geometrie, s. überhaupt den Artikel Bewegung, und vorzüglich Thl. I. S. 299.

Umfang ist bei ebenen geradlinigen Figuren die Gesammtheit aller ihrer Seiten, indem man dieselben gewissermaßen nur als Theile einer einzigen gebrochenen Linie, eines einzigen stetigen Zuges, welcher die gegebene Figur umgiebt, betrachtet. Eben so bedeutet bei geschlossenen krummlinigen Figuren, wie z. B. dem Kreise, der Ellipse, das Wort Umfang die ganze krumme Linie, von welcher

die Figur eingeschlossen wird. S. auch Perimeter und Peripherie.

Umfangswinkel ist bei ebenen geradlinigen Figuren jeder von zwei zusammenstoßende Seiten am Umfange gebildeter Winkel; beim Kreise ist es ein Winkel im Kreise, dessen Spitze in der Peripherie des Kreises liegt, und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind. Gewöhnlicher ist im letztern Falle der Ausdruck Peripheriewinkel.

Umformung, Transformation, Umwandlung, Umbildung einer Function oder Gleichung ist dasselbe, was in den Artikeln Function (16.) und Gleichung (203.) Verwandlung der Functionen und Gleichungen genannt worden ist. S. diese Artikel.

Umformung, Transformation, Umwandlung, Umbildung einer Reihe heißt jede Veränderung ihres Fortschreitungs-Gesetzes, d. h. ihrer Form oder Gestalt, wodurch ihre Summe nicht geändert wird. Zweck und Methode der Transformation sind so verschieden, daß sie sich nicht unter allgemeine Gesichtspunkte fassen lassen. Indeß muß man zwischen Reihen, die nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten, und Reihen, bei denen dies nicht der Fall ist, unterscheiden. Letztere lassen sich nur durch gewisse unmittelbare Verwandlungen ihrer Glieder, vorzüglich Zerlegungen in Theile, transformiren, bei erstern dagegen ist die Einführung einer neuen Hauptgröße, Transformation durch Substitution, oft von großem Nutzen. Wir werden von beiden einige Beispiele geben. Gewöhnlich sucht man Reihen durch Umformung convergenter zu machen, wodurch sie zu numerischen Berechnungen geschickter werden, oft aber führt auch eine schickliche Umformung zur Summirung der Reihe. Die gegebene Reihe soll im Folgenden immer durch S bezeichnet werden.

$$1.\ S = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots$$

Setzt man successive

$$a + nb = a + b + (n-1)b = a + 2b + (n-2)b$$
$$= a + 3b + (n-3)b = \quad \text{u. s. f.}$$

so erhält man leicht:

$$\frac{1}{a+nb} = \frac{1}{a} - \frac{nb}{a(a+nb)} =$$
$$\frac{1}{a} - \frac{nb}{a(a+b)} + \frac{nb.(n-1)b}{a(a+b)(a+nb)} =$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$\frac{1}{a} - \frac{nb}{a(a+b)} + \frac{nb.(n-1)b}{a(a+b)(a+2b)} - \frac{nb.(n-1)b.(n-2)b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)} + ..$$
$$\pm \frac{nb.(n-1)b\ldots 2b.b}{a(a+b)(a+2b)..(a+nb)}.$$

Hieraus erhält man für die einzelnen Glieder unserer Reihe folgende Ausdrücke:

$$\frac{1}{a}$$
$$-\frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+b)},$$
$$\frac{1}{a} - \frac{2b}{a(a+b)} + \frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}$$
$$-\frac{1}{a} + \frac{3b}{a(a+b)} - \frac{2b.3b}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Folglich durch Addition der einzelnen Vertikalreihen:

$$S = \frac{1}{a}(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots)$$
$$+ \frac{b}{a(a+b)}(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots)$$
$$+ \frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}(1 - 3 + 6 - 10 + \ldots)$$
$$+ \frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}(1-4+10-\ldots)+\ldots\ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}.\frac{1}{a} + \tfrac{1}{4}.\frac{b}{a(a+b)} + \tfrac{1}{8}.\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}$$
$$+ \tfrac{1}{16}.\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)} + \ldots$$

nach dem Binomischen Lehrsatze, da z. B. $1 - 3 + 6 - 10 + .. = (1+1)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$ ist.

Die transformirte Reihe convergirt offenbar stärker als die gegebene.

2. Addirt man die Diagonalreihen; so erhält man

$$S = \frac{1}{a}\left\{1 + \frac{b}{a+b} + \frac{b.2b}{(a+b)(a+2b)} + \ldots\right\}$$
$$- \frac{1}{a}\left\{1 + \frac{2b}{a+b} + \frac{2b.3b}{(a+b)(a+2b)} + \ldots\right\}$$
$$+ \frac{1}{a}\left\{1 + \frac{3b}{a+b} + \frac{3b.4b}{(a+b)(a+2b)} + \ldots\right\} - \ldots$$
$$= \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-2b} + \frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a-4b} + \ldots,$$

wie aus Summirung der Reihen (97.) folgt, wenn man $p = \frac{a}{b} + 1$, $h = 1, 2, 3$, rc. setzt. M. s. auch nachher (10.)

3. Es ist folglich die ganze Summe

$$-\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-2b} - \frac{1}{a-3b}$$
$$+ \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots = 0.$$

4. Zerlegt man jedes Glied der Reihe

$$S = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \frac{1}{(a+4b)(a+5b)} + \ldots$$

in zwei Theile, von denen der zweite negativ ist; so erhält man leicht:

$$S = \frac{1}{b}\left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+4b} - \frac{1}{a+5b} + \ldots\right\}$$
$$= \frac{1}{2b}\left\{\frac{1}{a} + \tfrac{1}{2}.\frac{b}{a(a+b)} + \tfrac{1}{4}.\frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)} + \tfrac{1}{8}.\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)} + \ldots\right\}$$

5. Für $\frac{a}{b} = n$ erhält man:

$$S = \frac{1}{2ab}\left\{1 + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{n+1} + \tfrac{1}{4}.\frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \tfrac{1}{8}.\frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right\}$$

woraus, weil

$$\tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{4} = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4},$$
$$\tfrac{1}{8} = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8},$$
rc. rc.

ist, die eingeklammerte Reihe =

$$1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots$$
$$- \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right\}$$
$$- \tfrac{1}{4}\left\{\frac{1.2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right\}$$
$$- \tfrac{1}{8}\left\{\frac{1.2.3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right\} - \ldots$$
$$= \frac{n}{n-1} - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{n-1} - \tfrac{1}{4}.\frac{1.2}{(n-1)(n+1)}$$
$$- \tfrac{1}{8}.\frac{1.2.3}{(n-1)(n+1)(n+2)} - \ldots$$

(Summirung der Reihen. 97.)

Also S =

$$\frac{1}{2b(a-b)}\left\{1 - \tfrac{1}{2}.\frac{b}{a} - \tfrac{1}{4}.\frac{b.2b}{a(a+b)} - \tfrac{1}{8}.\frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)} - \ldots\right\}$$

6. Nimmt man zwischen den beiden durch die Transformation erhaltenen Reihen (4. 5.) das arithmetische Mittel; so ergiebt sich die neue Transformation:

$$\frac{1}{4b}\left\{\frac{2a-b}{(a-b)a} - \tfrac{1}{2}.\frac{b.2b}{(a-b)a(a+b)} - \tfrac{1}{4}.\frac{b.2b.3b}{(a-b)a(a+b)(a+2b)} - \ldots\right\}$$

7. Mehrere Beispiele dieser Art beizubringen, erlaubt hier der Raum nicht. Wenden wir uns daher zu der Transformation der nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreitenden Reihen.

Stirling (Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum. Lond. 1730. p. 6. sqq.) lehrt jede Reihe von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

auf die Form

$$A_1 + B_1x + C_1x(x-1) + D_1x(x-1)(x-2) + \ldots$$

zu bringen. Sey nämlich überhaupt

$$\begin{aligned} x^n = {} & \overset{1}{A}_n x \\ & + \overset{2}{A}_n x(x-1) \\ & + \overset{3}{A}_n x(x-1)(x-2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \overset{n}{A}_n x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1); \end{aligned}$$

so erhält man leicht:

$$\begin{aligned} x^{n+1} = \; & \overset{1}{A}_n x^2 \\ & + \overset{2}{A}_n x^2 (x-1) \\ & + \overset{3}{A}_n x^2 (x-1)(x-2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \overset{n}{A}_n x^2 (x-1)(x-2)\ldots(x-n+1). \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} x^2 &= x + x(x-1), \\ x^2(x-1) &= x(x-1) + x(x-1)^2 \\ &= x(x-1) + x(x-1) + x(x-1)(x-2) \\ &= 2x(x-1) + x(x-1)(x-2), \\ x^2(x-1)(x-2) &= 2x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)^2 \\ &= 2x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3) \\ &= 3x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3), \end{aligned}$$

wo das Gesetz, und die Art weiter zu gehen, schon deutlich erhellet. Also

$$\begin{aligned} x^{n+1} = \; & \overset{1}{A}_n \{x + x(x-1)\} \\ & + \overset{2}{A}_n \{2x(x-1) + x(x-1)(x-2)\} \\ & + \overset{3}{A}_n \{3x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)\} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \overset{n}{A}_n \{nx(x-1)..(x-n+1) + x(x-1)..(x-n)\} \\ = \; & \overset{1}{A}_n x + \{\overset{1}{A}_n + 2\overset{2}{A}_n\} x(x-1) \\ & + \{\overset{2}{A}_n + 3\overset{3}{A}_n\} x(x-1)(x-2) \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \{\overset{n-1}{A}_n + n\overset{n}{A}_n\} x(x-1)..(x-n+1) \\ & + \overset{n}{A}_n x(x-1)..(x-n) \\ = \; & \overset{1}{A}_{n+1} x + \overset{2}{A}_{n+1} x(x-1) \\ & + \overset{3}{A}_{n+1} x(x-1)(x-2) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \overset{n+1}{A}_{n+1} x(x-1)(x-2)..(x-n); \end{aligned}$$

so daß also unser obiges Gesetz auch für x^{n+1} gilt, und folglich allgemein ist, da es offenbar für x gilt. Zugleich erhält man folgende Gleichungen für die Coefficienten:

$$\begin{aligned} \overset{1}{A}_{n+1} &= \overset{1}{A}_n, \\ \overset{2}{A}_{n+1} &= \overset{1}{A}_n + 2\overset{2}{A}_n, \end{aligned}$$

$$\overset{3}{A}_{n+1} = \overset{2}{A}_n + 3\overset{3}{A}_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{n}{A}_{n+1} = \overset{n-1}{A}_n + n\overset{n}{A}_n,$$

$$\overset{n+1}{A}_{n+1} = \overset{n}{A}_n.$$

Mit Hülfe dieser Relationen construirt man, da offenbar immer $\overset{1}{A}_n = 1$ ist, leicht folgende Tafel, wo die Coefficienten der einzelnen Potenzen in den Vertikalreihen stehen:

1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	3	7	15	31	63	127	255
		1	6	25	90	301	966	3025
			1	10	65	350	1701	7770
				1	15	140	1050	6951
					1	21	266	2646
						1	28	461
							1	36
								1

Die Construction der Tafel ist leicht. So ist z. B. $1050 = 350 + 5.140$, $266 = 140 + 6.21$, $28 = 21 + 7.1$, $1 = 1$.

8. Eben so leicht erhellet auch der Gebrauch der Tafel. Man verwandelt mittelst derselben nämlich jede einzelne Potenz von x in die vorgeschriebene Form, setzt die erhaltenen Ausdrücke in die gegebene Reihe, und vereinigt die ähnlichen Glieder. Für den endlichen Ausdruck $2x^3 - 11x^2 - 12x$ ist z. B.

$$-12x = -12x; \; -11x^2 = -11x - 11x(x-1),$$

$$2x^3 = 2x + 6x(x-1) + 2x(x-1)(x-2).$$

Also der gegebene Ausdruck =

$$-21x - 5x(x-1) + 2x(x-1)(x-2).$$

Bei unendlichen Reihen werden hier freilich die Coefficienten selbst unendliche Reihen, die sich aber zuweilen summiren lassen.

9. Um hiervon ein Beispiel zu geben, setze man

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)\ldots(z-n)} =$$

$$\overset{n}{B}_1 \cdot \frac{1}{z^n} + \overset{n}{B}_2 \cdot \frac{1}{z^{n+1}} + \overset{n}{B}_3 \cdot \frac{1}{z^{n+2}} + \ldots$$

$$= (z - n - 1) \cdot \frac{1}{(z-1)(z-2)\ldots(z-n-1)}$$

$$= (z-n-1)\left\{\overset{n+1}{B}_1 \cdot \frac{1}{z^{n+1}} + \overset{n+1}{B}_2 \cdot \frac{1}{z^{n+2}} + \overset{n+1}{B}_3 \cdot \frac{1}{z^{n+3}} + \ldots\right\}$$

so erhält man, wenn dieses Product nach den negativen Potenzen von z entwickelt wird, leicht:

$$\overset{n+1}{B}_1 = \overset{n}{B}_1$$
$$\overset{n+1}{B}_2 = \overset{n}{B}_2 + (n+1)\overset{n+1}{B}_1,$$
$$\overset{n+1}{B}_3 = \overset{n}{B}_3 + (n+1)\overset{n+1}{B}_2,$$
$$\overset{n+1}{B}_4 = \overset{n}{B}_4 + (n+1)\overset{n+1}{B}_3;$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

d. i. allgemein

$$\overset{n+1}{B}_k = \overset{n}{B}_k + (n+1)\overset{n+1}{B}_{k-1}$$

Folglich, da, wegen

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots,$$

$\overset{1}{B}_k = 1$ ist:

$$\overset{1}{B}_{n+1} = \overset{1}{B}_n,$$
$$\overset{2}{B}_n = \overset{1}{B}_n + 2\overset{2}{B}_{n-1},$$
$$\overset{3}{B}_{n-1} = \overset{2}{B}_{n-1} + 3\overset{3}{B}_{n-2},$$
$$\overset{4}{B}_{n-2} = \overset{3}{B}_{n-2} + 4\overset{4}{B}_{n-3},$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Wäre es nun richtig, daß die Reihen

$$\overset{1}{B}_n, \overset{2}{B}_{n-1}, \overset{3}{B}_{n-2}, \overset{4}{B}_{n-3}, \ldots$$
$$\overset{1}{A}_n, \overset{2}{A}_n, \overset{3}{A}_n, \overset{4}{A}_n, \ldots$$

identisch wären; so würde dies offenbar auch von den Reihen

$$\overset{1}{B}_{n+1}, \overset{2}{B}_n, \overset{3}{B}_{n-1}, \overset{4}{B}_{n-2}, \ldots$$

$$\overset{1}{A}_{n+1}, \overset{2}{A}_{n+1}, \overset{3}{A}_{n+1}, \overset{4}{A}_{n+1}, \ldots$$

gelten, welches augenblicklich erhellet, wenn man die vorhergehenden Gleichungen für die durch B bezeichneten Größen mit den Gleichungen für die durch A bezeichneten Größen in (7.) vergleicht. Es ist aber $\overset{1}{B}_1 = 1$, $\overset{1}{A}_1 = 1$,

so daß also die Identität der beiden Reihen für $n = 1$ gilt, und folglich allgemein ist. Dies giebt die Gleichung:

$$\overset{k}{A}_n = \overset{k}{B}_{n-k+1}.$$

10. Sey nun

$$S = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \frac{x^3}{z^3} + \ldots$$

die umzuformende Reihe; so hat man nach (7.)

$$S = 1 + x.\frac{1}{z} + \left\{\overset{1}{A}_2 x + \overset{2}{A}_2 x(x-1)\right\}.\frac{1}{z^2}$$
$$+ \left\{\overset{1}{A}_3 x + \overset{2}{A}_3 x(x-1) + \overset{3}{A}_3 x(x-1)(x-2)\right\}.\frac{1}{z^3} + \ldots$$

und folglich nach (9.)

$$S = 1 + x.\frac{1}{z} + \left\{\overset{1}{B}_2 x + \overset{2}{B}_1 x(x-1)\right\}.\frac{1}{z^2}$$
$$+ \left\{\overset{1}{B}_3 x + \overset{2}{B}_2 x(x-1) + \overset{3}{B}_1 x(x-1)(x-2)\right\}.\frac{1}{z^3} + \ldots$$
$$= 1 + x\left\{\overset{1}{B}_1\frac{1}{z} + \overset{1}{B}_2\frac{1}{z^2} + \overset{1}{B}_3\frac{1}{z^3} + \ldots\right\}$$
$$+ x(x-1)\left\{\overset{2}{B}_1\frac{1}{z^2} + \overset{2}{B}_2\frac{1}{z^3} + \overset{2}{B}_3\frac{1}{z^4} + \ldots\right\}$$
$$+ x(x-1)(x-2)\left\{\overset{3}{B}_1\frac{1}{z^3} + \overset{3}{B}_2\frac{1}{z^4} + \ldots\right\} + \ldots.$$
$$= 1 + \frac{x}{z-1} + \frac{x(x-1)}{(z-1)(z-2)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{(z-1)(z-2)(z-3)} + \ldots \quad (9.)$$

Nach dem Binomialtheorem ist aber die gegebene Reihe

$$= \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{-1} = \frac{z}{z-x}.$$

Also hat man, wenn zugleich z statt $z - 1$ gesetzt wird:

$$\frac{z+1}{z-x+1} = 1 + \frac{x}{z} + \frac{x(x-1)}{z(z-1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{z(z-1)(z-2)} + \ldots$$

V. Summirung des Reihen. (97.). Es ist dies zugleich ein Beispiel, wo eine Transformation zu einer Summation führt.

11. Stirling lehrt a. a. O. p. 9. ferner die Verwandlung der Reihe

$$A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \ldots$$

in eine Reihe von der Form

$$A_1 + \frac{B_1}{x} + \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{D_1}{x(x+1)(x+2)} + \ldots$$

Hierzu gelangt man auf folgende Art. Nimmt man in der in (10.) summirten Reihe x und z negativ, setzt sodann $x = n$, $z = x + n + 1$, und dividirt auf beiden Seiten durch $x(x+1)\ldots(x+n)$; so erhält man:

$$\frac{1}{x^2(x+1)..(x+n-1)} = \frac{1}{x(x+1)..(x+n)}$$
$$+ \frac{n}{x(x+1)..(x+n+1)} + \frac{n(n+1)}{x(x+1)..(x+n+2)} + \ldots$$

Setzt man nun

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\overset{1}{A}_{-n}}{x(x+1)..(x+n-1)} + \frac{\overset{2}{A}_{-n}}{x(x+1)..(x+n)}$$
$$+ \frac{\overset{3}{A}_{-n}}{x(x+1)..(x+n+1)} + \ldots,$$

dividirt auf beiden Seiten durch x, zerlegt die Glieder auf der rechten Seite auf die obige Art, und ordnet gehörig; so erhält man für die Zähler von $\frac{1}{x^{n+1}}$ leicht folgende Gleichungen:

$$\overset{1}{A}_{-(n+1)} = \overset{1}{A}_{-n}$$
$$\overset{2}{A}_{-(n+1)} = n\overset{1}{A}_{-n} + \overset{2}{A}_{-n}$$
$$\overset{3}{A}_{-(n+1)} = n(n+1)\overset{1}{A}_{-n} + (n+1)\overset{2}{A}_{-n} + \overset{3}{A}_{-n}$$
$$\overset{4}{A}_{-(n+1)} = n(n+1)(n+2)\overset{1}{A}_{-n} + (n+1)(n+2)\overset{2}{A}_{-n} + (n+2)\overset{3}{A}_{-n} + \overset{4}{A}_{-n}$$

ꝛc. ꝛc.

oder auch:

$$\overset{1}{A}_{-(n+1)} = \overset{1}{A}_{-n}$$
$$\overset{2}{A}_{-(n+1)} = n\overset{1}{A}_{-(n+1)} + \overset{2}{A}_{-n}$$
$$\overset{3}{A}_{-(n+1)} = (n+1)\overset{2}{A}_{-(n+1)} + \overset{3}{A}_{-n}$$
$$\overset{4}{A}_{-(n+1)} = (n+2)\overset{3}{A}_{-(n+1)} + \overset{4}{A}_{-n}$$

ꝛc. ꝛc.

Mittelst dieser Formeln berechnet man leicht folgende Tafel, wo die Zähler der einzelnen negativen Potenzen von x von der

zweiten an in den Vertikalreihen stehen. Für $n = 1$ sind die einzelnen Zähler von $\frac{1}{x^2}$, da $\overset{1}{\underset{-1}{A}} = 1$, $\overset{2}{\underset{-1}{A}} = 0$, $\overset{3}{\underset{-1}{A}} = 0$, ꝛc. ist:

$$1,\ 1,\ 1.2,\ 1.2.3,\ 1.2.3.4,\ \text{ꝛc.}$$

Also immer

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1.1}{x(x+1)(x+2)}$$
$$+ \frac{1.2}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)..(x+4)} + \ldots$$

1								
1	1							
2	3	1						
6	11	6	1					
24	50	35	10	1				
120	274	225	85	15	1			
720	1764	1624	735	175	21	1		
5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
40320	109584	105056	67284	22449	4536	546	36	1

Nach dieser Tafel erhält man

$$A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \ldots$$
$$= A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x(x+1)} + \frac{C+D}{x(x+1)(x+2)}$$
$$+ \frac{2C + 3D + E}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{6C + 11D + 6E + F}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$
$$+ \frac{24C + 50D + 35E + 10F + G}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$
$$+ \frac{120C + 274D + 225E + 85F + 15G + H}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)} + \ldots$$

eine sehr merkwürdige Transformation, so wie überhaupt Stirlings Werk sehr zum Studium zu empfehlen ist.

12. Setzt man

$$z(z+1)..(z+n-1) = \overset{-n}{B}_1 z + \overset{-n}{B}_2 z^2 + \overset{-n}{B}_3 z^3 + \ldots;$$

so erhält man nach einer ganz ähnlichen Schlußart wie in (9.), wenn man nur auf beiden Seiten mit $n + z$ multiplicirt, die Gleichungen:

$$\overset{-(n+1)}{B}_1 = n\overset{-n}{B}_1$$
$$\overset{-(n+1)}{B}_2 = n\overset{-n}{B}_2 + \overset{-n}{B}_1$$
$$\overset{-(n+1)}{B}_3 = n\overset{-n}{B}_3 + \overset{-n}{B}_2$$
$$\overset{-(n+1)}{B}_4 = n\overset{-n}{B}_4 + \overset{-n}{B}_3$$

ꝛc. ꝛc.

und die Relation:

$$\overset{k}{\underset{-n}{A}} = \overset{-(n+k-2)}{\underset{n-1}{B}} .$$

Man kann also wegen dieser Relation die vorige Tafel auch so construiren, daß man die Producte

$$z,\ z(z+1),\ z(z+1)(z+2),\ \ldots$$

entwickelt, und die Coefficienten der Potenzen von z in verkehrter Ordnung in die Horizontalreihen der Tafel schreibt.

13. Eine Transformation von sehr allgemeiner Anwendbarkeit lehrt Euler (Inst. Calc. diff. T. II. Cap. I.). Die gegebene Reihe sey

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

Setzt man $x = \frac{y}{1+y}$, und entwickelt die Potenzen von x nach Potenzen von y mittelst des Binomialtheorems; so erhält man leicht nach gehöriger Entwickelung

$$\begin{aligned} S = {} & ay \\ & - (a-b)y^2 \\ & + (a-2b+c)y^3 \\ & - (a-3b+3c-d)y^4 \\ & + (a-4b+6c-4d+e)y^5 - \ldots \end{aligned}$$

d. i. (Arithmetische Reihen höherer Ordnungen. 2.)

$$S = ay + \Delta a.y^2 + \Delta^2 a.y^3 + \Delta^3 a.y^4 + \ldots$$

$$= a\frac{x}{1-x} + \Delta a.\frac{x^2}{(1-x)^2} + \Delta^2 a.\frac{x^3}{(1-x)^3} + \ldots$$

Ist die Coefficientenreihe der gegebenen Reihe eine arithmetische Reihe höherer Ordnung; so werden die Differenzen irgend einmal = o; also bricht die transformirte Reihe irgend einmal ab, und die Transformation liefert die Summe der gegebenen Reihe.

So ist z. B. für die Reihe

$$S = x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \ldots$$

$$a = 1,\ \Delta a = 2,\ \Delta^2 a = \Delta^3 a = \Delta^4 a = \ldots = 0.$$

Also

$$S = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2}.$$

Eben so ist für

$$S = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \ldots$$

$$a = 1,\ \Delta a = 3,\ \Delta^2 a = 2,\ \Delta^3 a = \Delta^4 a = \ldots = 0.$$

Also

$$S = \frac{x}{1-x} + \frac{3x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3};$$

und für die Reihe

$$S = 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + 259x^6 + \ldots$$

ist $a = 4,\ \Delta a = 11,\ \Delta^2 a = 14,\ \Delta^3 a = 6,\ \Delta^4 a = .. = 0.$

Also

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11x^2}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{4x - x^2 + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x(1+x^2)(4-x)}{(1-x)^4}.$$

14. Aber auch Theile von Reihen lassen sich auf diese Art summiren. Es ist nämlich für

$$S = ax + bx^2 + \ldots + kx^n + px^{n+1} + \ldots$$

$$ax + bx^2 + \ldots + kx^n = S - x^n(px + qx^2 + rx^3 + \ldots)$$

$$= S - x^n\left(p\frac{x}{1-x} + \Delta p \cdot \frac{x^2}{(1-x)^2} + \ldots\right)$$

$$= (a - x^n p)\frac{x}{1-x} + (\Delta a - x^n \Delta p)\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$+ (\Delta^2 a - x^n \Delta^2 p)\frac{x^3}{(1-x)^3} + (\Delta^3 a - x^n \Delta^3 p)\frac{x^4}{(1-x)^4} + \ldots$$

Für

$$S = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n$$

ist

$$a = 1,\ \Delta a = 1,\ \Delta^2 a = \Delta^3 a = \ldots = 0;$$

$$p = n+1,\ \Delta p = 1,\ \Delta^2 p = \Delta^3 p = \ldots = 0.$$

Also

$$S = \left\{1 - (n+1)x^n\right\}\frac{x}{1-x} + (1 - x^n)\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

Für

$$S = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots + n^2x^n$$

ist

$$a = 1,\ \Delta a = 3,\ \Delta^2 a = 2,\ \Delta^3 a = \Delta^4 a = .. = 0;$$

$$p = (n+1)^2,\ \Delta p = 2n+3,\ \Delta^2 p = 2,\ \Delta^3 p = \Delta^4 p = \ldots = 0.$$

Also

$$S = \left\{1-(n+1)^2x^n\right\}\frac{x}{1-x} + \left\{3-(2n+3)x^n\right\}\frac{x^2}{(1-x)^2}$$
$$+ (2-2x^n)\frac{x^3}{(1-x)^3}$$
$$= \frac{x+x^2-(n+1)^2x^{n+1}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3};$$

und eben so in ähnlichen Fällen.

15. Setzt man $-x$ für x; so erhält man

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \ldots$$
$$= a\frac{x}{1+x} - \Delta a . \frac{x^2}{(1+x)^2} + \Delta^2 a . \frac{x^3}{(1+x)^3} - \ldots$$
$$ax - bx^2 + cx^3 - \ldots \mp kx^n =$$
$$(a \mp x^n p)\frac{x}{1+x} - (\Delta a \mp x^n \Delta p)\frac{x^2}{(1+x)^2}$$
$$+ (\Delta^2 a \mp x^n \Delta^2 p)\frac{x^3}{(1+x)^3} - (\Delta^3 a \mp x^n \Delta^3 p)\frac{x^4}{(1+x)^4} + \ldots$$

Also z. B.

$$a - b + c - d + e - \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\Delta a + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a - \tfrac{1}{16}\Delta^3 a + \ldots$$

Für die Reihe

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \ldots$$

findet Euler nach dieser Methode die Summe durch eine ziemlich lange Rechnung $= 0,40082038\ldots$, nur in den beiden ersten Decimalen genau, da das richtige Resultat $= 0,4036524077\ldots$, wie Euler auf anderm Wege gefunden.

Auf diese Weise erhält Euler auch

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \tfrac{1}{2},$$
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \ldots = \tfrac{1}{4},$$
$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 14 + \ldots = 0,$$
$$1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + 28 - 36 + \ldots = \tfrac{1}{8},$$
$$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + 49 - 64 + \ldots = 0,$$
$$1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \ldots = 0.$$

Oft kann man auch durch diese Transformation eine Reihe in eine andere verwandeln, die sich summiren läßt. So erhält man z. B. leicht

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} + \ldots$$

Letztere Reihe convergirt weit stärker als die gegebene Reihe,

und entspringt, wie leicht erhellet, aus der Verwandlung des Bruchs $\frac{1}{2+1}$ in eine Reihe, so daß also $S = \frac{1}{3}$. Die gegebene Reihe entspringt aus der Verwandlung von $\frac{1}{1+2}$ in eine Reihe.

Eben so erhält man

$$S = 1 - 2 + 5 - 12 + 29 - 70 + 169 - \ldots$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{8} - \tfrac{2}{16} + \tfrac{4}{32} - \tfrac{4}{64} + \tfrac{8}{128} - \ldots$$

Da sich je zwei auf einander folgende Glieder dieser Reihe, das erste ausgenommen, gegenseitig aufheben; so ist $S = \frac{1}{2}$.

Mehrere Beispiele s. m. bei Euler a. a. O.

16. Vorzüglich wichtig ist diese letztere Transformation, um Reihen eine größere Convergenz zu verschaffen. Die Reihe

$$\text{logn}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \ldots$$

wird durch diese Transformation:

$$\text{logn}(1+x) = \frac{x}{1+x}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots\right\}$$

$$\text{logn}\,2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{16} + \ldots$$

Setzt man

$$\text{Arctang}\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots$$
$$= \frac{1}{x}(x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{5}x^6 - \tfrac{1}{7}x^8 + \ldots)$$

so erhält man, wenn die Differenzen der Coefficienten berechnet werden:

$$\text{Arctang}\,x = \frac{x}{1+x^2}\left\{1 + \tfrac{2}{3}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \ldots\right\}$$

Von dieser Transformation habe ich ausführlich gehandelt in dem Programm: De transformatione seriei, qua arcus per tangentem trigonometricam exprimitur. Halae. 1826., worin ich sie, und eine noch allgemeinere, nebst verschiedenen andern Sätzen, aus ganz elementaren Principien ableite.

Da

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots,$$

so giebt unsere Transformation leicht:

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \tfrac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \ldots,$$

eine weit schneller convergirende Reihe.

17. Noch verallgemeinert hat Euler die vorige Umformung in den Inst. Calc. diff. T. II. Cap. VIII. §. 209. sqq. Sei z. B. die Reihe

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots$$

in eine Reihe von folgender Form zu verwandeln:

$$S = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \ldots;$$

so multiplicire man auf beiden Seiten mit $\alpha + \beta x$, wodurch man

$$A\alpha + \left.\begin{matrix} B\alpha \\ + A\beta \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} C\alpha \\ + B\beta \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} D\alpha \\ + C\beta \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

$$= \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha + \beta x)^3} + \ldots$$

erhält. Macht man nun $\mathfrak{A} = A\alpha$, und setzt

$$\begin{aligned} A\beta + B\alpha &= A' \\ B\beta + C\alpha &= B', \\ C\beta + D\alpha &= C', \\ D\beta + E\alpha &= D', \\ \text{ꝛc.} \quad & \quad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

so hat man

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \ldots$$

$$= \frac{\mathfrak{B}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{C}x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{\mathfrak{E}x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \ldots$$

woraus man wieder wie vorher $\mathfrak{B} = A'\alpha$, und

$$\begin{aligned} A'\beta + B'\alpha &= A'', \\ B'\beta + C'\alpha &= B'', \\ C'\beta + D'\alpha &= C'', \\ D'\beta + E'\alpha &= D'', \\ \text{ꝛc.} \quad & \quad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

so wie

$$A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + E''x^4 + \ldots,$$

$$= \frac{\mathfrak{C}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{D}x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{E}x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{\mathfrak{F}x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \ldots$$

erhält, u. s. w.

Also hat man zur Bestimmung von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, u. s. f. folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} = A\alpha;\ & A\beta + B\alpha = A', \\
& B\beta + C\alpha = B', \\
& C\beta + D\alpha = C', \\
& D\beta + E\alpha = D', \\
& \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} = A'\alpha;\ & A'\beta + B'\alpha = A'', \\
& B'\beta + C'\alpha = B'', \\
& C'\beta + D'\alpha = C'', \\
& D'\beta + C'\alpha = D'', \\
& \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C} = A''\alpha;\ & A''\beta + B''\alpha = A''', \\
& B''\beta + C''\alpha = B''', \\
& C''\beta + D''\alpha = C''', \\
& D''\beta + E''\alpha = D''', \\
& \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} = A'''\alpha;\ & A'''\beta + B'''\alpha = A'''', \\
& B'''\beta + C'''\alpha = B'''', \\
& C'''\beta + D'''\alpha = C'''', \\
& D'''\beta + E'''\alpha = D'''', \\
& \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Also

$$S = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A'\alpha x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{A''\alpha x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{A'''\alpha x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \ldots$$

Man nehme jetzt den Nenner dreitheilig an, und setze

$$\begin{aligned}
S &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots \\
&= \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} \\
&\quad + \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathfrak{A}'''x^6 + \mathfrak{B}'''x^7}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^4} + \ldots
\end{aligned}$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; so erhält man

$$A\alpha + \left.\begin{matrix} B\alpha \\ + A\beta \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} C\alpha \\ + B\beta \\ + A\gamma \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} D\alpha \\ + C\beta \\ + B\gamma \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

$$\begin{aligned}
= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \frac{\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x^3}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} \\
+ \frac{\mathfrak{A}'''x^6 + \mathfrak{B}'''x^7}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \ldots
\end{aligned}$$

Setzt man also

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = A\alpha,\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha;\ & A\gamma + B\beta + C\alpha = A', \\ & B\gamma + C\beta + D\alpha = B', \\ & C\gamma + D\beta + E\alpha = C', \\ & D\gamma + E\beta + F\alpha = D', \\ & \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

und dividirt durch x^2; so wird

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \ldots$$

$$= \frac{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}''x^2 + \mathfrak{B}''x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}'''x^4 + \mathfrak{B}'''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathfrak{A}''''x^6 + \mathfrak{B}''''x^7}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^4} + \ldots$$

wo man nun wieder ganz wie vorher verfahren kann. Bestimmt man daher $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{B}'''$, u. s. f. aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = A\alpha,\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha;\ & A\gamma + B\beta + C\alpha = A', \\ & B\gamma + C\beta + D\alpha = B', \\ & C\gamma + D\beta + E\alpha = C', \\ & D\gamma + E\beta + F\alpha = D', \\ & \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}' = A'\alpha,\ \mathfrak{B}' = A'\beta + B'\alpha;\ & A'\gamma + B'\beta + C'\alpha = A'', \\ & B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = B'', \\ & C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = C'', \\ & D'\gamma + E'\beta + F'\alpha = D'', \\ & \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'' = A''\alpha,\ \mathfrak{B}'' = A''\beta + B''\alpha;\ & A''\gamma + B''\beta + C''\alpha = A''', \\ & B''\gamma + C''\beta + D''\alpha = B''', \\ & C''\gamma + D''\beta + E''\alpha = C''', \\ & D''\gamma + E''\beta + F''\alpha = D''', \\ & \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

so wird

$$S = \frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\{A'\alpha + (A'\beta + B'\alpha)x\}x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}$$

$$+ \frac{\{A''\alpha + (A''\beta + B''\alpha)x\}x^4}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \ldots$$

Ist der Nenner viertheilig; so bestimme man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$, u. s. f. aus folgenden Gleichungen;

$$\mathfrak{A} = A\alpha,\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha,\ \mathfrak{C} = A\gamma + B\beta + C\alpha;$$
$$A\delta + B\gamma + C\beta + D\alpha = A',$$
$$B\delta + C\gamma + D\beta + E\alpha = B',$$
$$C\delta + D\gamma + E\beta + F\alpha = C',$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$\mathfrak{A}' = A'\alpha,\ \mathfrak{B}' = A'\beta + B'\alpha,\ \mathfrak{C}' = A'\gamma + B'\beta + C'\alpha;$$
$$A'\delta + B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = A'',$$
$$B'\delta + C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = B'',$$
$$C'\delta + D'\gamma + E'\beta + F'\alpha = C'',$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$\mathfrak{A}'' = A''\alpha,\ \mathfrak{B}'' = A''\beta + B''\alpha,\ \mathfrak{C}'' = A''\gamma + B''\beta + C''\alpha;$$
$$A''\delta + B''\gamma + C''\beta + D''\alpha = A''',$$
$$B''\delta + C''\gamma + D''\beta + E''\alpha = B''',$$
$$C''\delta + D''\gamma + E''\beta + F''\alpha = C''',$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

so wird

$$S = \frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x + (A\gamma + B\beta + C\alpha)x^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$$
$$+ \frac{\{A'\alpha + (A'\beta + B'\alpha)x + (A'\gamma + B'\beta + C'\alpha)x^2\}x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)^2}$$
$$+ \frac{\{A''\alpha + (A''\beta + B''\alpha)x + (A''\gamma + B''\beta + C''\alpha)x^2\}x^6}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)^3} + \ldots$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, fällt in die Augen. Für $x = 1$ wird, wenn der Nenner dreitheilig ist, $\alpha + \beta + \gamma = \varkappa$ gesetzt:

$$S = A + B + C + D + E + F + G + \ldots$$
$$= (\alpha + \beta)\left\{\frac{A}{\varkappa} + \frac{A'}{\varkappa^2} + \frac{A''}{\varkappa^3} + \frac{A'''}{\varkappa^4} + \frac{A''''}{\varkappa^5} + \ldots\right\}$$
$$+ \alpha\left\{\frac{B}{\varkappa} + \frac{B'}{\varkappa^2} + \frac{B''}{\varkappa^3} + \frac{B'''}{\varkappa^4} + \frac{B''''}{\varkappa^5} + \ldots\right\}.$$

Ist der Nenner viertheilig, und jetzt $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \varkappa$; so wird für $x = 1$:

$$S = (\alpha + \beta + \gamma)\left\{\frac{A}{\varkappa} + \frac{A'}{\varkappa^2} + \frac{A''}{\varkappa^3} + \frac{A'''}{\varkappa^4} + \ldots\right\}$$
$$+ (\alpha + \beta)\left\{\frac{B}{\varkappa} + \frac{B'}{\varkappa^2} + \frac{B''}{\varkappa_3} + \frac{B'''}{\varkappa^4} + \ldots\right\}$$
$$+ \alpha\left\{\frac{C}{\varkappa} + \frac{C'}{\varkappa^2} + \frac{C''}{\varkappa^3} + \frac{C'''}{\varkappa^4} + \ldots\right\}$$

und eben so in andern Fällen. Vorzüglich brauchbar ist diese Transformation überhaupt dann, wenn die gegebene

Reihe von irgend einem Gliede an eine wiederkehrende Reihe wird.

18. Auch folgende allgemeine Transformation ist merkwürdig, und kann in manchen Fällen von Nutzen seyn. Man setze nämlich

$$S = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$
$$= \frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)}$$
$$+ \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)} + \ldots$$

und multiplicire auf beiden Seiten mit $\alpha + \beta x$; so wird

$$\left.\begin{matrix} A\alpha + B\alpha \\ + A\beta \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + C\alpha \\ + B\beta \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + D\alpha \\ + C\beta \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$
$$= \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha' + \beta' x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)}$$
$$+ \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)(\alpha''' + \beta''' x)} + \ldots$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = A\alpha;\ A\beta + B\alpha &= A', \\ B\beta + C\alpha &= B', \\ C\beta + D\alpha &= C', \\ \text{rc.} \qquad & \text{rc.} \end{aligned}$$

und dividirt auf beiden Seiten mit x; so wird

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \ldots$$
$$= \frac{\mathfrak{B}}{\alpha' + \beta' x} + \frac{\mathfrak{C}x}{(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)}$$
$$+ \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)(\alpha''' + \beta''' x)} + \ldots$$

womit man nun wieder wie vorher verfahren kann.

Bestimmt man also $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, u. s. f. aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = A\alpha;\ A\beta + B\alpha &= A', \\ B\beta + C\alpha &= B', \\ C\beta + D\alpha &= C', \\ \text{rc.} \qquad & \text{rc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} = A'\alpha';\ A'\beta' + B'\alpha' &= A'', \\ B'\beta' + C'\alpha' &= B'', \\ C'\beta' + D'\alpha' &= C'', \\ \text{rc.} \qquad & \text{rc.} \end{aligned}$$

$$\mathfrak{C} = A''\alpha''; \; A''\beta'' + B''\alpha'' = A''',$$
$$B''\beta'' + C''\alpha'' = B''',$$
$$C''\beta'' + D''\alpha'' = C''',$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$\mathfrak{D} = A'''\alpha'''; \; A'''\beta''' + B'''\alpha''' = A'''',$$
$$B'''\beta''' + C'''\alpha''' = B'''',$$
$$C'''\beta''' + D'''\alpha''' = C'''',$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

so wird

$$S = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A'\alpha' x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)} + \frac{A''\alpha'' x^2}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)} + \ldots$$

α, β, α', β', α'', β'', u. s. f. sind ganz willkührlich, und können also immer so angenommen werden, daß die neue Reihe stark convergirt.

Setzt man $x = -1$; so ist

$$S = A - B + C - D + E - F + G - \ldots$$

und, wenn man

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \alpha'''' = \ldots = 1;$$
$$\beta = -1, \; \beta' = -2, \; \beta'' = -3, \; \beta''' = -4; \ldots;$$

setzt:

$$\mathfrak{A} = A; \; B - A = A',$$
$$C - B = B',$$
$$D - C = C',$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$\mathfrak{B} = A'; \; B' - 2A' = A'',$$
$$C' - 2B' = B'',$$
$$D' - 2C' = C'',$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$\mathfrak{C} = A''; \; B'' - 3A'' = A''',$$
$$C'' - 3B'' = B''',$$
$$D'' - 3C'' = C''',$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$\mathfrak{D} = A'''; \; B''' - 4A''' = A'''',$$
$$C''' - 4B''' = B'''',$$
$$D''' - 4C''' = C'''',$$
$$\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.}$$

und folglich

$$S = \frac{A}{2} - \frac{A'}{2.3} + \frac{A''}{2.3.4} - \frac{A'''}{2.3.4.5} + \frac{A''''}{2.3.4.5.6} - \ldots$$

Nimmt man die Factoren des Nenners dreitheilig an; so setze man

$$S = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)}$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2)} + \ldots$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; so erhält man:

$$A\alpha + \left.\begin{matrix} B\alpha \\ + A\beta \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} C\alpha \\ + B\beta \\ + A\gamma \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} D\alpha \\ + C\beta \\ + B\gamma \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

$$= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \frac{\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x^3}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2} + \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2)} + \ldots$$

und folglich, wenn man

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = A\alpha,\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha;\ & A\gamma + B\beta + C\alpha = A', \\ & B\gamma + C\beta + D\alpha = B', \\ & C\gamma + D\beta + E\alpha = C', \\ & \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

setzt, auf beiden Seiten zugleich mit x^2 dividirt:

$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \ldots$$
$$= \frac{\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'x}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2} + \frac{\mathfrak{A}''x^2 + \mathfrak{B}''x^3}{(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2)}$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}'''x^4 + B'''x^5}{(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2)(\alpha''' + \beta''' x + \gamma''' x^2)} + \ldots$$

womit man nun wieder wie vorher verfahren kann.

Setzt man also

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} = A\alpha,\ \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha;\ & A\gamma + B\beta + C\alpha = A', \\ & B\gamma + C\beta + D\alpha = B', \\ & C\gamma + D\beta + E\alpha = C', \\ & \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}' = A'\alpha',\ \mathfrak{B}' = A'\beta' + B'\alpha';\ & A'\gamma' + B'\beta' + C'\alpha' = A'', \\ & B'\gamma' + C'\beta' + D'\alpha' = B'', \\ & C'\gamma' + D'\beta' + E'\alpha' = C'', \\ & \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'' = A''\alpha'',\ \mathfrak{B}'' = A''\beta'' + B''\alpha'';\ & A''\gamma'' + B''\beta'' + C''\alpha'' = A''', \\ & B''\gamma'' + C''\beta'' + D''\alpha'' = B''', \\ & C''\gamma'' + D''\beta'' + E''\alpha'' = C''', \\ & \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

so wird

$$S = \frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\{A'\alpha' + (A'\beta' + B'\alpha')x\}x^2}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)}$$

$$+ \frac{\{A''\alpha'' + (A''\beta'' + B''\alpha'')x\}x^4}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2)(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' x^2)} + \ldots$$

und es erhellet, wie man auf diese Art weiter gehen kann, wenn die Factoren des Nenners drei=, vier=, oder mehrtheilig sind.

Für $x = 1$ und

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \varkappa, \\ \alpha' + \beta' + \gamma' &= \varkappa', \\ \alpha'' + \beta'' + \gamma'' &= \varkappa'', \\ \alpha''' + \beta''' + \gamma''' &= \varkappa''', \\ \text{ꝛc.} \quad & \quad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

erhält man hieraus

$$S = \frac{\alpha(A+B)}{\varkappa} + \frac{\alpha'(A'+B')}{\varkappa\varkappa'} + \frac{\alpha''(A''+B'')}{\varkappa\varkappa'\varkappa''} + \frac{\alpha'''(A'''+B''')}{\varkappa\varkappa'\varkappa''\varkappa'''} + \ldots$$

$$+ \frac{\beta A}{\varkappa} + \frac{\beta' A'}{\varkappa\varkappa'} + \frac{\beta'' A''}{\varkappa\varkappa'\varkappa''} + \frac{\beta''' A'''}{\varkappa\varkappa'\varkappa''\varkappa'''} + \ldots$$

19. Eine merkwürdige, der vorigen der Form nach ähnliche Transformation der partiellen Binomialreihe

$$1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n$$

giebt Laplace (Théorie analytique des probabilités. p. 151.) Er gelangt dazu durch eigenthümliche Methoden mittelst der höhern Analysis. Hier soll der Beweis elementarisch geführt werden, indem wir den nten Coefficienten der αten Potenz von $1 + x$ durch (α_n), oder, wenn α mehrtheilig, auch bloß durch $(\alpha)_n$ bezeichnen. Sey

$$\varphi(n+1) = 1 + (\alpha-n)_1 \cdot \frac{x}{1+x} + (\alpha-n+1)_2 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^2$$

$$+ \ldots + (\alpha-1)_n \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^n;$$

so erhält man durch die bekannte Zerlegung (Binomial=Coefficienten. 6.)

$$\varphi(n+1) = 1 + \left\{(\alpha-n+1)_1 - 1\right\} \cdot \frac{x}{1+x}$$
$$+ \left\{(\alpha-n+2)_2 - (\alpha-n+1)_1\right\} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \left\{(\alpha-1)_{n-1} - (\alpha-2)_{n-2}\right\} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^{n-1}$$
$$+ \left\{(\alpha_n) - (\alpha-1)_{n-1}\right\} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^n,$$

woraus leicht:

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) \cdot \frac{1}{1+x} + (\alpha_n) \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

und folglich durch successive Zerlegung, für $(1+x)^n \cdot \varphi(n+1) = \psi(n+1)$:

$$\psi(n+1) = \psi(n) + (\alpha_n) \cdot x^n = \psi(n-1) + (\alpha_{n-1}) \cdot x^{n-1} + (\alpha_n) \cdot x^n$$
$$= \psi(n-2) + (\alpha_{n-2}) \cdot x^{n-2} + (\alpha_{n-1}) \cdot x^{n-1} + (\alpha_n) \cdot x^n$$
$$\text{rc.} \qquad \text{rc.}$$
$$= \psi(2) + (\alpha_2) \cdot x^2 + (\alpha_3) \cdot x^3 + \ldots (\alpha_n) \cdot x^n.$$

Aber

$$\psi(2) = (1+x)\left\{1 + (\alpha-1)_1 \cdot \frac{x}{1+x}\right\}$$
$$= 1 + x + (\alpha-1)_1 \cdot x = 1 + (\alpha_1) \cdot x.$$

Also $\psi(n+1) =$

$$1 + (\alpha_1) \cdot x + (\alpha_2) \cdot x^2 + \ldots + (\alpha_n) \cdot x^n,$$

d. i.

$$1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1.2.3\ldots n}x^n$$
$$= (1+x)^n \cdot \left\{1 + \frac{\alpha-n}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{1.2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2\right.$$
$$+ \frac{(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{1.2.3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right\}$$

20. Vergleicht man die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Pharao wichtige Reihe (s. Wahrscheinlichkeitsrechnung. 41.)

$$S = 1 - \frac{p-q}{p-1} + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-1)(p-2)} - \ldots$$

mit der Reihe:

$$a - b + c - d + e - \ldots$$

in (15.); so erhält man leicht

$$a = 1,$$

$$\Delta a = -\frac{q-1}{p-1},$$

$$\Delta^2 a = \frac{(q-1)(q-2)}{(p-1)(p-2)},$$

$$\Delta^3 a = -\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{(p-1)(p-2)(p-3)},$$

 ꝛc ꝛc.

wobei zu bemerken, daß, wie aus (13.) und (15.) erhellet, es nicht auf die Vorzeichen der Glieder bei der Entwickelung der Differenzen ankommt, und also alle Glieder der Reihe positiv genommen werden.

Folglich nach der Euler'schen Transformation:

$$S = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{q-1}{p-1} + \tfrac{1}{8}\frac{(q-1)(q-2)}{(p-1)(p-2)} + \tfrac{1}{16}\cdot\frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{(p-1)(p-2)(p-3)} + \cdots$$

21. Wir wollen nun diese Differenzen etwas näher betrachten. Allgemein ist

$$\Delta^n a = \frac{(q-1)(q-2)\ldots(q-n)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-n)}(-1)^n.$$

Das allgemeine Glied der gegebenen Reihe sey a_x. Also

$$a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-x+2)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-x+1)}(-1)^{x-1}$$

oder; wenn wir auf das Vorzeichen, wie immer bei der Entwickelung der Differenzen, nicht Rücksicht nehmen:

$$a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-x+2)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-x+1)}.$$

Folglich sind die Glieder der gegebenen Reihe, von a_x an, Producte von a_x in

$$1,\ \frac{p-q-x+1}{p-x},\ \frac{(p-q-x+1)(p-q-x)}{(p-x)(p-x-1)},\ \text{ꝛc.}$$

Vergleicht man diese Reihe mit der gegebenen; so sieht man leicht, daß man, um sie aus derselben zu erhalten, $p-x+1$ für p und $q = q$ setzen muß. Folglich hat man nach dem Obigen:

$$\Delta^n a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-x+2)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-x+1)}$$
$$\times \frac{(q-1)(q-2)\ldots(q-n)}{(p-x)(p-x-1)\ldots(p-x-n+1)}(-1)^n,$$
$$\Delta^{q-1} a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-x+2)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-x+1)}$$
$$\times \frac{(q-1)(q-2)\ldots 2.1}{(p-x)(p-x-1)\ldots(p-q-x+2)}(-1)^{q-1}$$
$$= \frac{(p-q)\ldots(p-q-x+2)(q-1)\ldots 1}{(p-1)(p-2)\ldots(p-q-x+2)}(-1)^{q-1}$$
$$= \frac{(q-1)(q-2)\ldots 2.1}{(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}(-1)^{q-1}.$$

Also $\Delta^{q-1} a_x$ nicht mehr von x abhängig; folglich eine constante Größe, und demnach

$$\Delta^q a_x = \Delta^{q+1} a_x = \Delta^{q+2} a_x = \ldots = 0,$$

welches Alles für jedes x, also auch x = 1, gilt, so daß auch

$$\Delta^{q-1} a = \frac{(q-1)(q-2)\ldots 2.1}{(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}(-1)^{q-1}.$$

Also bricht die in (20.) gefundene Reihe ab, und es ist

$$s = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}.\frac{q-1}{p-1} + \tfrac{1}{8}.\frac{(q-1)(q-2)}{(p-1)(p-2)}$$
$$+\ldots+\frac{1}{2^q}.\frac{(q-1)(q-2)\ldots 2.1}{(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}.$$

22. Für $x = p-q+2$, $n = q-\alpha-1$, d. i. $n < q-1$, erhält man:

$$\Delta^n a_x = \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 1.0}{(p-1)(p-2)\ldots(q-1)} \times \frac{(q-1)(q-2)\ldots(\alpha+1)}{(q-2)(q-3)\ldots\alpha}(-1)^n,$$

d. i. $\Delta^{q-\alpha-1} a_{p-q+2} = 0$.

Für $n = q-1$, d. i. für $\alpha = 0$, erhält man auch im Nenner einen Factor = 0. Diese beiden Factoren gegenseitig aufgehoben geben den obigen constanten Werth für $\Delta^{q-1} a_x$. Also ist nach der Eulerschen Transformation die Summe der gegebenen Reihe vom $(p-q+2)$ten Gliede an, dieses Glied, welches selbst = 0 ist, positiv genommen, die folgenden abwechselnd positiv und negativ,

$$= \tfrac{1}{2}.0 + \tfrac{1}{4}.0 + \tfrac{1}{8}.0 + \ldots + \frac{1}{2^{q-1}}.0 + \frac{1}{2^q}.\frac{(q-1)(q-2)\ldots 1}{(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}.$$

Folglich, wenn man die Glieder mit ihren eigentlichen Zeichen nimmt, diese Summe offenbar

$$= \frac{1}{2^q} \cdot \frac{(q-1) \ldots 1}{(p-1) \ldots (p-q+1)} \cdot (-1)^{p-q+1}.$$

Dies muß man, wenn man die Summe S' der $p-q+1$ ersten Glieder unserer Reihe finden will, von S abziehen, woraus

$$S' = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{q-1}{p-1} + \tfrac{1}{8} \cdot \frac{(q-1)(q-2)}{(p-1)(p-2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2^q} \cdot \frac{(q-1) \ldots 1}{(p-1) \ldots (p-q+1)} \cdot \left\{1-(-1)^{p-q+1}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{q-1}{p-1} + \tfrac{1}{8} \cdot \frac{(q-1)(q-2)}{(p-1)(p-2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{2^q} \cdot \frac{(q-1) \ldots 1}{(p-1) \ldots (p-q+1)} \left\{1+(-1)^{p-q}\right\}$$

23. Setzt man nun in der Laplace'schen Transformation (19.) $x = -2$, $\alpha = p$, $n = q-1$; so erhält man

$$1 - \frac{p}{1} \cdot 2 + \frac{p(p-1)}{1.2} \cdot 2^2 - \ldots + \frac{p(p-1) \ldots (p-q+2)}{1.2.3 \ldots (q-1)} \cdot (-2)^{q-1}$$

$$= (-1)^{q-1} \cdot \left\{1 + \frac{p-q+1}{1} \cdot 2 + \frac{(p-q+2)(p-q+1)}{1.2} \cdot 2^2 \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{(p-1)(p-2) \ldots (p-q+1)}{1.2.3 \ldots (q-1)} \cdot 2^{q-1} \right\}$$

Wird nun auf beiden Seiten $(-1)^{p-2q+1} = (-1)^{p-2q+1} \cdot (-1)^{2q-2} = (-1)^{p-1} = (-1)^{p-q} \cdot (-1)^{q-1}$ addirt, hierauf die Glieder beider Reihen in umgekehrter Ordnung geschrieben, und dann auf beiden Seiten multiplicirt mit:

$$\frac{q(q-1) \ldots 3.2.1}{p(p-1) \ldots (p-q+1)} \cdot \frac{1}{(-2)^{q-1}};$$

so erhält man:

$$\frac{q}{p-q+1} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q(q-1)}{(p-q+1)(p-q+2)} + \ldots + \frac{1}{(-2)^{q-2}} \cdot \frac{q(q-1) \ldots 2}{(p-q+1) \ldots (p-1)}$$

$$+ \frac{1}{(-2)^{q-1}} \cdot \frac{q(q-1) \ldots 1}{(p-q+1) \ldots p} \cdot \left\{1+(-1)^{p-2q+1}\right\}$$

$$= (\tfrac{1}{2})^{q-1} \cdot \left\{\frac{q}{p} \cdot 2^{q-1} + \frac{q(q-1)}{p(p-1)} \cdot 2^{q-2} + \ldots + \frac{q(q-1) \ldots 2}{p \ldots (p-q+2)} \cdot 2 \right.$$

$$\left. + \frac{q(q-1) \ldots 1}{p \ldots (p-q+1)} \left[1+(-1)^{p-q}\right] \right\}$$

$$= \frac{q}{p} \left\{1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q-1}{p-1} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{(q-1)(q-2)}{(p-1)(p-2)} + \ldots + \frac{1}{2^{q-2}} \cdot \frac{(q-1) \ldots 2}{(p-1) \ldots (p-q+2)} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{q-1}} \cdot \frac{(q-1) \ldots 1}{(p-1) \ldots (p-q+1)} \left[1+(-1)^{p-q}\right] \right\}$$

Dies, mit (22.) verglichen, giebt leicht:

$$S' = \frac{p}{2q}\left\{\frac{q}{p-q+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{(p-q+1)(p-q+2)} + \ldots \right.$$
$$\ldots + \frac{1}{(-2)^{q-2}}\cdot\frac{q(q-1)\ldots 2}{(p-q+1)\ldots(p-1)}$$
$$\left. + \frac{1}{(-2)^{q-1}}\cdot\frac{q(q-1)\ldots 1}{(p-q+1)\ldots p}\left[[1+(-1)^{p-2q+1}]\right]\right\}$$

eine neue merkwürdige Transformation und Summation, welche zugleich ein Beispiel der Euler'schen und Laplace'schen Transformation, und der doppelten Umformung einer Reihe ist. M. s. Mollweide's Programm: Multiplex et continuata serierum transformatio exemplo quodam luculento illustratur. Lips. 1820.

24. Sey

$$\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)} = \varphi(\gamma, n+1);$$

so überzeugt man sich sehr leicht von der Richtigkeit folgender Relation:

$$\varphi(\gamma, n+1) = \varphi(\gamma, n) + \frac{\beta-\gamma}{\gamma}\varphi(\gamma+1, n).$$

Dies giebt durch fernere Zerlegung beider Functionen:

$$\varphi(\gamma, n+1) = \varphi(\gamma, n-1) + 2.\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\varphi(\gamma+1, n-1)$$
$$+ \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\varphi(\gamma+2, n-1),$$

und hieraus durch die Zerlegung aller drei Functionen:

$$\varphi(\gamma, n+1) = \varphi(\gamma, n-2) + 3.\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\varphi(\gamma+1, n-2)$$
$$+ 3.\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\varphi(\gamma+2, n-2)$$
$$+ \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)(\beta-\gamma-2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\varphi(\gamma+3, n-2).$$

Man kann dies leicht so weit fortsetzen, als man will, und bemerkt sehr bald, daß überhaupt:

$$\varphi(\gamma, n+1) = \varphi(\gamma, n-\varkappa) + (\varkappa+1)_1.\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\varphi(\gamma+1, n-\varkappa)$$
$$+ (\varkappa+1)_2.\frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)}\varphi(\gamma+2, n-\varkappa)\ldots.$$
$$+ (\varkappa+1)_{\varkappa+1}.\frac{(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\gamma-\varkappa)}{\gamma\ldots(\gamma+\varkappa)}\varphi(\gamma+\varkappa+1, n-\varkappa),$$

wenn man die Binomial-Coefficienten wie in (19.) bezeichnet. Folglich, für $k = n - 1$ offenbar:

$$\varphi(\gamma, n+1) = \frac{\beta}{\gamma} + (n_1) \cdot \frac{\beta-\gamma}{\gamma} \cdot \frac{\beta}{\gamma+1}$$
$$+ (n_2) \cdot \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{\beta}{\gamma+2} \cdots$$
$$+ (n_n) \cdot \frac{(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\gamma-n+1)}{\gamma\ldots(\gamma+n-1)} \cdot \frac{\beta}{\gamma+n},$$

woraus durch nochmalige Zerlegung, da allgemein

$$\frac{\beta}{\gamma+\alpha} = 1 + \frac{\beta-\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha} \text{ ist:}$$

$$\varphi(\gamma, n+1) = 1 + (n+1)_1 \cdot \frac{\beta-\gamma}{\gamma} + (n+1)_2 \cdot \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdots$$
$$+ (n+1)_{n+1} \cdot \frac{(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\gamma-n)}{\gamma\ldots(\gamma+n)}.$$

25. Sey jetzt

$$S = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \cdot \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} \cdot \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots$$

so erhält man mittelst der vorigen Zerlegung der Größen $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}$, ꝛc., wenn man nach Vertikalreihen ordnet, leicht:

$$S = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3} x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\gamma} \left\{ 1 + \frac{\alpha+1}{1} x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2} x^2 + \ldots \right\} x$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2} \cdot \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{\gamma(\gamma+1)} \left\{ 1 + \frac{\alpha+2}{1} x + \ldots \right\} x^2 + \ldots$$

Also, wenn man die unendlichen Reihen nach dem binomischen Lehrsatze summirt, und $(1-x)^{-\alpha}$ absondert:

$$S = (1-x)^{-\alpha} \left\{ 1 + \frac{\beta-\gamma}{1} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)}{1.2} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \frac{(\beta-\gamma)(\beta-\gamma-1)(\beta-\gamma-2)}{1.2.3} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \ldots \right\}$$

26. Die eingeklammerte Reihe ist der gegebenen ganz ähnlich, und kann auf dieselbe Art transformirt werden, wenn nur

statt	gesetzt wird
x	$-\frac{x}{1-x}$
α	$-(\beta-\gamma)=\gamma-\beta$
β	α
$1-x$	$(1-x)^{-1}$
$\frac{x}{1-x}$	$-x.$

Dies giebt $S=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$

$$\Big\{1+\frac{\gamma-\alpha}{1}.\frac{\gamma-\beta}{\gamma}x+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)}{1.2}.\frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2$$
$$+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\alpha+2)}{1.2.3}.\frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)(\gamma-\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots\Big\}$$

eine schon von Euler gefundene Transformation (Acta Petrop. T. XII.). Setzt man $-x$ für x und dann $-\alpha$ für α; so erhält man andere merkwürdige Formen.

27. Zu der schon im Art. Binomischer Lehrsatz. (17.) mitgetheilten Eulerschen Transformation der Binomialreihe fügen wir hier noch eine andere von Bouvier (Ann. de Math. XVI.). Sey

$$z=\frac{x^n}{1+x^n};$$

so ist $x^m=\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{m}{n}}=z^{\frac{m}{n}}.(1-z)^{-\frac{m}{n}}$

Also, weil $z=1-(1-z)$ ist:

$$x^m=\Big\{1-\frac{m}{n}(1-z)+\frac{m(m-n)}{n.2n}(1-z)^2$$
$$-\frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n}(1-z)^3+\ldots\Big\}$$
$$\times\Big\{1+\frac{m}{n}z+\frac{m(m+n)}{n.2n}z^2+\frac{m(m+n)(m+2n)}{n.2n.3n}z^3+\ldots\Big\}$$
$$=\Big\{1-\frac{m}{n}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)+\frac{m(m-n)}{n.2n}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^2$$
$$-\frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^3+\ldots\Big\}$$
$$\times\Big\{1+\frac{m}{n}.\frac{x^n}{1+x^n}+\frac{m(m+n)}{n.2n}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2$$
$$+\frac{m(m+n)(m+2n)}{n.2n.3n}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3+\ldots\Big\}$$

eine Reihe, welche immer convergirt, wenn für n eine

gerade Zahl angenommen wird. Setzt man $\frac{1}{m}$ für m; so wird

$$\sqrt[m]{x} = \left\{1 - \frac{1}{mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right) - \frac{mn-1}{mn\,.\,2mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^2 - \frac{(mn-1)(2mn-1)}{mn\,.\,2mn\,.\,3mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^3 - \ldots\right\}$$
$$\times \left\{1 + \frac{1}{mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right) + \frac{mn+1}{mn\,.\,2mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{(mn+1)(2mn+1)}{mn\,.\,2mn\,.\,3mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \ldots\right\}$$

Ist dies auch keine eigentliche Transformation der Binomialreihe; so ist der Ausdruck doch merkwürdig genug, um hier eine Stelle zu finden. Im Artikel Wurzel werden wir auf denselben zurückkommen.

28. Auch für die logarithmische Reihe findet Bouvier a. a. O. eine merkwürdige Transformation. Nach dem Vorigen ist nämlich

$$x^n = \frac{z}{1-z},\ n \operatorname{logn} z = \operatorname{logn} z - \operatorname{logn}(1-z).$$

Weil nun $z = 1 - (1 - z)$; so erhält man mittelst der Reihe (Logarithmus. 25.) leicht:

$$\operatorname{logn} x = \frac{1}{n}\left\{z - (1-z) + \tfrac{1}{2}[z^2 - (1-z)^2] + \tfrac{1}{3}[z^3 - (1-z)^3] + \ldots\right\}$$

Aber (27.) allgemein:

$$z^k = \frac{x^{nk}}{(1+x^n)^k},\ (1-z)^k = \frac{1}{(1+x^n)^k}.$$

Also

$$\operatorname{logn} x = \frac{1}{n}\left\{\frac{x^n - 1}{1+x^n} + \tfrac{1}{2}.\frac{x^{2n} - 1}{(1+x^n)^2} + \tfrac{1}{3}.\frac{x^{3n} - 1}{(1+x^n)^3} + \ldots\right\}$$

eine Reihe, die, wenn für n eine gerade Zahl gesetzt wird, immer convergirt.

29. Lagrange (Leçons sur le calcul des fonctions. p. 31.) giebt folgende Transformation der logarithmischen Reihe:

$$\operatorname{logn} x = (x - 1) - \tfrac{1}{2}(x - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(x - 1)^3 - \ldots$$
$$\operatorname{logn} \sqrt[k]{x} = \frac{1}{k} \operatorname{logn} x,$$
$$\operatorname{logn} x = k\left\{\sqrt[k]{x} - 1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt[k]{x} - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[k]{x} - 1)^3 - \ldots\right\}$$

wo man k immer so groß nehmen kann, daß $\sqrt[k]{x}-1$ kleiner als jede gegebene Größe wird. Nimmt man k negativ; so wird

$$\log n\,x = k\left\{1-\frac{1}{\sqrt[k]{x}}+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right)^3+,..\right\}$$

Nimmt man k so, daß $\sqrt[k]{x}-1<1$ ist; so convergirt auch die zweite Reihe, wenn x eine ganze Zahl ist. Denn es ist dann $\sqrt[k]{x}>1$, also

$$\frac{\sqrt[k]{x}-1}{\sqrt[k]{x}}<\sqrt[k]{x}-1,\ \ 1-\frac{1}{\sqrt[k]{x}}<\sqrt[k]{x}-1,<1.$$

Man hat also vermöge der beiden obigen Reihen;

$$\log n\,x<k(\sqrt[k]{x}-1),>k\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right).$$

Der Unterschied der Gränzen ist:

$$k(\sqrt[k]{x}-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right),$$

welcher offenbar desto kleiner wird, je größer man k nimmt. Giebt man dem logn x einen seiner Gränzwerthe; so ist der Fehler also

$$<k(\sqrt[k]{x}-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right).$$

Für ein unendlich großes k verschwindet dieser Fehler, und man hat

$$\log n\,x=k(\sqrt[k]{x}-1)=k\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right),$$

wodurch also Logarithmen auf Potenzen gebracht sind. Zugleich erhellet hieraus, daß zu jeder Zahl unendlich viele Logarithmen gehören, da eine Wurzel, deren Exponent unendlich groß ist, unendlich viele Werthe hat.

30. Die Artikel Cyklometrie und Cyklotechnie bieten mancherlei Umformungen dar. Noch eine merkwürdige Transformation der Reihe

$$\text{Arc tang}\,x = x-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5-\ldots=\varphi,$$

theile ich aus Fischer's Theorie der Dimensionszeichen.

II. S. 116. mit. Sey für einen beliebigen Winkel α, $\tan\alpha = t$, und

$$y = \frac{x}{t+x},\ x = \frac{ty}{1-y};$$

$$x = t(y + y^2 + y^3 + y^4 + \ldots)$$

Allgemein ist das nte Glied der Entwickelung von $x^m = y^m t^m (1-y)^{-m}$ nach Potenzen von y:

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)} t^m y^{m+n-1}$$

Für $m + n - 1 = k$, $n = k - m + 1$ wird dieses Glied

$$= \frac{m(m+1)\ldots(k-1)}{1.2.3\ldots(k-m)} t^m y^k = \frac{(k-1)(k-2)\ldots m}{1.2.3\ldots(k-m)} t^m y^k$$

$$= \frac{(k-1)\ldots(k-m+1)(k-m)\ldots m}{1.2.3\ldots(m-1)m\ldots(k-m)} t^m y^k$$

$$= \frac{(k-1)\ldots m(m-1)\ldots(k-m+1)}{1.2\ldots(k-m)(k-m+1)\ldots(m-1)} t^m y^k$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)} t^m y^k.$$

Setzt man nun $\frac{ty}{1-y}$ für y in unsere Reihe; so ist das allgemeine Glied:

$$\left\{ t - \frac{(k-1)(k-2)}{1.2.3} t^3 + \frac{(k-1)\ldots(k-4)}{1\ldots4.5} t^5 - \frac{(k-1)\ldots(k-6)}{1\ldots6.7} t^7 + \ldots \right\} y^k$$

$$= \frac{1}{k} \left\{ kt - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} t^3 + \frac{k\ldots(k-4)}{1\ldots5} t^5 - \frac{k\ldots(k-6)}{1\ldots7} t^7 + \ldots \right\} y^k$$

$$= \frac{(1 + t\sqrt{-1})^k - (1 - t\sqrt{-1})^k}{2k\sqrt{-1}} y^k$$

wie sich leicht mittelst des Binomischen Lehrsatzes durch Entwickelung der Potenzen der imaginären Größen ergiebt. Da nun $t = \tan\alpha$; so ist dieses allgemeine Glied

$$= \frac{(1 + \tan\alpha\sqrt{-1})^k - (1 - \tan\alpha\sqrt{-1})^k}{2k\sqrt{-1}} y^k$$

$$= \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{-1})^k - (\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{-1})^k}{2k\cos\alpha^k\sqrt{-1}} y^k$$

$$= \frac{(\cos k\alpha + \sin k\alpha\sqrt{-1}) - (\cos k\alpha - \sin k\alpha\sqrt{-1})}{2k\cos\alpha^k\sqrt{-1}} y^k$$

$$= \frac{\sin k\alpha}{k\cos\alpha^k} y^k$$ (Goniometrie. 100.)

Dies giebt $\operatorname{Arc}\tan x =$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\frac{x}{x+\tan\alpha}\right) + \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha^2}\left(\frac{x}{x+\tan\alpha}\right)^2 + \frac{\sin 3\alpha}{3\cos\alpha^3}\left(\frac{x}{x+\tan\alpha}\right)^3 + \ldots$$

Für Arctang x = φ und $\alpha = \varphi$, x = tang φ, wird:

$$\varphi = \frac{\sin\varphi}{1.2\cos\varphi} + \frac{\sin 2\varphi}{2.4\cos\varphi^2} + \frac{\sin 3\varphi}{3.8\cos\varphi^3} + \frac{\sin 4\varphi}{4.16\cos\varphi^4} + \ldots$$

Auch ist das allgemeine Glied

$$= \frac{\sin k\alpha}{k\cos\alpha^k}\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\alpha + \tan\varphi}\right)^k = \frac{\sin k\alpha}{k}\left\{\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}\right\}^k,$$

woraus

$$\varphi = \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)} + \frac{\sin 2\alpha\sin\varphi^2}{2\sin(\alpha+\varphi)^2} + \frac{\sin 3\alpha\sin\varphi^3}{3\sin(\alpha+\varphi)^3} + \ldots$$

31. Wir beschließen diesen Artikel mit einer merkwürdigen von Laplace (Mém. de Paris. 1782. p. 7.) und Kramp (Hindenburgs Archiv. Heft. 10. S. 223.) gefundenen Umformung der Bernoullischen Reihe (Integralformel. 145.). Es ist nämlich

$$\int X\partial x = xX - \frac{x^2\partial X}{1.2\partial x} + \frac{x^3\partial^2 X}{1.2.3\partial x^2} - \ldots$$

$$\int x\partial X = Xx - \frac{X^2\partial x}{1.2\partial X} + \frac{X^3\partial^2 x}{1.2.3\partial X^2} - \ldots$$

Aber $\int x\partial X = Xx - \int X\partial x$ (Thl. II. S. 783.). Also

$$\int X\partial x = \frac{X^2\partial x}{1.2\partial X} - \frac{X^3\partial^2 x}{1.2.3\partial X^2} + \frac{X^4\partial^3 x}{1.4\partial X^3} - \ldots$$

Man setze nun

$$\frac{X\partial x}{\partial X} = Z,\ \frac{\partial Z}{\partial x} = U',\ \frac{\partial . ZU'}{\partial x} = U'',\ \frac{\partial . ZU''}{\partial x} = U''', \text{ u. s. f.}$$

so ist

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{ZU'}{X},$$

$$\frac{\partial U'}{\partial X} = \frac{U'' - U'U'}{X},$$

$$\frac{\partial U''}{\partial X} = \frac{U''' - U'U''}{X},$$

$$\frac{\partial U'''}{\partial X} = \frac{U'''' - U'U'''}{X},$$

2c. 2c.

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die obigen Differentiale der Producte wirklich entwickelt. Hieraus erhält man ferner

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{Z}{X},\ \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} = -\frac{Z(1 - U')}{X^2},$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial X^3} = \frac{Z(2 - 3U' + U'')}{X^3}, \quad \text{2c.}$$

Man setze also

$$\frac{\partial^n x}{\partial X^n} = \pm \frac{Z\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\}}{X^n};$$

und differentiire von Neuem; so ist X^{2n} der Nenner von $\frac{\partial^{n+1} x}{\partial X^{n+1}}$. Der Zähler ist =

$$X^n . \frac{\partial . Z\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\}}{\partial X}$$

$$- nX^{n-1} Z\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\}$$

ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen. Hebt man nun Zähler und Nenner durch X^{n-1} auf; so wird der Nenner = X^{n+1}, und der Zähler =

$$X\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\} \frac{\partial Z}{\partial X}$$

$$+ XZ\left\{- \overset{2}{A}_n \frac{\partial U'}{\partial X} + \overset{3}{A}_n \frac{\partial U''}{\partial X} - \ldots \pm \overset{n}{A}_n \frac{\partial U^{(n-1)}}{\partial X}\right\}$$

$$- nZ\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\}$$

$$= Z\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\} U'$$

$$+ Z\left\{- \overset{2}{A}_n (U'' - U'U') + \overset{3}{A}_n (U''' - U'U'') - \ldots \pm \overset{n}{A}_n \left(U^{(n)} - U'U^{(n-1)}\right)\right\}$$

$$- nZ\left\{\overset{1}{A}_n - \overset{2}{A}_n U' + \ldots \pm \overset{n}{A}_n U^{(n-1)}\right\}$$

$$= - Z\left\{n\overset{1}{A}_n - (\overset{1}{A}_n + n\overset{2}{A}_n)U' + \ldots \pm (\overset{n-1}{A}_n + n\overset{n}{A}_n)U^{(n-1)} \mp \overset{n}{A}_n U^{(n)}\right\}.$$

Also, wenn man wieder auf das Zeichen des Differentialquotienten Rücksicht nimmt:

$$\frac{\partial^{n+1} x}{\partial X^{n+1}} = \mp \frac{Z\left\{\overset{1}{A}_{n+1} - \overset{2}{A}_{n+1} U' + \ldots \mp \overset{n+1}{A}_{n+1} U^{(n)}\right\}}{X^{n+1}}$$

wo

$$\overset{1}{A}_{n+1} = n\overset{1}{A}_n,$$

$$\overset{2}{A}_{n+1} = n\overset{2}{A}_n + \overset{1}{A}_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{n}{A}_{n+1} = n\overset{n}{A}_n + \overset{n-1}{A}_n$$

$$\overset{n+1}{A}_{n+1} = \overset{n}{A}_n.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen in (12.); so erhellet leicht, da nach der Tafel in (11.) und dem Obigen für n = 1, = 2, = 3

$$\overset{k}{A}_n = \overset{-n}{B}_k$$

ist, daß diese Relation allgemein, und folglich nach (12.) und der dortigen Bezeichnung:

$$\overset{k}{A}_n = \overset{n-k+1}{A}_{-(k+1)}, \quad \overset{k}{A}_{-n} = \overset{n-1}{A}_{n+k-2}.$$

Hiernach erhalten wir nun

$$\int X \partial x = \frac{X^2}{1.2} \cdot \frac{Z\overset{1}{A}_1}{X} + \frac{X^3}{1.2.3} \cdot \frac{Z \left\{ \overset{1}{A}_2 - \overset{2}{A}_2 U' \right\}}{X^2}$$

$$+ \frac{X^4}{1\ldots4} \cdot \frac{Z \left\{ \overset{1}{A}_3 - \overset{2}{A}_3 U' + \overset{3}{A}_3 U'' \right\}}{X^3}$$

$$+ \frac{X^5}{1\ldots5} \cdot \frac{Z \left\{ \overset{1}{A}_4 - \overset{2}{A}_4 U' + \overset{3}{A}_4 U'' - \overset{4}{A}_4 U''' \right\}}{X^4} + \ldots$$

$$= ZX \left\{ \frac{\overset{1}{A}_1}{1.2} + \frac{\overset{1}{A}_2}{1.2.3} + \frac{\overset{1}{A}_3}{1\ldots4} + \ldots \right\}$$

$$- ZXU' \left\{ \frac{\overset{2}{A}_2}{1.2.3} + \frac{\overset{2}{A}_3}{1\ldots4} + \frac{\overset{2}{A}_4}{1\ldots5} + \ldots \right\}$$

$$+ ZXU'' \left\{ \frac{\overset{3}{A}_3}{1\ldots4} + \frac{\overset{3}{A}_4}{1\ldots5} + \frac{\overset{3}{A}_5}{1\ldots6} + \ldots \right\}$$

$$- ZXU''' \left\{ \frac{\overset{4}{A}_4}{1\ldots6} + \frac{\overset{4}{A}_5}{1\ldots6} + \frac{\overset{4}{A}_6}{1\ldots7} + \ldots \right\} + \ldots$$

Nach (11.) aber für $x = 1$:

$$1 = \frac{\overset{1}{A}_{-n}}{1\ldots n} + \frac{\overset{2}{A}_{-n}}{1\ldots(n+1)} + \frac{\overset{3}{A}_{-n}}{1\ldots(n+2)} + \ldots$$

$$= \frac{\overset{n-1}{A}_{n-1}}{1\ldots n} + \frac{\overset{n-1}{A}_n}{1\ldots(n+1)} + \frac{\overset{n-1}{A}_{n+1}}{1\ldots(u+2)} + \ldots$$

nach obiger Relation. Folglich

$$\int X \partial x = ZX \left\{ 1 - U' + U'' - U''' + U'''' - \ldots \right\}$$

32. Die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche, und die Auflösung einiger Reihen in Producte mit unendlich vielen Factoren s. m. in den Artt. Kettenbruch. (39.), Cyklometrie (26.), und Product. Die Transformation der Reihen mittelst der fonctions génératrices muß den Zusätzen zu diesem Werke aufbehalten bleiben. Mehr Belehrung, als hier der Kürze wegen gegeben werden konnte, suche man in den Euler'schen Werken, der oben (7.) angeführten wichtigen Schrift von Stirling, der

Théorie analytique des probabilités von Laplace, Lacroix Traité du calcul diff. et int. T. III., überhaupt in allen der Theorie der Reihen ausschließlich gewidmeten Werken, und einigen besondern Abhandlungen von Goldbach (Comm. Petrop. T. II. p. 30.) und Euler (Nova Acta Petrop. T. II. p. 36. T. XII. p. 58.), auch in den die Reihen überhaupt betreffenden Artikeln dieses Wörterbuchs, besonders den Art. Cyklotechnie in Bezug auf eine von Euler herrührende Methode, stark convergirende Reihen für Theile der Peripherie zu erhalten.

Umgekehrte Methode der Berührenden, (inversa methodus tangentium; s. diesen Artikel) ist im Allgemeinen einerlei mit der Integration der Differentialgleichungen des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen. So wie nämlich mittelst der Differentialrechnung aus der Gleichung einer Curve leicht Ausdrücke für die Subtangente, Normale und Subnormale hergeleitet werden; so kann man auch umgekehrt nach der Gleichung einer Curve fragen, deren Subtangente, Normale oder Subnormale eine gegebene Function der Abscisse ist, oder überhaupt eine gegebene Eigenschaft hat. Da nun (Berührende Linie. 13. 40.) die Subtangente $= \frac{y\partial x}{\partial y}$, die Subnormale $= \frac{y\partial y}{\partial x}$, die Normale $= y\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ ist; so ist klar, daß jedes solches Problem auf die Integration einer Differentialgleichung des ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen führen muß. Die erste Aufgabe dieser Art, welche überhaupt aufgelöset worden ist, war die Beaunische (s. diesen Art.). Zuweilen wird der Begriff auch noch erweitert (schon von Joh. Bernoulli. Opp. T. III. p. 414.), und man versteht unter der umgekehrten Methode der Berührenden überhaupt die Herleitung der Gleichungen der Curven aus gegebenen Eigenschaften derselben, wenn das Problem auf eine Differentialgleichung des ersten Grades führt. Einige Beispiele mögen diese allgemeinen Bemerkungen erläutern.

1. Die Curve zu finden, deren Ordinate die mittlere

Proportionale zwischen einer gegebenen Größe a und der Subtangente, oder zwischen der Subtangente und der gegebenen Größe a weniger der Abscisse ist.

Für den ersten Fall ist:

$$a : y = y : \frac{y\partial x}{\partial y}, \quad \frac{a\partial x}{\partial y} = y;$$

$$a\partial x = y\partial y, \quad ax = \tfrac{1}{2}y^2 + \text{const};$$

$$y^2 = 2ax - \text{const} = 2a(x - \alpha) = 2ax',$$

wenn wir die Constante $= 2a\alpha$ und $x - \alpha = x'$ setzen. Die gesuchte Curve ist also die apollonische Parabel. Die Constante muß noch durch eine willkührliche Bedingung bestimmt werden.

Für den zweiten Fall ist:

$$a - x : y = y : \frac{y\partial x}{\partial y}, \quad y\partial y = (a - x)\partial x;$$

$$ax - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2 + \text{const}, \quad 2ax - x^2 = y^2 + \text{const}.$$

Setzt man nun $x' - \alpha = x$, $y' = y$; so wird die Gleichung:

$$2a(x' - \alpha) - (x' - \alpha)^2 = y'^2 + \text{const},$$

$$2(a + \alpha)x' - x'^2 - \alpha(2a + \alpha) = y'^2 + \text{const},$$

wo man α offenbar immer so bestimmen kann, daß

$$-\alpha(2a + \alpha) = \text{const}.$$

Dann wird die Gleichung:

$$2(a + \alpha)x' - x'^2 = y'^2,$$

und die Curve ist also ein Kreis, dessen Halbmesser $= a + \alpha$. Zur Bestimmung der Constante muß noch eine willkührliche Bedingung gegeben seyn.

2. Eine Curve zu finden, bei welcher das Quadrat der Ordinate die mittlere Proportionale zwischen einem gegebenen Quadrate a^2 und der Area der Curve ist.

Dies giebt die Proportion:

$$a^2 : y^2 = y^2 : \int y\partial x \qquad \text{(Quadratur. 8.)}$$

Also $a^2 \int y\partial x = y^4$, $a^2 y\partial x = 4y^3\partial y$, $a^2\partial x = 4y^2\partial y$, $a^2 x = \frac{4}{3}y^3 + \text{const}$, $y^3 = \frac{3}{4}a^2 x - \text{const} = \frac{3}{4}a^2(x - \alpha) = \frac{3}{4}a^2 x'$. Die Curve ist folglich eine Parabola cubicalis prima, wie man sie mit Joh. Bernoulli (Opp. T. III. p. 415.) nennen kann, da die

Curve, deren Gleichung $y^3 = ax^2$ gewöhnlich Parabola cubicalis secunda genannt wird (Parabeln höherer Art. Thl. III. S. 724.).

3. Die Curve zu bestimmen, deren Subnormale unveränderlich ist. Man hat die Gleichung $\frac{y\partial y}{\partial x} = c$, $y\partial y = c\partial x$, $\frac{1}{2}y^2 = cx + \text{const}$, $y^2 = 2cx + \text{const} = 2c(x + \alpha) = 2cx'$. Die Curve ist also die apollonische Parabel (Parabel. 21.).

4. Die Curve zu finden, deren Subtangente der nfachen Abscisse gleich ist.

$$\frac{y\partial x}{\partial y} = nx,\ \frac{\partial x}{x} = \frac{n\partial y}{y},$$

$$\text{logn}\, x = n\, \text{logn}\, y + \text{const},\ n\, \text{logn}\, y = \text{logn}\, x + \text{logn}\, \alpha = \text{logn}\, \alpha x,$$

für $\text{const} = -\text{logn}\, \alpha$. Also $y^n = \alpha x$, und die gesuchte Curve folglich eine Parabel der nten Ordnung (Parabeln höherer Art.). Für $n = 2$ erhält man die apollonische Parabel (Parabel. 13.).

5. Die Curve zu finden, deren Subnormale der Quadratwurzel der Abscisse proportional ist.

$$\frac{y\partial y}{\partial x} = a\sqrt{x},\ y\partial y = ax^{\frac{1}{2}}\partial x;\ \frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}ax^{\frac{3}{2}},\ \frac{9}{16}y^4 = a^2x^3.$$

6. Eine Curve von solcher Beschaffenheit zu finden, daß alle von einem gegebenen Punkte auf die sie Berührenden gefällten Perpendikel einer gegebenen constanten Größe n gleich sind.

Man nehme den gegebenen Punkt als Anfang der Coordinaten an. Bezeichnen x, y die Coordinaten der gesuchten Curve; so ist, wie aus (Linie, gerade. 13. Berührende Linie. 14.) leicht geschlossen wird:

$$u - y = \frac{\partial y}{\partial x}(z - x)$$

die Gleichung der Berührenden. Die Gleichung des von dem gegebenen Punkte, dessen Coordinaten beide $= 0$ sind, auf die Berührende gefällten Perpendikels ist:

$$u = -\frac{\partial x}{\partial y}z$$

(Linie, gerade. 17.). Die Coordinaten der Durchschnittspunkte beider Linien sind:

$$\alpha = \frac{(x\partial y - y\partial x)\partial y}{\partial x^2 + \partial y^2},\ \beta = -\frac{(x\partial y - y\partial x)\partial x}{\partial x^2 + \partial y^2},$$

(Linie, gerade. 18.), und die Länge des Perpendikels ist

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = n.$$

Setzt man nun für α, β die obigen Werthe; so erhält man als Differentialgleichung der gesuchten Curve:

$$x\partial y - y\partial x = n\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

Setzt man $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, und differentiirt von Neuem; so wird

$$y = px - n\sqrt{1 + p^2},$$

$$\partial y = p\partial x + x\partial p - \frac{np\partial p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

oder, da $\partial y = p\partial x$ ist:

$$x\partial p - \frac{np\partial p}{\sqrt{1 + p^2}} = \left\{x - \frac{np}{\sqrt{1 + p^2}}\right\}\partial p = o,$$

so daß also unsere Differentialgleichung erfüllt wird, sowohl für $\partial p = o$, als auch für

$$x - \frac{np}{\sqrt{1 + p^2}} = o.$$

Die erste Gleichung giebt $p = \text{const} = c$, und folglich die gesuchte Gleichung nach dem Obigen:

$$y = cx - n\sqrt{1 + c^2};$$

für jedes c, die Gleichung einer geraden Linie. Zu näherer Bestimmung derselben setze man ihren Neigungswinkel gegen die Abscissenaxe $= \alpha$, das von dem Anfang der Coordinaten auf sie gefällte Perpendikel $= q$. Für $x = o$ ist $y = -n\sqrt{1+c^2}$, und es erhellet leicht, daß $q = -n\sqrt{1+c^2}.\cos\alpha$. Aber $c = \tang\alpha$ (Linie, gerade. 13.), $1 + c^2 = \sec\alpha^2 = \frac{1}{\cos\alpha^2}$, $\sqrt{1+c^2} = \pm\frac{1}{\cos\alpha}$, $q = \mp n$, so daß also jede gerade Linie, deren Entfernung von dem gegebenen Punkte $= n$ ist, der Aufgabe Genüge leistet, wie sich auch von selbst versteht.

Die zweite Gleichung:

$$x - \frac{np}{\sqrt{1+p^2}} = 0,$$

giebt $p^2 = \frac{x^2}{n^2 - x^2}$, $1+p^2 = \frac{n^2}{n^2 - x^2}$, woraus man, wenn dies wieder in die Gleichung

$$y = px - n\sqrt{1+p^2},$$

gesetzt wird, erhält:

$$y = \frac{x^2 - n^2}{\sqrt{n^2 - x^2}} = \frac{(x^2 - n^2)\sqrt{n^2 - x^2}}{n^2 - x^2} = -\sqrt{n^2 - x^2},$$

$$y^2 = n^2 - x^2,\ x^2 + y^2 = n^2,$$

welches die Gleichung eines Kreises ist, dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt, und dessen Halbmesser $= n$ ist. Dieser Kreis leistet also, wie sich auch von selbst versteht, ebenfalls der Aufgabe Genüge. In der Gleichung dieses Kreises kommt keine willkührliche Constante vor, wie in der erstern Gleichung. Man nennt eine solche Auflösung eine partikuläre oder singuläre Auflösung der Differentialgleichung. Eine weitere Auseinandersetzung über diesen Gegenstand gehört aber nicht in diesen Artikel, und muß den Zusätzen zu diesem Werke aufbehalten bleiben.

Man wird aus den wenigen hier behandelten Aufgaben, deren Anzahl sich leicht vermehren ließe, schon sehen, daß die Schwierigkeit lediglich in der Integration der Differentialgleichung liegt, da die Bildung der letztern sich immer aus den Formeln der analytischen Geometrie leicht ergiebt. Vorzüglich die ältern Werke über Integralrechnung sind reich an hierher gehörenden Beispielen.

Umkehrung der Reihen, (Reversio — inversio — serierum. Retour des suites.) ist im allgemeinsten Sinne die Bezeichnung des folgenden wichtigen analytischen Problems:

Zwischen x und y sey die allgemeine Gleichung

$$a_1 y^{\alpha_1} + b_1 y^{\alpha_1 + \delta_1} + c_1 y^{\alpha_1 + 2\delta_1} + \ldots$$
$$= ax^{\alpha} + bx^{\alpha + \delta} + cx^{\alpha + 2\delta} + \ldots$$

gegeben. Man soll irgend eine Potenz x^{γ} von x durch eine Reihe nach Potenzen von y ausdrücken.

Die Engländer nennen dies ebenfalls nicht unschicklich: methode of extracting the root of an infinite equation, eigentlich und richtiger: Auflösung der Gleichungen durch unendliche Reihen. Eine Umkehrung einer Reihe im eigentlichen Sinne bietet, streng genommen, nur der besondere Fall des obigen allgemeinen Problems dar, wo y durch eine Reihe nach Potenzen von x gegeben ist, und nun umgekehrt x in eine Reihe nach Potenzen von y entwickelt werden soll. Indem wir uns nach und nach zu der Auflösung der allgemeinen Aufgabe zu erheben suchen, werden wir zugleich das Historische mitnehmen.

I. Recurrirende Form.

1. Sey zunächst nur

$$y^\beta = ax^\alpha + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \ldots$$

gegeben; so ist nach dem polynomischen Lehrsatze, wenn wir Coefficienten, auf deren Größe es weiter nicht ankommt, durch (.) bezeichnen:

$$y = (.)x^{\frac{\alpha}{\beta}} + (.)x^{\frac{\alpha}{\beta}+\delta} + (.)x^{\frac{\alpha}{\beta}+2\delta} + \ldots$$

und es kommt nun — das ist eigentlich der Sinn unserer Aufgabe — darauf an, x durch eine Reihe nach Potenzen von y auszudrücken, welche, für x in obige Gleichung gesetzt, dieselbe für jedes y identisch y = y macht. Zugleich soll dann diese Reihe auf die Potenz γ erhoben werden, damit man sogleich x^γ erhält.

2. Zur Bestimmung der Form der Reihe bedienen wir uns des polynomischen Lehrsatzes. Die Reihe für x durch y muß so beschaffen seyn, daß das erste Glied ihrer $\frac{\alpha}{\beta}$ten Potenz = y ist, und die Coefficienten aller übrigen Glieder des aus ihrer Substitution für x in obige Gleichung hervorgehenden, völlig nach y entwickelten, Ausdrucks auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens verschwinden. Der Exponent des ersten Gliedes der Reihe sey = ν; so ist nach dem polynomischen Lehrsatze der Ex-

ponent des ersten Gliedes der Reihe für $x^{\frac{\alpha}{\beta}}, = \nu . \frac{\alpha}{\beta}$, welches nach der Bedingung der Aufgabe $= 1$ seyn muß. Dies giebt $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$, und folglich

$$x = (.) y^{\frac{\beta}{\alpha}} + \ldots$$

woraus nach dem polynomischen Lehrsatze:

$$x^{\frac{\alpha}{\beta} + \delta} = (.) y^{1 + \frac{\beta\delta}{\alpha}} + \ldots$$

$$x^{\frac{\alpha}{\beta} + 2\delta} = (.) y^{1 + \frac{2\beta\delta}{\alpha}} + \ldots$$

$$x^{\frac{\alpha}{\beta} + 3\delta} = (.) y^{1 + \frac{3\beta\delta}{\alpha}} + \ldots$$

$$\text{rc.} \qquad \text{rc.}$$

Denkt man sich dies in die obige Gleichung für x gesetzt; so wird man, alles gehörig geordnet annehmend, unmittelbar darauf geführt, für x eine Reihe zu setzen, deren $\frac{\alpha}{\beta}$te Potenz die Form

$$(.) y + (.) y^{1 + \frac{\beta\delta}{\alpha}} + (.) y^{1 + \frac{2\beta\delta}{\alpha}} + \ldots$$

hat. Diese Reihe ist aber nach dem polynomischen Lehrsatze keine andere, als

$$(.) y^{\frac{\beta}{\alpha}} + (.) y^{\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta\delta}{\alpha}} + (.) y^{\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2\beta\delta}{\alpha}} + \ldots$$

woraus ferner

$$x^{\gamma} = (.) y^{\frac{\gamma\beta}{\alpha}} + (.) y^{\frac{\beta(\gamma + \delta)}{\alpha}} + (.) y^{\frac{\beta(\gamma + 2\delta)}{\alpha}} + \ldots$$

so daß man also berechtigt ist, der Reihe für x^{γ} diese Form zu geben, obgleich nun die wirkliche Entwickelung immer noch zeigen muß, ob sich unter dieser Annahme die Coefficienten wirklich bestimmen lassen, indem obige Rechnung immer nur erst als eine vorläufige Bestimmung der Form der Reihe zu betrachten ist.

3. Sey also $y^{\beta} = p$, und

$$x^{\gamma} = Ay^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}} + By^{\frac{\beta(\gamma+\delta)}{\alpha}} + Cy^{\frac{\beta(\gamma+2\delta)}{\alpha}} + \dots$$

Nach dem polynomischen Lehrsatze erhält man mit Hülfe der Hindenburgischen Localzeichen (S. diesen Artikel) durch Entwickelung der Potenzen von y aus der Reihe für y^{β} (1.), und Substitution in x^{γ}:

$$x^{\gamma} = Ap^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 1 x^{\gamma} + \left.\begin{array}{l} Ap^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 2 \\ + Bp^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 1 \end{array}\right\} x^{\gamma+\delta} + \left.\begin{array}{l} Ap^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 3 \\ + Bp^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 2 \\ + Cp^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\varkappa 1 \end{array}\right\} x^{\gamma+2\delta} + \dots$$

Damit nun diese Gleichung für jedes x gelte, müssen die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. so bestimmt werden, daß sie folgenden Gleichungen genügen:

$$1 = Ap^{\frac{\gamma}{\alpha}} . \varkappa 1,$$

$$o = Ap^{\frac{\gamma}{\alpha}} . \varkappa 2 + Bp^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} . \varkappa 1,$$

$$o = Ap^{\frac{\gamma}{\alpha}} . \varkappa 3 + Bp^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} . \varkappa 2 + Cp^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} . \varkappa 1;$$

ꝛc. ꝛc.

$$o = Ap^{\frac{\gamma}{\alpha}} . \varkappa(n+1) + Bp^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} . \varkappa n + \dots + Mp^{\frac{\gamma+(n-1)\delta}{\alpha}} . \varkappa 2 + Np^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} . \varkappa 1,$$

wo N der Coefficient des (n+1)ten Gliedes ist. Daß diese recurrirende Bestimmung möglich, und die angenommene Form der Reihe für x oder x^{γ} also richtig ist, liegt klar vor Augen.

4. Sey jetzt allgemeiner

$$a_1 y^{\alpha_1} + b_1 y^{\alpha_1+\delta_1} + c_1 y^{\alpha_1+2\delta_1} + \dots$$
$$= ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \dots$$

gegeben, und x^{γ} nach Potenzen von y zu entwickeln; so ist, wenn z eine, diesen beiden Reihen gleiche, Größe bezeichnet, nach (3.)

$$x^{\gamma} = Az^{\frac{\gamma}{\alpha}} + Bz^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} + Cz^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} + \ldots$$

wo die Coefficienten, wenn man die Reihe auf der linken und rechten Seite der gegebenen Gleichung durch q und p bezeichnet, ganz durch dieselben Gleichungen wie in (3.) bestimmt werden, und daher als bekannt anzusehen sind. Entwickelt man aber die Potenzen von z mittelst der Reihe q nach dem polynomischen Lehrsatze, und substituirt sie in die für x^{γ} gefundene Reihe; so erhält man

$$\begin{aligned}
x^{\gamma} = A\{ & q^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 1\, y^{\frac{\gamma\alpha_1}{\alpha}} + q^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 2\, y^{\frac{\gamma\alpha_1}{\alpha}+\delta_1} + \ldots \\
& \ldots + q^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa(m+1)\, y^{\frac{\gamma\alpha_1}{\alpha}+m\delta_1} + \ldots\ldots \} \\
+ B\{ & q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 1\, y^{\frac{(\gamma+\delta)\alpha_1}{\alpha}} + q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 2\, y^{\frac{(\gamma+\delta)\alpha_1}{\alpha}+\delta_1} + \ldots \\
& \ldots + q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa(m+1)\, y^{\frac{(\gamma+\delta)\alpha_1}{\alpha}+m\delta_1} + \ldots \} \\
+ C\{ & q^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\varkappa 1\, y^{\frac{(\gamma+2\delta)\alpha_1}{\alpha}} + q^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\varkappa 2\, y^{\frac{(\gamma+2\delta)\alpha_1}{\alpha}+\delta_1} + \ldots \\
& \ldots + q^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\varkappa(m+1)\, y^{\frac{(\gamma+2\delta)\alpha_1}{\alpha}+m\delta_1} + \ldots \} \\
& \text{2c.} \qquad \text{2c.} \\
+ N\{ & q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\varkappa 1\, y^{\frac{(\gamma+n\delta)\alpha_1}{\alpha}} + q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\varkappa 2\, y^{\frac{(\gamma+n\delta)\alpha_1}{\alpha}+\delta_1} + \ldots \\
& \ldots + q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\varkappa(m+1)\, y^{\frac{(\gamma+n\delta)\alpha_1}{\alpha}+m\delta_1} + \ldots \} \\
& \text{2c.} \qquad \text{2c.}
\end{aligned}$$

wodurch x^{γ} völlig bestimmt ist, indem die Coefficienten theils aus dem Vorhergehenden, theils durch den polynomischen Lehrsatz gegeben sind.

5. Für $\alpha = \alpha_1$, $\delta = \delta_1$ kann man die Reihe auch so ordnen:

$$x^{\gamma} = Aq^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 1 y^{\gamma} + \{Aq^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 2 + Bq^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 1\}y^{\gamma+\delta}$$

$$+ \left\{ Aq^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 3 + Bq^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 2 + Cq^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\varkappa 1 \right\} y^{\gamma+2\delta} + \ldots$$

wo A, B, C, D, ꝛc. immer wie oben bestimmt werden.

6. Für $\alpha = \gamma = \delta = 1$ giebt dies:

$$x = Aq\varkappa 1\, y + \{Aq\varkappa 2 + Bq^2\varkappa 1\} y^2$$
$$+ \{Aq\varkappa 3 + Bq^2\varkappa 2 + Cq^3\varkappa 1\} y^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \{Aq\varkappa(n+1) + Bq^2\varkappa n + \ldots + Nq^{n+1}\varkappa 1\} y^{n+1} + \ldots$$

wo A, B, C, D, ꝛc. durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$1 = Ap\varkappa 1,$$
$$0 = Ap\varkappa 2 + Bp^2\varkappa 1,$$
$$0 = Ap\varkappa 3 + Bp^2\varkappa 2 + Cp^3\varkappa 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = Ap\varkappa(n+1) + Bp^2\varkappa n + \ldots + Np^{n+1}\varkappa 1,$$

ꝛc. ꝛc.

7. Die bisherige Behandlung verdankt man vorzüglich Hindenburg und seinen Schülern, besonders Eschenbach und Rothe, worüber nachher ein Mehreres. Eine andere Regel für den letztern Fall giebt Moivre (Phil. Transact. Vol. XX. 1698. p. 190.), der sich zuerst in größerer Allgemeinheit mit der Umkehrung der Reihen beschäftigt hat, obgleich der einfachste Fall, wo $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$, schon von Newton (Epist. ad Oldenburg. posterior cum Leibnitio communicanda. Leibn. Opp. T. III. p. 75.) untersucht worden ist. Wenn

$$a_1 y + b_1 y^2 + c_1 y^3 + d_1 y^4 + \ldots = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

ist; so setze man, der Form in (1.) gemäß

$$x = \dot{A}y + \dot{B}y^2 + \dot{C}y^3 + \dot{D}y^4 \ldots$$

wo die punktirten Coefficienten coefficientes ficti s. assumti bedeuten. Bezeichnen wir nun die nte Combinationsklasse zur Summe m, wenn man jede Combination mit ihrer Permutationszahl multiplicirt, durch $[n]\overset{m}{\underset{n}{C}}$; so ist nach dem polynomischen Lehrsatze, wie sich leicht aus diesem Artikel. (8.) ergeben wird:

$$x^2 = [2]\overset{2}{\underset{2}{C}}y^2 + [2]\overset{3}{\underset{2}{C}}y^3 + [2]\overset{4}{\underset{2}{C}}y^4 + \ldots$$

$$x^3 = [3]\overset{3}{\underset{3}{C}}y^3 + [3]\overset{4}{\underset{3}{C}}y^4 + [3]\overset{5}{\underset{3}{C}}y^5 + \ldots$$

$$x^4 = [4]\overset{4}{\underset{4}{C}}y^4 + [4]\overset{5}{\underset{4}{C}}y^5 + [4]\overset{6}{\underset{4}{C}}y^6 + \ldots$$

ꝛc. ꝛc.

die Combinationen für den Zeiger

$$\begin{pmatrix}\dot{A}, & \dot{B}, & \dot{C}, & \dot{D}, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots\end{pmatrix}$$

genommen. Dies, für x in die gegebene Gleichung gesetzt, giebt:

$$a_1 y + b_1 y^2 + c_1 y^3 + d_1 y^4 + \ldots$$

$$= a\dot{A}y + \left\{a\dot{B} + b[2]\overset{2}{\underset{2}{C}}\right\}y^2$$

$$+ \left\{a\dot{C} + b[2]\overset{3}{\underset{2}{C}} + c[3]\overset{3}{\underset{3}{C}}\right\}y^3$$

$$+ \left\{a\dot{D} + b[2]\overset{4}{\underset{2}{C}} + c[3]\overset{4}{\underset{3}{C}} + d[4]\overset{4}{\underset{4}{C}}\right\}y^4 + \ldots$$

$$a_1 = a[1]\overset{1}{\underset{1}{C}},$$

$$b_1 = a[1]\overset{2}{\underset{1}{C}} + b[2]\overset{2}{\underset{2}{C}},$$

$$c_1 = a[1]\overset{3}{\underset{1}{C}} + b[2]\overset{3}{\underset{2}{C}} + c[3]\overset{3}{\underset{3}{C}}$$

$$d_1 = a[1]\overset{4}{\underset{1}{C}} + b[2]\overset{4}{\underset{2}{C}} + c[3]\overset{4}{\underset{3}{C}} + d[4]\overset{4}{\underset{4}{C}},$$

ꝛc. ꝛc.

woraus die Coefficienten bestimmt werden können. Also

$$x = \frac{a_1}{a}y + \frac{b_1 - b[2]\overset{2}{\underset{2}{C}}}{a}y^2 + \frac{c_1 - b[2]\overset{3}{\underset{2}{C}} - c[3]\overset{3}{\underset{3}{C}}}{a}y^3$$

$$+ \frac{d_1 - b[2]\overset{4}{\underset{2}{C}} - c[3]\overset{4}{\underset{3}{C}} - d[4]\overset{4}{\underset{4}{C}}}{a}y^4 + \ldots$$

$$= \frac{a_1}{a}y + \frac{b_1 - b\dot{A}^2}{a}y^2 + \frac{c_1 - 2b\dot{A}\dot{B} - c\dot{A}^3}{a}y^3$$

$$+ \frac{d_1 - b\dot{B}^2 - 2b\dot{A}\dot{C} - 3c\dot{A}^2\dot{B} - d\dot{A}^4}{a}y^4 + \ldots$$

Dies ist Moivre's Form der Reihe.

8. Auch Tempelhoff (Anfangsgründe der Anal. endl. Gr. S. 605.) hat eine recurrirende Reversionsfor-

mel angegeben, welche wegen ihres einfachen Gesetzes merkwürdig, wegen der vielen Substitutionen aber zur Rechnung selbst unbequem ist. Für den Fall

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

hat der Italiäner Philipp Rubbiani die umgekehrte Reihe bis zum neunten Gliede wirklich entwickelt. Das Resultat theilt, seine Richtigkeit versichernd, Cagnoli im Traité de Trigon. Paris. 1808. p. 46., als bei praktischen Rechnungen zuweilen brauchbar, mit.

II. Independente Form.

9. Setzen wir jetzt

$$p = ax^{\alpha} + \overset{1}{a}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{a}x^{\alpha+2\delta} + \ldots,$$

und bezeichnen die Coefficienten von p^m durch A, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, &c.; so folgt aus der dritten Form des polynomischen Lehrsatzes, daß allgemein

$$\begin{aligned} na\overset{n}{A} &= (m - n + 1)\overset{1}{a}\overset{n-1}{A} + (2m - n + 2)\overset{2}{a}\overset{n-2}{A} \\ &\quad + (3m - n + 3)\overset{3}{a}\overset{n-3}{A} + \ldots + [(n-1)m - 1]\overset{n-1}{a}\overset{1}{A} + nma\overset{n}{A} \\ &= (m+1)\{\overset{1}{a}\overset{n-1}{A} + 2\overset{2}{a}\overset{n-2}{A} + \ldots + (n-1)\overset{n-1}{a}\overset{1}{A} + na\overset{n}{A}\} \\ &\quad - n\{\overset{1}{a}\overset{n-1}{A} + \overset{2}{a}\overset{n-2}{A} + \ldots + \overset{n-1}{a}\overset{1}{A} + a\overset{n}{A}\}, \end{aligned}$$

oder in Localzeichen:

$$\begin{aligned} nap^m{\varkappa}(n+1) &= (m+1)\{\overset{1}{a}p^m{\varkappa}n + 2\overset{2}{a}p^m{\varkappa}(n-1) + \ldots \\ &\qquad \ldots + (n-1)\overset{n-1}{a}p^m{\varkappa}2 + n\overset{n}{a}p^m{\varkappa}1\} \\ &\quad - n\{\overset{1}{a}p^m{\varkappa}n + \overset{2}{a}p^m{\varkappa}(n-1) + \ldots + \overset{n-1}{a}p^m{\varkappa}2 + \overset{n}{a}p^m{\varkappa}1\} \end{aligned}$$

Nach dem polynomischen Lehrsatze ist aber:

$$p^m = p^m{\varkappa}1\,x^{m\alpha} + p^m{\varkappa}2\,x^{m\alpha+\delta} + p^m{\varkappa}3\,x^{m\alpha+2\delta} + \ldots$$

Dies, mit p multiplicirt, giebt leicht folgende Relation:

$$\begin{aligned} p^{m+1}{\varkappa}(n+1) &= ap^m{\varkappa}(n+1) + \overset{1}{a}p^m{\varkappa}n + \overset{2}{a}p^m{\varkappa}(n-1) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \overset{n-1}{a}p^m{\varkappa}2 + \overset{n}{a}p^m{\varkappa}1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{m+1}{\varkappa}(n+1) - ap^m{\varkappa}(n+1) &= \overset{1}{a}p^m{\varkappa}n + \overset{2}{a}p^m{\varkappa}(n-1) + \overset{3}{a}p^m{\varkappa}(n-2) + \ldots \\ &\qquad \ldots + \overset{n-1}{a}p^m{\varkappa}2 + \overset{n}{a}p^m{\varkappa}1. \end{aligned}$$

Dies, in die Gleichung für $nap^m\varkappa(n+1)$ gesetzt, giebt nach einigen Reductionen:

$$\frac{n}{m+1}p^{m+1}\varkappa(n+1) =$$

$$\overset{1}{a}p^m\varkappa n + 2\overset{2}{a}p^m\varkappa(n-1) + 3\overset{3}{a}p^m\varkappa(n-2)\ldots$$

$$\ldots + (n-1)\overset{n-1}{a}p^m\varkappa 2 + n\overset{n}{a}p^m\varkappa 1.$$

Addirt man dies zu dem obigen Ausdruck für $p^{m+1}\varkappa(n+1)$; so erhält man:

$$\frac{n+m+1}{m+1}p^{m+1}\varkappa(n+1) =$$

$$ap^m\varkappa(n+1) + 2\overset{1}{a}p^m\varkappa n + 3\overset{2}{a}p^m\varkappa(n-1) + \ldots$$

$$\ldots + n\overset{n-1}{a}p^m\varkappa 2 + (n+1)\overset{n}{a}p^m\varkappa 1.$$

10. Aus dem Vorhergehenden folgt leicht für jedes α und δ:

$$\alpha p^{m+1}\varkappa(n+1) = \alpha ap^m\varkappa(n+1) + \alpha\overset{1}{a}p^m\varkappa n + \ldots$$

$$\ldots + \alpha\overset{n-1}{a}p^m\varkappa 2 + \alpha\overset{n}{a}p^m\varkappa 1,$$

$$\frac{n\delta}{m+1}p^{m+1}\varkappa(n+1) =$$

$$\delta\overset{1}{a}p^m\varkappa n + 2\delta\overset{2}{a}p^m\varkappa(n-1) + \ldots + (n-1)\delta\overset{n-1}{a}p^m\varkappa 2 + n\delta\overset{n}{a}p^m\varkappa 1,$$

$$\frac{\alpha(m+1)+n\delta}{m+1}p^{m+1}\varkappa(n+1) = \alpha ap^m\varkappa(n+1) + (\alpha+\delta)\overset{1}{a}p^m\varkappa n$$

$$+ (\alpha+2\delta)\overset{2}{a}p^m\varkappa(n-1)\ldots + (\alpha+(n-1)\delta)\overset{n-1}{a}p^m\varkappa 2 + (\alpha+n\delta)\overset{n}{a}p^m\varkappa 1.$$

11. Hierin setze man für p irgend eine Potenz p^f, so daß also statt p^m die Potenz p^{mf} gesetzt werden muß; so erhält man, wenn zugleich $p^f\varkappa 1, p^f\varkappa 2, \ldots$ für $a, \overset{1}{a}, \ldots$ gesetzt wird,

$$\frac{\alpha(m+1)+n\delta}{m+1}p^{(m+1)f}\varkappa(n+1) = \alpha p^f\varkappa 1 \,.\, p^{fm}\varkappa(n+1)$$

$$+ (\alpha+\delta)p^f\varkappa 2 \,.\, p^{fm}\varkappa n + (\alpha+2\delta)p^f\varkappa 3 \,.\, p^{fm}\varkappa(n-1)\ldots\ldots$$

$$+ (\alpha+(n-1)\delta)p^f\varkappa n \,.\, p^{fm}\varkappa 2 + (\alpha+n\delta)p^f\varkappa(n+1) \,.\, p^{fm}\varkappa 1,$$

woraus ferner für $fm = g$, $m = \frac{g}{f}$ leicht erhalten wird, für jedes f und g:

$$\frac{\alpha(f+g)+nf\delta}{f+g}p^{f+g}\varkappa(n+1) = \alpha p^f\varkappa 1 \,.\, p^g\varkappa(n+1)$$

$$+ (\alpha+\delta)p^f\varkappa 2 \,.\, p^g\varkappa n + (\alpha+2\delta)p^f\varkappa 3 \,.\, p^g\varkappa(n-1)\ldots\ldots$$

$$+ (\alpha+(n-1)\delta)p^f\varkappa n \,.\, p^g\varkappa 2 + (\alpha+n\delta)p^f\varkappa(n+1) \,.\, p^g\varkappa 1.$$

12. Sey nun wieder

$$y^{\beta} = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \ldots = p,$$

$$x^{\gamma} = Ay^{\frac{\gamma\beta}{\alpha}} + By^{\frac{\beta(\gamma+\delta)}{\alpha}} + Cy^{\frac{\beta(\gamma+2\delta)}{\alpha}} + \ldots = q;$$

so ist nach dem polynomischen Lehrsatze:

$$y^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}} = p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1\, x^{\gamma} + p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 2\, x^{\gamma+\delta} + p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 3\, x^{\gamma+2\delta} + \ldots$$

Da nun ferner $x^{\gamma} = q$ ist; so ist

$$x = q^{\frac{1}{\gamma}},\quad x^{\gamma+\delta} = q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}},\quad x^{\gamma+2\delta} = q^{\frac{\gamma+2\delta}{\gamma}},\ \text{ꝛc.}$$

Entwickelt man also diese Potenzen von x, indem man in der Reihe für x^{γ} nach und nach $\gamma+\delta$, $\gamma+2\delta$, $\gamma+3\delta$, ꝛc. für γ setzt, substituirt die erhaltenen Ausdrücke in die Entwickelung von $y^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}$, und setzt dann die Coefficienten gleicher Potenzen von y auf beiden Seiten einander gleich; so erhält man folgende Gleichungen:

$$0 = Ap^{\frac{\gamma}{\alpha}} . \times 1 - 1,$$

$$0 = Bp^{\frac{\gamma}{\alpha}} . \times 1 + q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}} . \times 1 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} . \times 2,$$

$$0 = Cp^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 + q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}} . \times 2 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} . \times 2 + q^{\frac{\gamma+2\delta}{\gamma}} . \times 1 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = Np^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 + q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}} . \times n . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 2 + q^{\frac{\gamma+2\delta}{\gamma}} . \times (n-1) . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 3 + \ldots$$

$$\ldots + q^{\frac{\gamma+n\delta}{\gamma}} . \times 1 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times (n+1).$$

Hieraus lassen sich nun A, B, C, ꝛc. auf folgende Art bestimmen.

13. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$A = \frac{1}{p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1}$$

Aber nach dem polynomischen Lehrsatze:

$$p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \varkappa 1 = a^{\frac{\gamma}{\alpha}}, \quad p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \cdot \varkappa 1 = a^{-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Also

$$A = a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 = q \varkappa 1 = x^{\gamma} \varkappa 1.$$

14. Folglich, wenn man $\gamma + \delta$ für γ setzt:

$$q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}} \varkappa 1 = x^{\gamma+\delta} \varkappa 1 = \frac{\gamma+\delta}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \varkappa 1.$$

Also nach der zweiten Gleichung in (12):

$$o = B p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \varkappa 1 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} 2.$$

Nach (11.) ist aber, wenn man γ für α, $\frac{\gamma}{\alpha}$ für f, und $-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}$ für g setzt, indem man noch zugleich beiderseitig mit $\gamma + \delta$ dividirt:

$$o = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \varkappa 2 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \varkappa 1 . p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 2,$$

woraus, verglichen mit der vorhergehenden Gleichung unmittelbar folgt:

$$B = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \varkappa 2 = q \varkappa 2 = x^{\gamma} \varkappa 2.$$

15. Folglich, wenn man hier $\gamma + \delta$ und in (13.) $\gamma + 2\delta$ für γ setzt:

$$q^{\frac{\gamma+\delta}{\gamma}} \varkappa 2 = \frac{\gamma+\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \varkappa 2,$$

$$q^{\frac{\gamma+2\delta}{\gamma}} \varkappa 1 = \frac{\gamma+2\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \varkappa 1.$$

Also nach der dritten Gleichung in (12.):

$$o = Cp^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \varkappa 2 \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 2$$

$$+ \frac{\gamma+2\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 3.$$

Mittelst ähnlicher Verwandlungen wie vorher aber, nur daß jetzt $-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}$ für g gesetzt wird, nach (11.)

$$o = \frac{\gamma}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \varkappa 3 \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \varkappa 2 \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 2$$

$$+ \frac{\gamma+2\delta}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 3,$$

woraus, mit der ersten Gleichung verglichen, sogleich:

$$C = \frac{\gamma}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \varkappa 3 = q \varkappa 3 = x^{\gamma} \varkappa 3.$$

16. Das Gesetz, und wie man weiter gehen kann, erhellet nun schon. Es ist nämlich

$$N = \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \varkappa(n+1) = q \varkappa (n+1) = x^{\gamma} \varkappa (n+1).$$

Dies Gesetz allgemein zu beweisen, nehmen wir an, es gelte bis $M = q \varkappa n$; so erhalten wir, auf ähnliche Art wie vorher, wenn wir in den Ausdrücken der einzelnen Coefficienten vom nten bis zum 1ten nach und nach $\gamma + \delta$, $\gamma + 2\delta$, $\gamma + 3\delta, \ldots \gamma + n\delta$ für γ setzen, und die erhaltenen Ausdrücke in die allgemeine Gleichung (12.) für N substituiren:

$$o = Np^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \varkappa n \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 2$$

$$+ \frac{\gamma+2\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \varkappa (n-1) \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 3$$

$$+ \frac{\gamma+3\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \varkappa (n-2) \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\gamma+n\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa (n+1).$$

Ferner setze man in (11.) γ für α, $\frac{\gamma}{\alpha}$ für f, $-\frac{\gamma + n\delta}{\alpha}$ für g, und dividire zugleich beiderseitig mit $\gamma + n\delta$; so erhält man leicht:

$$o = \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (n+1) \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1$$

$$+ \frac{\gamma+\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times n \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 2$$

$$+ \frac{\gamma+2\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (n-1) \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 3$$

$$+ \frac{\gamma+3\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (n-2) \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\gamma+n\delta}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times 1 \,.\, p^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times (n+1)$$

Folglich, wenn man beide Gleichungen mit einander vergleicht, offenbar:

$$N = \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (n+1) = q \times (n+1),$$

so daß also das bemerkte Gesetz für $qk(n+1)$ gilt, wenn es bis qkn gilt, und demnach allgemein ist.

Unmittelbar hieraus, und aus der Form der Reihe für x^{γ}, ergiebt sich auch:

$$q\gamma(n+1) = \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} k(n+1) \,.\, y^{\frac{\beta(\gamma+n\delta)}{\alpha}}$$

worin folgender höchst merkwürdiger Satz enthalten ist:

Das $(n+1)$te Glied der Reihe, in welche sich x^{γ} nach Potenzen von y entwickeln läßt, ist ein Product des $(n+1)$ten Coefficienten der Potenz $p^{-\frac{\gamma}{\gamma+n\delta}}$ der gegebenen Reihe p, in die Größe $\frac{\gamma}{\gamma+n\delta} y^{\frac{\beta(\gamma+n\delta)}{\alpha}}$.

Nach diesem Satze ist die independente Bestimmung

der Glieder der umgekehrten Reihe mittelst des polynomischen Lehrsatzes jederzeit möglich.

17. Der Erfinder dieses merkwürdigen Satzes ist H. A. Rothe, welcher ihn in der Schrift: Formulae de serierum reversione demonstratio universalis signis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita. Lips. 1793. p. 11., die in dieser Lehre als classisch anzusehen ist, vorgetragen hat. Es sind darin zwei Beweise gegeben, wovon jedoch der erste die Differentialrechnung voraussetzt. Der hier gegebene Beweis wird einiges Eigenthümliche haben.

18. Schon vor Rothe hat indeß H. C. W. Eschenbach eine independente Entwickelung der Umkehrungsreihe gefunden, und, jedoch ohne Beweis, in der Schrift: De serierum reversione formulis analytico-combinatoriis exhibita. Lips. 1789. vorgetragen. Seine Formel folgt unmittelbar aus dem Rothe'schen Satze. Bezeichnen wir nämlich $\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}$ durch ${}^n\mu$, den mten Binomial-Coefficienten der nten Potenz durch (n_m), oder, wenn n mehrtheilig ist, auch blos durch $(n)_m$, und die bestimmten Combinationen wie oben (7.); so ist nach dem Polynomialtheorem (Thl. III. S. 834. 835.):

$$p^{-{}^n\mu}k(n+1) =$$

$$a^{-{}^n\mu}\cdot\left\{\frac{(-{}^n\mu_1)\,[1]\overset{n}{C}_1}{a} + \frac{(-{}^n\mu_2)\,[2]\overset{n}{C}_2}{a^2} + \frac{(-{}^n\mu_3)\,[3]\overset{n}{C}_3}{a^3} + \ldots + \frac{(-{}^n\mu_n)\,[n]\overset{n}{C}_n}{a^n}\right\}$$

für den Zeiger

$$\binom{b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ \ldots}{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots}.$$

Ueberhaupt aber ist:

$$(-n_m) = \frac{(-n)(-n-1)\ldots(-n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$$

$$= \pm\frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\cdot\frac{n}{m}$$

$$= \pm(n+m-1)_{m-1}\cdot\frac{n}{m}$$

$\pm$ wenn m $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Folglich

$$p^{-{}^n\mu} k(n+1) =$$

$$-{}^n\mu a^{-{}^n\mu}\left\{\frac{[1]\overset{n}{C}_1}{a} - \frac{({}^n\mu+1)_1 \cdot [2]\overset{n}{C}_2}{2a^2} + \frac{({}^n\mu+2)_2 \cdot [3]\overset{n}{C}_3}{3a^3} \ldots\ldots \mp \frac{({}^n\mu+n-1)_{n-1}\cdot[n]\overset{n}{C}_n}{na^n}\right\}$$

Aber (16.)

$$q\tau(n+1) = \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-{}^n\mu} \varkappa(n+1)\left(y^\beta\right)^{{}^n\mu}.$$

Folglich, da für jedes n:

$${}^n\mu \cdot \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} = \frac{\gamma+n\delta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} = \frac{\gamma}{\alpha} = {}^0\mu$$

ist:

$$q\tau(n+1) =$$

$$-{}^0\mu\left(\frac{y^\beta}{a}\right)^{{}^n\mu} \cdot \left\{\frac{[1]\overset{n}{C}_1}{a} - \frac{({}^n\mu+1)_1 \cdot [2]\overset{n}{C}_2}{2a^2} + \frac{({}^n\mu+2)_2 \cdot [3]\overset{n}{C}_3}{3a^3} \ldots\ldots \mp \frac{({}^n\mu+n-1)_{n-1}\cdot[n]\overset{n}{C}_n}{na^n}\right\}$$

welches die Eschenbachische Formel ist.

19. Eschenbach fand also zuerst die independente Entwickelung der Umkehrungsreihe. Den Beweis vermochte er nicht allgemein zu führen. Rothe suchte denselben, und kam dabei zugleich auf die obige merkwürdige Verbindung der Umkehrungsreihe mit dem Polynomialtheorem. Die Formel des erstern nennt man auch die combinatorisch-analytische Formel, die des Letztern die Localformel zur Reversion der Reihen. Zu bemerken ist jedoch noch, daß auch Hindenburg die Reduction der Eschenbach'schen Reversionsformel auf das Polynomialtheorem für sich gefunden hat, wie er selbst: Problema solutum maxime universale sd serierum rever-

sionem formulis localibus et combinatorio-analyticis absolvendam paralipomenon. Lips. 1793. p. VIII. sagt.

20. Sey, um ein Beispiel zu geben,

$$y = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} = p;$$

so giebt der binomische Lehrsatz:

$$p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} k(n+1) =$$

$$\pm \frac{(\gamma+n\delta)(\gamma+n\delta+\alpha)\ldots(\gamma+n\delta+(n-1)\alpha)}{\alpha.2\alpha.3\alpha\ldots n\alpha}.a^{-\frac{\gamma+n\delta+\alpha}{\alpha}} b^n$$

$\pm$ wenn n $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Folglich mittelst der Localformel nach einigen leichten Reductionen:

$$x^{\gamma} = a^{-\frac{\gamma}{\alpha}} y^{\frac{\gamma}{\alpha}} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{\alpha} a^{-\frac{\alpha+\delta}{\alpha}} b y^{\frac{\delta}{\alpha}} \right.$$

$$+ \frac{\gamma(\gamma+2\delta+\alpha)}{\alpha.2\alpha} a^{-\frac{2(\alpha+\delta)}{\alpha}} b^2 y^{\frac{2\delta}{\alpha}}$$

$$\left. - \frac{\gamma(\gamma+3\delta+\alpha)(\gamma+3\delta+2\alpha)}{\alpha.2\alpha.3\alpha} a^{-\frac{3(\alpha+\delta)}{\alpha}} b^3 y^{\frac{3\delta}{\alpha}} \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

21. Hat man nun die Gleichung

$$1 = \frac{A}{x^{\lambda}} + \frac{B}{x^{\mu}}, \quad \frac{1}{A} = x^{-\lambda} + \frac{B}{A} x^{-\mu};$$

so ergiebt sich, verglichen mit obiger allgemeinen Gleichung, für $y = \frac{1}{A}$, $a = 1$, $b = \frac{B}{A}$, $\alpha = -\lambda$, $\alpha + \delta = -\mu$, $\delta = -\alpha - \mu = \lambda - \mu$, leicht:

$$x^{\gamma} = A^{\frac{\gamma}{\lambda}} + \frac{\gamma}{\lambda} A^{\frac{\gamma-\mu}{\lambda}} B + \frac{\gamma(\gamma+\lambda-2\mu)}{\lambda.2\lambda} A^{\frac{\gamma-2\mu}{\lambda}} B^2$$

$$+ \frac{\gamma(\gamma+2\lambda-3\mu)(\gamma+\lambda-3\mu)}{\lambda.2\lambda.3\lambda} A^{\frac{\gamma-3\mu}{\lambda}} B^3 + \ldots$$

woraus für $\gamma = 1$ leicht eine Wurzel der Gleichung

$$1 = \frac{A}{x^{\lambda}} + \frac{B}{x^{\mu}}$$

erhalten wird, und so die Lambertische Reihe (Thl. III. S. 437.), wegen deren Beweis auf den Artikel: Reihe, verwiesen wird, wo derselbe aber nicht gegeben, als bewiesen anzusehen ist.

22. In Bezug auf die Reihe

$$\operatorname{Arc\,tang} x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots = y = p,$$

(Cyclometrie. 10.) setze man $\alpha = 1$, $\delta = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$; so giebt die Eschenbachische Formel:

$$\begin{aligned} x = y &- [1]\overset{1}{\underset{1}{C}}y^3 \\ &- \left\{[1]\overset{2}{\underset{1}{C}} - \tfrac{1}{2}(6_1)[2]\overset{2}{\underset{2}{C}}\right\}y^5 \\ &- \left\{[1]\overset{3}{\underset{1}{C}} - \tfrac{1}{2}(8_1)[2]\overset{3}{\underset{2}{C}} + \tfrac{1}{3}(9_2)[3]\overset{3}{\underset{3}{C}}\right\}y^7 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- \left\{\begin{array}{l}[1]\overset{n}{\underset{1}{C}} - \tfrac{1}{2}(2n+2)_1\cdot[2]\overset{n}{\underset{2}{C}} + \tfrac{1}{3}(2n+3)_2\cdot[3]\overset{n}{\underset{3}{C}} \\ - \ldots \mp \frac{1}{n}(3n)_{n-1}\cdot[n]\overset{n}{\underset{n}{C}} - \ldots\ldots\end{array}\right\}y^{2n+1} \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

für den Zeiger:

$$\left(\begin{array}{llll} -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{5}, & -\frac{1}{7}, & +\frac{1}{9}, \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \end{array}\right).$$

Aber, wenn $\overset{1}{\mathfrak{B}}$, $\overset{2}{\mathfrak{B}}$, $\overset{3}{\mathfrak{B}}$, rc. die Bernoullischen Zahlen bedeuten, (Cyclometrie. 17.):

$$\begin{aligned} x = \operatorname{tang} y &= \frac{4(4-1)\overset{1}{\mathfrak{B}}}{1.2}y + \frac{4^2(4^2-1)\overset{2}{\mathfrak{B}}}{1\ldots4}y^3 \\ &+ \cdots + \frac{4^{n+1}(4^{n+1}-1)\overset{n+1}{\mathfrak{B}}}{1\ldots(2n+2)}y^{2n+1} + \ldots \end{aligned}$$

Folglich $\overset{n+1}{\mathfrak{B}} =$

$$-\frac{1.2..(2n+2)}{4^{n+1}(4^{n+1}-1)}\left\{\begin{array}{l}[1]\overset{n}{\underset{1}{C}} - \tfrac{1}{2}(2n+2)_1\cdot[2]\overset{n}{\underset{2}{C}} \\ \qquad + \tfrac{1}{3}(2n+3)_2\cdot[3]\overset{n}{\underset{3}{C}} - \ldots \mp \frac{1}{n}(3n)_{n-1}\cdot[n]\overset{n}{\underset{n}{C}}\end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{llll} -\frac{1}{3}, & +\frac{1}{5}, & -\frac{1}{7}, & +\frac{1}{9}, \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, \ldots \end{array}\right)$$

ein independenter combinatorischer Ausdruck für die (n+1)te Bernoullische Zahl. Einen andern habe ich S. 93. mei=

ner Mathematischen Abhandlungen. Altona. 1822. gegeben.

23. Sey nun wieder folgende Gleichung gegeben:

$$a_1 y^{\alpha_1} + b_1 y^{\alpha_1 + \delta_1} + c_1 y^{\alpha_1 + 2\delta_1} + \ldots$$
$$= ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \ldots,$$

Die erste Reihe werde durch q, die zweite durch p bezeichnet, und z sey eine, beiden Reihen gleiche Größe. Man soll x^{γ} nach Potenzen von y entwickeln. Nach der Localformel ist

$$x^{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 z^{\frac{\gamma}{\alpha}} + \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \times 2 z^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}} \times 3 z^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+n\delta} p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (n+1) z^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und nach dem Polynomialtheorem

$$z^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} = q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times 1 y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1}$$
$$+ q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times 2 y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1 + \delta_1}$$
$$+ q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times 3 y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1 + 2\delta_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}} \times (m+1) y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1 + m\delta_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dies, in die vorige Reihe substituirt, giebt:

$$x^{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 \left\{ q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 1 y^{\frac{\gamma}{\alpha}\alpha_1} + q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times 2 y^{\frac{\gamma}{\alpha}\alpha_1 + \delta_1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \times (m+1) y^{\frac{\gamma}{\alpha}\alpha_1 + m\delta_1} + \ldots\ldots \right\}$$

$$+\frac{\gamma}{\gamma+\delta}\,p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 2\left\{\begin{array}{l} q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 1\,y^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}\alpha_1} + q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 2\,y^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}\alpha_1+\delta_1} + \dots \\ \dots + q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa(m+1)\,y^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}\alpha_1+m\delta_1} + \dots \end{array}\right\}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{\gamma}{\gamma+n\delta}\,p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\varkappa(n+1)\left\{\begin{array}{l} q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\varkappa 1\,y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1} \\ + q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\varkappa 2\,y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1+\delta_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ + q^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\varkappa(m+1)\,y^{\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}\alpha_1+m\delta_1} \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

$$\text{2c.} \qquad \text{2c.}$$

Diese Reihe giebt Hindenburg in dem schon oben (19.) angeführten ad serierum reversionem paralipomenon. p. III., dem Wesentlichen nach eben so, nur mit Anwendung des Zeichens ${}^{n}\mu$ (18.).

24. Folglich für $\alpha = \alpha_1$, $\delta = \delta_1$:

$$x^{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma}\,p^{-\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 1\,y^{\gamma}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{\gamma}{\gamma}\,p^{-\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 2 \\ + \frac{\gamma}{\gamma+\delta}\,p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 2 \,.\, q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 1 \end{array}\right\} y^{\gamma+\delta}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{\gamma}{\gamma}\,p^{-\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}}\varkappa 3 \\ + \frac{\gamma}{\gamma+\delta}\,p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 2 \,.\, q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}\varkappa 2 \\ + \frac{\gamma}{\gamma+2\delta}\,p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\varkappa 3 \,.\, q^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}\varkappa 1 \\ + \dots\dots\dots \end{array}\right\} y^{\gamma+2\delta}$$

und für $\delta = 1$:

$$x^\gamma = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 . y^\gamma$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 2 \\ + \frac{\gamma}{\gamma+1} p^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} \varkappa 2 \,.\, q^{\frac{\gamma+1}{\alpha}} \varkappa 1 \end{array} \right\} y^{\gamma+1}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 3 \\ + \frac{\gamma}{\gamma+1} p^{-\frac{\gamma+1}{\alpha}} \varkappa 2 \,.\, q^{\frac{\gamma+1}{\alpha}} \varkappa 2 \\ + \frac{\gamma}{\gamma+2} p^{-\frac{\gamma+2}{\alpha}} \varkappa 3 \,.\, q^{\frac{\gamma+2}{\alpha}} \varkappa 1 \end{array} \right\} y^{\gamma+2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Dies ist die von Tempelhoff a. a. O. betrachtete Form.

In der Moivre'schen Form ist $\alpha = \gamma = 1$. Also

$$x = p^{-1} \varkappa 1 \,.\, q \varkappa 1 . y$$
$$+ \{ p^{-1} \varkappa 1 \,.\, q \varkappa 2 + \tfrac{1}{2} p^{-2} \varkappa 2 \,.\, q^2 \varkappa 1 \} y^2$$
$$+ \{ p^{-1} \varkappa 1 \,.\, q \varkappa 3 + \tfrac{1}{2} p^{-2} \varkappa 2 \,.\, q^2 \varkappa 2 + \tfrac{1}{3} p^{-3} \varkappa 3 \,.\, q^3 \varkappa 1 \} y^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

25. Eschenbach und Rothe aa. OO. haben noch die Form

$$a_1 y^{\beta\alpha} + b_1 y^{\beta(\alpha+\delta)} + c_1 y^{\beta(\alpha+2\delta)} + \ldots$$
$$= a x^\alpha + b x^{\alpha+\delta} + c x^{\alpha+2\delta} + \ldots$$

betrachtet. Man muß, um x^γ zu entwickeln, $\alpha_1 = \beta\alpha$, $\delta_1 = \beta\delta$ setzen, woraus:

$$x^\gamma = \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 \,.\, q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 . y^{\beta\gamma}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 1 . q^{\frac{\gamma}{\alpha}} \varkappa 2 \\ + \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \varkappa 2 . q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}} \varkappa 1 \end{array} \right\} y^{\beta(\gamma+\delta)}$$

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{\gamma}{\gamma} p^{-\frac{\gamma}{\alpha}}{}_{\varkappa 1} . q^{\frac{\gamma}{\alpha}}{}_{\varkappa 3} \\ + \frac{\gamma}{\gamma+\delta} p^{-\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}{}_{\varkappa 2} . q^{\frac{\gamma+\delta}{\alpha}}{}_{\varkappa 2} \\ + \frac{\gamma}{\gamma+2\delta} p^{-\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}{}_{\varkappa 3} . q^{\frac{\gamma+2\delta}{\alpha}}{}_{\varkappa 1} \\ + \ldots\ldots \end{array}\right\} y^{\beta(\gamma+2\delta)}$$

eine ebenfalls nach Potenzen von y geordnete Reihe.

26. α, welches in den obigen Reihen oft als Divisor vorkommt, darf nicht = o seyn, d. h. die umzukehrende Reihe darf kein constantes Glied enthalten. Wäre indeß z. B.

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

so entwickele man, da

$$y - a = bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

nach dem Obigen x nach Potenzen von y — a = y′, und entwickele sodann nach dem binomischen Lehrsatze die einzelnen Potenzen von y — a. Allgemeine Formeln für diesen Fall würden sehr zusammengesetzt ausfallen.

III. Zusammenhang des Lagrangischen Satzes mit der Reversion der Reihen.

27. Sey zuerst

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

so erhält man, wenn diese Reihe durch fx bezeichnet wird, leicht

$$o = x - y\left(\frac{x}{fx}\right).$$

Dies, mit der Gleichung

$$y = x - z\varphi x,$$

(La Grange's Lehrsatz. Thl. II. S. 624.) verglichen, giebt

$$y = o,\ z = y,\ \varphi x = \frac{x}{fx}.$$

Setzen wir nun ψx (a. a. O.) $= (\varphi x)^\gamma$; so ist auch $\psi y = (\varphi y)^\gamma$, und folglich

$$\frac{\partial \psi y}{\partial y} = \gamma (\varphi y)^{\gamma-1} . \frac{\partial \varphi y}{\partial x},$$

woraus ferner:

$$\frac{\partial^{n-1}\left\{(\varphi y)^n \frac{\partial \psi y}{\partial y}\right\}}{\partial y^{n-1}} = \frac{\partial^{n-1}\left\{\gamma (\varphi y)^{n+\gamma-1} . \frac{\partial \varphi y}{\partial y}\right\}}{\partial y^{n-1}}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma+n} . \frac{\partial^{n-1}\left\{(n+\gamma)(\varphi y)^{n+\gamma-1} . \frac{\partial \varphi y}{\partial y}\right\}}{\partial y^{n-1}}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma+n} . \frac{\partial^{n-1}\left\{\frac{\partial . (\varphi y)^{\gamma+n}}{\partial y}\right\}}{\partial y^{n-1}} = \frac{\gamma}{\gamma+n} . \frac{\partial^n . (\varphi y)^{\gamma+n}}{\partial y^n}.$$

Folglich nach dem La Grange'schen Satze (S. diesen Artikel. 11.):

$$(\varphi x)^\gamma = (\varphi y)^\gamma + \frac{\gamma}{\gamma+1} . \frac{\partial . (\varphi y)^{\gamma+1}}{1 . \partial y} . z + \frac{\gamma}{\gamma+2} . \frac{\partial^2 . (\varphi y)^{\gamma+2}}{1 . 2 \partial y^2} . z^2$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+3} . \frac{\partial^3 . (\varphi y)^{\gamma+3}}{1 . 2 . 3 \partial y^3} . z^3 + \ldots$$

$$\left(\frac{x}{fx}\right)^\gamma = y^\gamma (fy)^{-\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+1} . \frac{\partial\left\{y^{\gamma+1} . (fy)^{-\gamma-1}\right\}}{1 . \partial y} z$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+2} . \frac{\partial^2\left\{y^{\gamma+2} . (fy)^{-\gamma-2}\right\}}{1 . 2 \partial y^2} z^2$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+3} . \frac{\partial^3\left\{y^{\gamma+3} . (fy)^{-\gamma-3}\right\}}{1 . 2 . 3 \partial y^3} z^3 + \ldots$$

wenn man nach dem Obigen o für y, und y für z setzt. Also kann man offenbar auch y und fy mit x und fx vertauschen, wenn man nur nach der Differentation überall $x = 0$ setzt. Also

$$\left(\frac{x}{fx}\right)^\gamma = x^\gamma (fx)^{-\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+1} . \frac{\partial\left\{x^{\gamma+1} . (fx)^{-\gamma-1}\right\}}{1 . \partial x} y$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+2} . \frac{\partial^2\left\{x^{\gamma+2} . (fx)^{-\gamma-2}\right\}}{1 . 2 \partial x^2} y^2$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+3} . \frac{\partial^3\left\{x^{\gamma+3} . (fx)^{-\gamma-3}\right\}}{1 . 2 . 3 \partial x^3} y^3 + \ldots$$

überall nach der Differentiation $x = 0$ gesetzt; oder, wenn man y für fx schreibt:

$$\frac{x^\gamma}{y^\gamma} = x^\gamma y^{-\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+1}\cdot\frac{\partial\left(x^{\gamma+1}.y^{-\gamma-1}\right)}{1.\partial x}y$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+2}\cdot\frac{\partial^2\left(x^{\gamma+2}.y^{-\gamma-2}\right)}{1.2\,\partial x^2}y^2$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+3}\cdot\frac{\partial^3\left(x^{\gamma+3}.y^{-\gamma-3}\right)}{1.2.3\,\partial x^3}y^3 + \dots$$

28. Aber nach dem polynomischen Lehrsatze:

$$y^{-m} = (ax + bx^2 + cx^3 + \dots)^{-m} = p^{-m}$$
$$= p^{-m}\varkappa 1.x^{-m} + p^{-m}\varkappa 2.x^{-m+1} + p^{-m}\varkappa 3.x^{-m+2} + \dots$$

Also

$$x^m y^{-m} = p^{-m}\varkappa 1 + p^{-m}\varkappa 2.x + p^{-m}\varkappa 3.x^2 + \dots$$

und folglich, weil

$$\frac{\partial^n x}{\partial x^n} = \frac{\partial^n.x^2}{\partial x^n} = \dots = \frac{\partial^n.x^{n-1}}{\partial x^n} = 0,$$
$$\frac{\partial^n.x^n}{\partial x^n} = 1.2..n,\ \frac{\partial^n.x^{n+1}}{\partial x^n} = 1..(n+1)x$$

ist:

$$\frac{\partial^n.x^m y^{-m}}{\partial x^n} = 1.2.3\dots n p^{-m}\varkappa(n+1) + 2.3..(n+1)p^{-m}\varkappa(n+2).x + \dots$$

Folglich für $x = 0$:

$$\frac{\partial^n.x^m y^{-m}}{\partial x^n} = 1.2.3..np^{-m}\varkappa(n+1),$$
$$\frac{\partial^n\left(x^{\gamma+n}y^{-\gamma-n}\right)}{1.2.3..n\,\partial x^n} = p^{-\gamma-n}\varkappa(n+1).$$

Also, weil nach der Reihe für $x^m y^{-m}$ offenbar $x^\gamma y^{-\gamma} = p^{-\gamma}\varkappa 1$ ist, für $x = 0$:

$$x^\gamma = \frac{\gamma}{\gamma}p^{-\gamma}\varkappa 1\,y^\gamma + \frac{\gamma}{\gamma+1}p^{-\gamma-1}\varkappa 2\,y^{\gamma+1}$$
$$+ \frac{\gamma}{\gamma+2}p^{-\gamma-2}\varkappa 3\,y^{\gamma+2} + \frac{\gamma}{\gamma+3}p^{-\gamma-3}\varkappa 4\,y^{\gamma+3} + \dots$$

29. Für

$$y^\beta = ax^\alpha + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \dots = p$$

ist

$$y^{\beta} = x^{\alpha}(a + bx^{\delta} + cx^{2\delta} + \ldots)$$

$$y^{\frac{\beta\delta}{\alpha}} = x^{\delta}(a + bx^{\delta} + cx^{2\delta} + \ldots)^{\frac{\delta}{\alpha}}$$

$$= Ax^{\delta} + Bx^{2\delta} + Cx^{3\delta} + \ldots .$$

eine Form, welche der polynomische Lehrsatz rechtfertigt. Also, für

$$x^{\delta} = u,\ y^{\frac{\beta\delta}{\alpha}} = v:$$

$$v = Au + Bu^{2} + Cu^{3} + \ldots = P.$$

Folglich nach (28.)

$$u^{\gamma'}\mathfrak{r}(n + 1) = \frac{\gamma'}{\gamma' + n} P^{-\gamma' - n} \varkappa(n + 1) v^{\gamma' + n}.$$

Setzen wir nun $\gamma' = \frac{\gamma}{\delta}$; so ist

$$u^{\gamma'} = (x^{\delta})^{\frac{\gamma}{\delta}} = x^{\gamma},\quad P = p^{\frac{\delta}{\alpha}};$$

$$P^{-\gamma' - n} = (p^{\frac{\delta}{\alpha}})^{-\frac{\gamma + n\delta}{\delta}} = p^{-\frac{\gamma + n\delta}{\alpha}};$$

$$v = y^{\frac{\beta\delta}{\alpha}},\quad v^{\gamma' + n} = y^{\frac{\beta(\gamma + n\delta)}{\alpha}}.$$

Folglich

$$x^{\gamma}\mathfrak{r}(n + 1) = \frac{\gamma}{\gamma + n\delta} p^{-\frac{\gamma + n\delta}{\alpha}} \varkappa(n + 1) y^{\frac{\beta(\gamma + n\delta)}{\alpha}}$$

die Rothe'sche Localformel.

30. Diese Ableitung dieser wichtigen Formel aus dem La Grange'schen Satze ist von J. F. Pfaff zuerst gegeben, wodurch sich derselbe ein wesentliches Verdienst um die Lehre von der Reihenumkehrung erworben hat. M. s. Archiv für reine und angewandte Mathematik v. Hindenburg. Thl. I. S. 85., vorzüglich aber in Pfaffs Disquisitiones analyticae. Helmst. 1797. die dritte Abhandlung, welche sich überhaupt sehr ausführlich über das Polynomialtheorem und die Reversion der Reihen ver-

breitet. Bemerkt muß jedoch werden, daß auch schon E. G. Fischer (Theorie der Dimensionszeichen II. Halle. 1792. S. 171 — 176.) den Zusammenhang der Reversion der Reihen mit dem Lagrange'schen Satze im Allgemeinen gezeigt hat.

31. Endlich hat nun auch Rothe (Archiv. d. r. u. ang. M. I. S. 442.) umgekehrt aus der Localformel für die Reversion der Reihen den La Grange'schen Satz abgeleitet. Sey nämlich

$$y = x - z\varphi x, \quad x = y + z\varphi x,$$

oder, wenn man $z\varphi x = v$ setzt:

$$x = y + v, \quad z = \frac{v}{\varphi(y + v)}.$$

Folglich nach dem Taylor'schen Satze:

$$z^{-1} = \frac{\varphi(y + v)}{v}$$

$$= \frac{1}{v}\left\{ \varphi y + \frac{\partial \varphi y}{1.\partial y} v + \frac{\partial^2 \varphi y}{1.2\partial y^2} v^2 + \ldots \right\}$$

$$= \varphi y . v^{-1} + \frac{\partial \varphi y}{1.\partial y} v^0 + \frac{\partial^2 \varphi y}{1.2\partial y^2} v + \ldots = p.$$

Folglich nach der Localformel zur Reversion der Reihen:

$$v^{\gamma}{}_{\tau}(n + 1) = \frac{\gamma}{\gamma + n} p^{\gamma+n}{}_{\varkappa}(n + 1) z^{\gamma+n}$$

da hier $\alpha = \beta = -1$, $\delta = 1$ ist. Nun erhält man aber offenbar $(\varphi(y + v))^m$, wenn man in $(\varphi y)^m$, $y + v$ für y setzt. Also nach dem Taylor'schen Satze:

$$p^m = \frac{(\varphi(y + v))^m}{v^m}$$

$$= (\varphi y)^m . v^{-m} + \frac{\partial . (\varphi y)^m}{1 . \partial y} v^{-m+1} + \frac{\partial^2 . (\varphi y)^m}{1 . 2\partial y^2} v^{-m+2} + \ldots .$$

$$p^m{}_{\varkappa}(n+1) = \frac{\partial^n . (\varphi y)^m}{1 . 2 . 3 .. n \partial y^n},$$

$$v^{\gamma}{}_{\tau}(n + 1) = \frac{\gamma}{\gamma + n} . \frac{\partial^n . (\varphi y)^{\gamma+n}}{1.2.3..n\partial y^n} . z^{\gamma+n}.$$

Aber $\psi x = \psi(y + v) =$

$$\psi y + \frac{\partial \psi y}{1.\partial y} v + \frac{\partial^2 \psi y}{1.2\partial y^2} v^2 + \ldots$$

In diese Reihe muß man nun, um ψx nach Potenzen

von z zu entwickeln, die Potenzen von v, deren allgemeines Glied so eben gefunden, setzen. Es ist aber

für $\gamma = 1,\ 1 + (n-1) = n;$
„ $\gamma = 2,\ 2 + (n-2) = n;$
. . . .
„ $\gamma = n-1,\ n-1+1 = n;$
„ $\gamma = n,\quad n + o = n.$

Also offenbar

$$\psi x\varkappa(n+1) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\partial^{n-1}.(\varphi y)^n}{1..(n-1)\partial y^{n-1}}\cdot\frac{\partial\psi y}{1.\partial y}$$
$$+\frac{2}{n}\cdot\frac{\partial^{n-2}.(\varphi y)^n}{1..(n-2)\partial y^{n-2}}\cdot\frac{\partial^2\psi y}{1.2\,\partial y^2}$$
$$+\frac{3}{n}\cdot\frac{\partial^{n-3}.(\varphi y)^n}{1..(n-3)\partial y^{n-3}}\cdot\frac{\partial^3\psi y}{1.2.3\,\partial y^3}$$
. . . .
$$+\frac{n}{n}.(\varphi y)^n.\frac{\partial^n\psi y}{1..n\,\partial y^n};$$

$$1.2.3\ldots n\psi x\varkappa(n+1) = \frac{\partial^{n-1}.(\varphi y)^n}{\partial y^{n-1}}\cdot\frac{\partial\psi y}{\partial y}$$
$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{\partial^{n-2}.(\varphi y)^n}{\partial y^{n-2}}\cdot\frac{\partial^2\psi y}{\partial y^2}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{\partial^{n-3}.(\varphi y)^n}{\partial y^{n-3}}\cdot\frac{\partial^3\psi y}{\partial y^3}$$
. . . .
$$+(\varphi y)^n.\frac{\partial^n\psi y}{\partial y^n}.$$

Setzt man aber in der Leibnitzischen Reihe (Thl. I. S. 903.) für $\partial^n.xy$ das dortige $x = (\varphi y)^n$, $y = \frac{\partial\psi y}{\partial y}$, und entwickelt $\partial^{n-1}.xy$; so erhält man augenblicklich:

$$\psi x\varkappa(n+1) = \frac{\partial^{n-1}\left\{(\varphi y)^n.\frac{\partial\psi y}{\partial y}\right\}}{1.2.3..n\,\partial y^{n-1}},$$
$$\psi x\tau(n+1) = \frac{\partial^{n-1}\left\{(\varphi y)^n.\frac{\partial\psi y}{\partial y}\right\}}{1.2.3..n\,\partial y^{n-1}}z^n,$$

das allgemeine Glied der La Grangeschen Reihe, wie Thl. II. S. 632., womit also diese Reihe bewiesen.

Ueber die Verbindung der Reversionsformel mit dem La Grange'schen Satze s. m. auch einen Aufsatz von **Hindenburg** im Archiv d. r. u. angew. M. II. S. 359.

IV. Anwendung der Reversionsformeln auf die Auflösung der Gleichungen.

32. Sey

$$o = a + bx + \ldots + ix^{p-1} + kx^{p} + lx^{p+1} + \ldots + mx^{n}$$

irgend eine Gleichung des nten Grades. Hieraus erhält man, vorausgesetzt daß k nicht $=$ o ist, leicht:

$$-k = ax^{-p} + bx^{-(p-1)} + \ldots + ix^{-1} + lx + \ldots + mx^{n-p}$$

$$k = -ax^{-p} - bx^{-(p-1)} - \ldots - ix^{-1} - lx - \ldots - mx^{n-p}$$

Für $\alpha = -p$, $\beta = 1$, $\delta = 1$ und $y = \mp k$ erhält man durch Umkehrung eine nach Potenzen von $\mp k$ geordnete Reihe für x, von denen die eine oder andere besonders brauchbar seyn wird, jenachdem k negativ oder positiv ist. Man kann also mittelst der Reversion der Reihen immer wenigstens so viele Reihenausdrücke für die unbekannte Größe einer Gleichung finden, als in derselben Coefficienten vorkommen, die nicht $=$ o sind, für jede vollständige Gleichung des nten Grades also $n + 1$, eine Zahl, welche sich jedoch leicht auf $2(n + 1)$ steigern läßt, da man sowohl das niedrigste, als höchste Glied der Gleichung als Anfangsglied betrachten kann. Jede Gleichung des nten Grades hat aber immer nur n Wurzeln. Also müssen unter diesen Reihen gleiche vorkommen. Es ist aber gut, ihre Anzahl vervielfältigen zu können, da bei der Anwendung auf numerische Rechnungen die Form der Reihen nicht gleichgültig ist. Durch Division der Gleichung mit einer solchen Zahl, wodurch die Progressionalgröße ein echter Bruch wird, läßt sich die Convergenz der Auflösungsreihe vergrößern. Es erhellet hieraus, daß die Umkehrung der Reihen den Namen resolutio aequationum per series verdient.

33. Sey

$$o = a + bx + cx^{3},$$

eine von dem Gliede mit x^2 befreite cubische Gleichung (Gleichung. 204.). Für die Formen

$$-\frac{a}{b} = x + \frac{c}{b}x^3,\quad -\frac{a}{c} = x^3 + \frac{b}{c}x,\quad -\frac{b}{c} = x^2 + \frac{a}{c}x^{-1}$$

erhält man durch Reversion mittelst der Localformel:

$$x = -\frac{a}{b} + \frac{a^3c}{b^4} - \frac{3a^5c^2}{b^7} + \frac{12a^7c^3}{b^{10}} - \frac{55a^9c^4}{b^{13}} + \frac{273a^{11}c^5}{b^{16}} + \ldots$$

$$x = -\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{b}{3c}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{b^3}{81c^3}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$-\frac{b^4}{243c^4}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{7}{3}} + \frac{4b^6}{6561c^6}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{11}{3}} \ldots$$

$$x = \left(-\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2c}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{2}{2}} - \frac{3a^2}{8c^2}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{a^3}{2c^3}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{8}{2}}$$

$$-\frac{105a^4}{128c^4}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{11}{2}} - \frac{3a^5}{2c^5}\left(-\frac{c}{b}\right)^{\frac{14}{2}} - \ldots$$

indem nämlich für diese drei Formen:

$$y = -\frac{a}{b},\ \beta = 1,\ \alpha = 1,\ \delta = 2;$$

$$y = -\frac{a}{c},\ \beta = 1,\ \alpha = 3,\ \delta = -2;$$

$$y = -\frac{b}{c},\ \beta = 1,\ \alpha = 2,\ \delta = -3;$$

auch, wie hier immer, $\gamma = 1$ zu setzen ist.

34. Wendet man diese Reihen auf die im Artikel, Cardans Regel. (10.), als Beispiel gebrauchte Gleichung:

$$x^3 - 2100x + 24000 = 0$$

an; so erhält man durch die erste und dritte obige Reihe:

x = + 11,4286 ;	x = + 45,82575
+ 0,7108	− 5,71429
+ 0,1326	− 1,06878
+ 0,0330	− 0,08863
+ 0,0094	− 0,00226
+ 0,0029	− 0,00002
+ 0,0003	. . . .
+ 12,3176	+ 38,95177

Die zweite Reihe giebt $x = -52{,}439$; sie convergirt aber vom dritten Glied an fast gar nicht, daher ist das Resultat unsicher. Setzt man aber diese dritte Wurzel = w; so hat man (Gleichung. 151.):

$$-12{,}3176 - 38{,}9518 - w = 0,$$

$$12{,}3176 . 38{,}9518 . w = -24000.$$

Diese Gleichungen geben:

$$w = \left\{ \begin{matrix} -51,2694 \\ -50,0216 \end{matrix} \right\} = -50,6455$$

wo man den letzten Werth erhält, wenn man aus den beiden ersten das Mittel nimmt. Hiernach, und nach Cardans Regel. (10.), sind also die gesuchten Wurzeln:

$$x = \left\{ \begin{matrix} +12,3176 \\ +38,9518 \\ -50,6455 \end{matrix} \right. ; \quad x = \left\{ \begin{matrix} +12,372 \\ +38,318 \\ -50,690 \end{matrix} \right.$$

wo nur die zweiten schon in den Zehntheilen von einander abweichen.

Umkehrung eines Satzes, ist die Verwechselung der Voraussetzung und Folgerung, oder Hypothesis und Thesis, mit einander. Beispiele bietet die Elementargeometrie in Menge dar. Die Beweise der umgekehrten Sätze werden oft indirect oder apagogisch geführt. Der eilfte Grundsatz des Euclides, dessen Beweis in der Lehre von den Parallelen bekanntlich Schwierigkeiten macht (Parallelen. 2.), ist eigentlich die Umkehrung von Elem. Lib. I. Prop. 27. 28. Wenn c in a und b aufgeht; so geht c auch in a + b auf, ist ein bekannter, leicht zu beweisender, arithmetischer Satz. Der umgekehrte Satz: wenn c in a + b aufgeht; so geht c auch in a und b auf, würde, so allgemein ausgesprochen, offenbar falsch seyn. Man sieht also, daß nicht alle Sätze sich umkehren lassen. Das Weitere und Allgemeinere hierüber ist ganz der Logik zu überlassen. In der Mathematik braucht man nicht im Allgemeinen zu wissen, welche Sätze sich umkehren lassen, da alle umgekehrte Sätze bewiesen werden, wie auch Euclid immer thut. Les réciproques de la Géométrie etc. par Garnier. 2ième édition, worin die umgekehrten Sätze der Geometrie gesammelt sind, werden Anfängern zu einer guten Uebung in den Elementen der Geometrie dienen.

Umschriebene Figur. Eine von geraden Linien oder ebenen Flächen eingeschlossene Figur (s. den Art. Fi-

gur) heißt einer, von einer krummen Linie oder krummen Fläche eingeschlossenen, Figur umschrieben (circumscripta), wenn alle Seitenlinien oder Seitenflächen der erstern Berührende des Umfangs oder der Oberfläche der letztern, welche dann der erstern eingeschrieben (inscripta) heißt, sind. In dem nach Wolf benannten mathematischen Lexicon (Thl. I. S. 1367.) heißen erstere umschreibende, letztere umschriebene Figuren. Eine geradlinige oder eine von ebenen Flächen eingeschlossene Figur heißt einer Figur von derselben Art umschrieben, und letztere der erstern eingeschrieben, wenn alle Seiten und Seitenflächen der erstern durch die Spitzen und Ecken der letztern gehen. Das, dem Hypsikles beigelegte, funfzehnte Buch der Elemente handelt von der Einschreibung der regulären Körper in einander, und auch in dem von Candalla hinzugefügten sechszehnten Buche kommen mehrere Sätze über die bei solchen Körpern statt findenden Verhältnisse vor.

Umschriebene Hyperbel, (Hyperbola circumscripta) nennt Newton bei seiner Aufzählung der Linien der dritten Ordnung eine besondere Gattung der Linien dieser Ordnung, worüber der Artikel Hyperbel höherer Art zu vergleichen.

Umwandlung, s. Umformung.

Unabhängige veränderliche Größe, s. Veränderliche Größe und Veränderung der unabhängigen veränderlichen Größe.

Unarische symmetrische Functionen, s. Symmetrische Function. Thl. IV. S. 861.

Unbegränzt, heißt eine Linie oder Fläche, wenn man sie sich willkührlich verlängert oder erweitert denken kann. Die Schenkel der Parabel und Hyperbel kann man sich als unbegränzt vorstellen. Die Fläche des Kreises wird durch seine Peripherie begränzt; eben so die Ellipse. Eine Linie wird immer durch zwei Punkte, eine Fläche durch Linien begränzt. Die Seitenfläche des Kegels, des para-

bolischen und hyperbolischen Konoids, kann man sich als unbegränzt vorstellen. Mit dem Begriffe eines geometrischen Körpers ist immer unmittelbar die Vorstellung der Begränzung (von Flächen) nach allen Seiten hin verbunden. Der völlig unbegränzte Körper wäre kein Körper mehr, sondern der Raum selbst.

Unbekannte Glieder einer Gleichung sind die Glieder derselben, welche unbekannte Größen enthalten.

Unbekannte Größen in einer oder mehreren Gleichungen sind diejenigen in denselben vorkommenden Größen, welche mittelst der in der Aufgabe gegebenen Größen, und mit Hülfe der Gleichungen selbst, den Bedingungen der Aufgabe gemäß, welche durch die Gleichungen analytisch dargestellt werden, bestimmt werden sollen. Man bezeichnet die unbekannten oder gesuchten Größen immer durch die letztern kleinen lateinischen Buchstaben x, y, z, v, w,...., die gegebenen oder bekannten Größen dagegen durch a, b, c, d,...., obgleich bei weitläufigen Aufgaben zuweilen auch noch andere Bezeichnungen nöthig werden, die sich aber immer leicht ergeben, und nur in jedem Fall möglichst einfach und naturgemäß zu wählen sind. Soll die Aufgabe bestimmt seyn, so müssen sich aus den Bedingungen, deren Erfüllung sie verlangt, immer eben so viele Gleichungen ableiten lassen, als unbekannte Größen gesucht werden. Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der unbekannten Größen; so ist die Aufgabe unbestimmt (S. unbestimmte Aufgabe; Unbestimmte Analytik), und sie heißt mehr als bestimmt, wenn die Anzahl der Gleichungen größer ist als die Anzahl der unbekannten Größen. S. Wahrscheinlichkeitsrechnung. (77.) Bei den alten, namentlich italiänischen, Algebraisten hieß die unbekannte Größe in einer Gleichung cosa, res. Das Wort wurde entweder ausgeschrieben, oder ein Zeichen gebraucht.

Unbenannte Zahlen sind solche, bei denen die Art der Einheit, auf welche sie sich beziehen, ganz unbestimmt gelassen wird, bei denen es nur auf die Menge oder

Anzahl ihrer Einheiten, nicht auf deren besondere Beschaffenheit ankommt. Durch Verbindung einer unbenannten Zahl mit einer gewissen Einheit entsteht eine benannte Zahl. So ist z. B. zwölf eine unbenannte Zahl, und zwölf Thaler eine benannte Zahl, welche durch die Verbindung der unbenannten Zahl zwölf mit dem Thaler als Einheit entsteht. Unbenannte Zahlen heißen auch abstracte Zahlen, oder Zahlen in abstracto; benannte Zahlen dagegen concrete Zahlen, oder Zahlen in concreto. S. Zahl.

Unbestimmte Analytik oder Analysis, (Analysis Diophantea; s. unten bei der Geschichte.) ist der Theil der Algebra, welcher sich mit der Auflösung unbestimmter, d. i. solcher algebraischer Aufgaben beschäftigt, bei denen zur Bestimmung der unbekannten Größen weniger Gleichungen als unbekannte Größen gegeben sind. Solche Aufgaben überlassen also immer einige unbekannte Größen der willkührlichen Annahme. Wären nämlich m Größen aus m — n Gleichungen zu bestimmen; so nehme man n unbekannte Größen willkührlich an, setze ihre Werthe in die gegebenen m — n Gleichungen, und bestimme aus denselben die übrigen m — n unbekannten Größen nach bekannten Methoden. Da man für n unbekannte Größen unendlich viele verschiedene Werthe annehmen kann; so giebt es auch unendlich viele Auflösungen der vorgelegten Aufgabe. Sehr beschränkt wird aber die Anzahl der Auflösungen, wenn man nur nach denen unter ihnen fragt, durch welche die unbekannten Größen in ganzen, auch positiven Zahlen, oder, bei einer gewissen Klasse von Aufgaben, wenigstens in rationalen Zahlen gegeben werden. Diese Auflösungen, nicht etwa durch Aussonderung aus der unendlichen Menge aller Auflösungen, sondern nach gewissen bestimmten Methoden für sich und nur allein, ohne Rücksicht auf die übrigen zu finden, dies ist das eigentliche Geschäft der unbestimmten Analytik und darin besteht ihr Wesen.

1. Sey

$$ax - by = c$$

die allgemeine Form einer Gleichung des ersten Grades mit zwei unbekannten Größen, wobei offenbar anzunehmen verstattet ist, daß a, b, c ganze Zahlen, und unter sich Primzahlen sind. Soll diese Gleichung in ganzen Zahlen auflösbar seyn; so müssen a, b für sich relative Primzahlen seyn. Wäre dies nämlich nicht der Fall, sondern $a = \alpha a'$, $b = \alpha b'$; so wäre

$$ax - by = \alpha(a'x - b'y) = c,$$

und folglich auch c durch α theilbar, also a, b, c nicht relative Primzahlen, wie es doch seyn soll. Ferner erhellet leicht, daß die Auflösung unserer Gleichung in ganzen Zahlen sich auf die Auflösung der Gleichung

$$ap - bq = \pm 1$$

in ganzen Zahlen reducirt, weil man dann offenbar nur

$$x = \pm pc, \quad y = \pm qc$$

zu setzen braucht. Die Auflösung letzterer Gleichung in ganzen Zahlen ist aber immer möglich. Man verwandle nämlich $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch (S. diesen Art. 1.), und bezeichne dessen vorletzten Partialwerth durch $\frac{p}{q}$; so ist, da $\frac{b}{a}$ der letzte Partialwerth ist,

$$ap - bq = \pm 1$$

(Kettenbruch. 6.), wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem die Anzahl der Glieder des Kettenbruchs ohne die etwa in ihm enthaltenen Ganzen, gerade oder ungerade ist. Allgemein erhält man nun, wenn m irgend eine ganze Zahl bezeichnet, für x, y die Werthe:

$$x = \pm pc + mb, \quad y = \pm qc + ma,$$

wie leicht erhellen wird. Die Zahlen a, b kann man immer positiv nehmen, da dem x und y leicht jedes Zeichen gegeben werden kann.

2. Soll man z. B. 100 in zwei Theile theilen, so daß der eine, durch 5 dividirt, 2, der andere, durch 7 dividirt, 4 zum Reste läßt; so sind die beiden Theile von der Form $5x + 2$, $7y + 4$, und die Gleichung ist:

$$5x + 7y = 94, \quad 5x - 7y' = 94,$$

für $y = -y'$. Verwandelt man nun $\frac{7}{5}$ in einen Ket-

tenbruch; so ist der zweite, als vorletzter, Partialwerth $= \frac{3}{2}$. Folglich $p = 3$, $q = 2$, $x = 3.94 + 7m$, $y' = 2.94 + 5m$, oder $x = 282 + 7m$, $y = -188 - 5m$. Verlangt man nun bloß positive Werthe; so muß man m negativ nehmen, und es muß $7m < 282$, $5m > 188$, d. i. $m < \frac{282}{7}$, $> \frac{188}{5}$ seyn. Dies giebt für m die Gränzen -40, -38, und man erhält:

$$x = 16,\ 9,\ 2;\quad 5x + 2 = 82,\ 47,\ 12.$$
$$y = 2,\ 7,\ 12;\quad 7y + 4 = 18;\ 53,\ 88.$$

Also giebt es drei Auflösungen unserer Aufgabe in ganzen positiven Zahlen.

3. Durch Hinzufügung einer gewissen Bedingung kann eine unbestimmte Aufgabe in eine bestimmte verwandelt werden, wie z. B. beim folgenden Falle. Eine Bäuerin bringt Eier zu Markte, mehr als 100, weniger als 200. Ueberzählt sie dieselben nach 15, so bleiben ihr 4, überzählt sie dieselben aber nach 12, 10 Eier übrig. Wie viele Eier hatte sie? Die Gleichung ist

$$15x + 4 = 12y + 10,\quad 15x - 12y = 6,$$
$$5x - 4y = 2.$$

Der vorletzte Werth des Kettenbruchs für $\frac{4}{5}$ ist $= \frac{1}{1}$. Also $p = 1$, $q = 1$, und folglich $x = 2 + 4m$, $y = 2 + 5m$. Also

$$x = 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ \ldots$$
$$y = 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ \ldots$$
$$15x + 4 = 34,\ 94,\ 154,\ 214,\ 274,\ \ldots$$

Folglich die gesuchte Zahl $= 154$.

4. Hat man zwischen n Größen $x, y, z, v, \ldots, n-1$ Gleichungen von der Form:

$$ax - by = c,\ a'x - b'z = c',\ a''x - b''v = c'',\ \text{rc.}$$

so giebt die erste Gleichung für x einen Werth von der Form:

$$x = \alpha + b\varphi.$$

Diesen Werth setze man in die zweite Gleichung, und bestimme φ. Also

$$\varphi = \alpha' + b'\psi.$$

Dies in den Ausdruck für x gesetzt, giebt für x einen Werth von der Form:

$$x = A + B\psi.$$

Diesen Werth setze man in die dritte Gleichung, und bestimme ψ, wodurch man erhält:

$$\psi = \alpha'' + b''X.$$

Dies in den vorhergehenden Werth von x gesetzt, giebt:

$$x = A' + B'X.$$

Dies wird wieder in die vierte Gleichung gesetzt, und so fortgefahren, bis zu Ende. Hat man nun dadurch den allgemeinen Werth von x gefunden; so ist es, mittelst der gegebenen Gleichungen, auch leicht, die übrigen unbekannten Größen zu bestimmen. Alle Gleichungen müssen immer gehörig reducirt werden. Haben nach der Reduction die Coefficienten der beiden unbekannten Größen in irgend einer Gleichung einen gemeinschaftlichen Factor; so ist die Aufgabe unmöglich, d. h. in ganzen Zahlen nicht auflösbar.

5. Oft läßt sich die Auflösung abkürzen. Man soll z. B. Zahlen finden, welche, durch 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11 dividirt, nach der Reihe die Reste 1, 2, 4, 5, 5, 9, 0 übrig lassen. Hier ist klar, daß, wenn die drei letzten Bedingungen erfüllt sind, es unmittelbar auch die vier ersten seyn werden. Wegen der drei letzten Bedingungen hat man nämlich:

$$9x + 5 = 10y + 9 = 11z.$$

Folglich

$$\frac{9x+5}{3} = 3x + 1 + \tfrac{2}{3},$$

$$\frac{10y+9}{2} = 2y + 4 + \tfrac{1}{2},$$

$$\frac{10y+9}{5} = 2y + 1 + \tfrac{4}{5}.$$

Ferner erhält man leicht $9x = 10y + 4$. Also geht 2 in 9x, folglich auch in x auf (S. Zahl. I. 5.), so daß $x = 2x'$, und folglich

$$\frac{9x+5}{6} = \frac{18x'+5}{6} = 3x' + \tfrac{5}{6},$$

so daß also auch die vierte Bedingung erfüllt ist. Also hat man bloß die beiden Gleichungen

$$9x - 10y = 4;\ 9x - 11z = -5$$

zu erfüllen.

$$\frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9},\ \frac{p}{q} = \frac{1}{1},\ p = 1,\ q = 1;$$

$$x = -4 + 10\varphi.$$

Dies, in die zweite Gleichung gesetzt, giebt:

$$90\varphi - 11z = 31.$$

$$\frac{11}{90} = \cfrac{1}{8+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}},\ \frac{p}{q} = \frac{5}{41},\ p = 5,\ q = 41;$$

$$\varphi = -155 + 11\psi.$$

Folglich $x = -1554 + 110\psi$. Schließt man negative Werthe aus; so ist mindestens zu setzen $\psi = 15$. Dies giebt:

$$x = 96,\ 206,\ 316,\ 426,\ 536,\ \ldots$$

Folglich die kleinste gesuchte Zahl $= 9.96 + 5 = 869$, und die folgende $= 9.206 + 5 = 1859$, u. s. f.

Aufgaben, von der Art der so eben aufgelöseten, hat Clausberg (Demonstrative Rechenkunst. §. 1366.) einen harten Knoten genannt. Erleichterungen besonderer Art gewähren dabei die cyklischen Perioden (S. diesen Art. 19., eine Abhandlung von Hindenburg über dieselben im Leipziger Magazin. 3tes Stück 1786., und ein Aufsatz von Lüdicke im Archiv der r. u. a. Math. Bnd. II. S. 206.)

6. Man kann unsere allgemeine Aufgabe auch auf folgenden Ausdruck bringen. Eine Zahl x zu finden, so daß die Größen

$$\frac{ax - c}{b},\ \frac{a'x - c'}{b'},\ \frac{a''x - c''}{b''},\ \text{rc.}$$

ganze Zahlen werden. Sey z. B. x so zu bestimmen, daß

$$\frac{121x - 41}{504},\ \frac{9x + 1}{35},\ \frac{27x - 11}{16}$$

ganze Zahlen werden. Da, wenn jede einzelne mehrerer Primzahlen in einer Zahl aufgeht, auch deren Product in dieser Zahl aufgehen muß (Zahl. I. 9.); so zerlege man, weil in diesem Falle die Nenner ziemlich groß sind, sie in ihre Primfactoren ($504 = 2^3.3^2.7$, $35 = 7.5$, $16 = 2^4$) und mache die Brüche

$$\frac{121x-41}{2^3},\ \frac{121x-41}{3^2},\ \frac{121x-41}{7},\ \frac{9x+1}{7},\ \frac{9x+1}{5},\ \frac{27x-11}{2^4}$$

zu ganzen Zahlen. Sondert man nun die Ganzen durch Division aus; so erhellet, daß man nur

$$\frac{x-1}{8},\ \frac{4x-5}{9},\ \frac{2x+1}{7},\ \frac{2x+1}{7},\ \frac{4x+1}{5},\ \frac{x-1}{16}$$

zu ganzen Zahlen zu machen braucht. Die erste Bedingung ist in der letzten enthalten, und die dritte und vierte sind einerlei. Also braucht man nur

$$\frac{4x-5}{9},\ \frac{2x+1}{7},\ \frac{4x+1}{5},\ \frac{x-1}{16}$$

zu ganzen Zahlen zu machen, woraus sich folgende Gleichungen ergeben:

$$4x - 9y = 5,\ 2x - 7z = -1,\ 4x - 5v = -1,\ x - 16w = 1.$$

Die letzte giebt für x die Form:

$$x = 16\varphi + 1,$$

und dies, in die dritte gesetzt:

$$64\varphi - 5v = -1,\ \frac{p}{q} = \tfrac{1}{13},\ p = 1;$$

$$\varphi = 5 + 5\psi = 5\psi',\ x = 80\psi' + 1.$$

Folglich, mittelst der zweiten Gleichung:

$$160\psi' - 7z = -3,\ \frac{p}{q} = \tfrac{1}{23},\ p = 1;$$

$$\psi' = 3 + 7X,\ x = 241 + 560X.$$

Also, mittelst der ersten

$$2240X - 9y = -959,\ \frac{p}{q} = \tfrac{1}{249},\ p = 1;$$

$$X = 959 + 9w,\ x = 537281 + 5040w.$$

Will man den kleinsten positiven Werth von x haben; so muß man $w = -106$ setzen, woraus $x = 3041$.

7. Aus der bisherigen Theorie folgt auch das wichtige arithmetische Theorem, daß, wenn $B = ab$, und a, b relative Primzahlen sind, der Bruch $\frac{A}{B}$ immer in zwei Brüche $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ mit den Nennern a, b zerlegt werden kann, weil man nur die unbestimmte Gleichung $A = bx + ay$ aufzulösen braucht, welches immer möglich ist, da a, b relative Primzahlen sind. Haben a, b wieder solche Factoren, so läßt sich die Zerlegung weiter fortsetzen.

8. Hat man nun überhaupt m — 1 Gleichungen mit m unbekannten Größen, z. B. für m = 5:

$$\mathfrak{A}v + Ax + By + Cz + Du = E,$$
$$\mathfrak{A}'v + A'x + B'y + C'z + D'u = E',$$
$$\mathfrak{A}''v + A''x + B''y + C''z + D''u = E'',$$
$$\mathfrak{A}'''v + A'''x + B'''y + C'''z + D'''u = E''';$$

so bestimme man x, y, z, u durch Elimination aus den Gleichungen:

$$Ax + By + Cz + Du = E - \mathfrak{A}v,$$
$$A'x + B'y + C'z + D'u = E' - \mathfrak{A}'v,$$
$$A''x + B''y + C''z + D''u = E'' - \mathfrak{A}''v,$$
$$A'''x + B'''y + C'''z + D'''u = E''' - \mathfrak{A}'''v,$$

wodurch man Ausdrücke von der Form

$$x = \frac{Mv - L}{N}, \quad y = \frac{M'v - L'}{N'}, \quad z = \frac{M''v - L''}{N''}, \quad u = \frac{M'''v - L'''}{N'''}$$

erhält. Dann bestimme man (6.) v so, daß diese Werthe von x, y, z, u ganze Zahlen werden. Die Aufgabe kann unmöglich werden, welches sich beim letzten Theile der Auflösung jederzeit zeigen wird (4.).

Hat man m — n Gleichungen mit m unbekannten Größen; so nehme man n — 1 unbekannte Größen als bekannt an, und bringe die Gleichungen auf die vorige Form; so hat man m — n Gleichungen mit m — (n — 1) = m — n + 1 unbekannten Größen, die man nun wie vorher auflösen kann. Für die als bekannt angenommenen Größen kann man dann alle ganze Zahlen setzen. Nur, wenn die gesuchten Größen auch alle positiv seyn sollten, würde dies noch eine Beschränkung erleiden. Allgemeine Formeln würden sich nur mit großer Weitläufigkeit geben lassen. Einige Beispiele werden das Gesagte deutlich machen.

9. Die gegebenen Gleichungen seyen z. B.

$$3x + 5y + 7z = 560, \quad 9x + 25y + 49z = 2920;$$
$$3x + 5y = 560 - 7z, \quad 9x + 25y = 2920 - 49z;$$
$$7z - 3x = 60, \quad 14z - 5y' = 620,$$

wenn man y' = — y setzt. Die erste Gleichung giebt:

$$z = 60 + 3\varphi = 3.(20 + \varphi) = 3\varphi'.$$

Dies, in die zweite gesetzt:

$$42\varphi' - 5y' = 620;$$
$$\varphi' = -1240 + 5\psi = 5.(-248 + \psi) = 5\psi'.$$

Folglich $z = 15\psi'$, und mittelst der beiden obigen Gleichungen:

$$x = 35\psi' - 20,\ y = -y' = 124 - 42\psi'.$$

Will man nur positive Werthe; so muß seyn

$$\psi' > 0,\ \psi' < \tfrac{124}{42},$$

d. i. $\psi' > 0$, $\psi' < 3$, also bloß $\psi' = 1$, $\psi' = 2$. Dies giebt:

$$x = 15,\ y = 82,\ z = 15;\ x = 50,\ y = 40,\ z = 30$$

für die möglichen Auflösungen unserer Aufgabe in ganzen positiven Zahlen.

10. Hat man die Gleichung

$$5x + 8y + 7z = 50;$$

so erhält man für $y = -y'$:

$$5x - 8y' = 50 - 7z,\ \frac{p}{q} = \tfrac{3}{2},\ p = 3,\ q = 2.$$

Die Anzahl der Glieder des Kettenbruchs, ohne Rücksicht auf die Ganzen, ist ungerade. Also

$$x = -3.(50 - 7z) + 8\varphi,\ y' = -2.(50 - 7z) + 5\varphi,$$

oder

$$x = 21z + 8\varphi - 150,\ y = 100 - 14z - 5\varphi,$$

wo für φ, z alle ganze Zahlen gesetzt werden können. Verlangte man nur positive Werthe; so müßte

$$21z + 8\varphi \geqq 150,\ 14z + 5\varphi \leqq 100$$

seyn, woraus sogleich folgt, daß immer $5\varphi \leqq 100$, $\varphi \leqq 20$ seyn muß. Da $42z + 16\varphi \geqq 300$, $42z + 15\varphi \leqq 300$; so folgt durch Subtraction $\varphi \geqq 0$. Also kann φ nur positiv, und nicht > 20 seyn. Die Gränzen von z wären

$$\frac{300 - 16\varphi}{42} \text{ und } \frac{300 - 15\varphi}{42},$$

deren Unterschied $= \frac{\varphi}{42}$, also noch keine ganze Einheit beträgt, da φ nicht > 20 werden kann. Daher kann z nur zwischen diesen beiden Brüchen enthalten seyn, wenn einer derselben, für φ nicht > 20, eine ganze Zahl wird. Löset man nun jede der Gleichungen

$$150 - 8\varphi = 21\psi,\ 100 - 5\varphi = 14\psi:$$
$$21\psi - 8\varphi' = 150,\ 14\psi - 5\varphi' = 100,$$

für $\varphi' = - \varphi$, in ganzen Zahlen auf; so erhält man für die erste,

$$\varphi = - \varphi' = 1200 - 21X,$$

und für die zweite:

$$\varphi = - \varphi' = 300 - 14X.$$

Die positiven Werthe von φ, welche nicht > 20, sind also $\varphi = 3$; und $\varphi = 6$, $= 20$. Die Gränzen von z wären nach den obigen Formeln 6, $6\frac{1}{14}$; $4\frac{6}{7}$, 5; $-\frac{10}{21}$, 0. Also hat man folgende zusammenstimmende Werthe:

$$\varphi = 3,\ 6,\ 20;\ z = 6,\ 5,\ 0;$$

demnach folgende Auflösungen in positiven ganzen Zahlen:

$$x = 0,\ 3,\ 10;\quad y = 1,\ 0,\ 0;\quad z = 6,\ 5,\ 0.$$

11. Hat man die Gleichungen

$$x + y + z + v = 100,\ 20x + 10y + 4z + v = 200;$$

so erhält man durch Elimination leicht

$$3z = 100 - 19x - 9y.$$

Folglich, wenn man durch 3 dividirt:

$$z = 33 - 6x - 3y - \frac{x - 1}{3}.$$

Also muß $\frac{x-1}{3}$ eine ganze Zahl seyn. Deshalb setze man

$$x - 1 = 3t,\ x = 3t + 1.$$

Dies giebt

$$x = 3t + 1,\ y = y,\ z = 27 - 19t - 3y,$$
$$v = 100 - x - y - z = 72 + 2y + 16t.$$

Für $t = 2$ würde z negativ. Also kann man nur $t = o$, $t = 1$ setzen. Für den ersten Fall erhält man $x = 1$, $y = y$, $z = 27 - 3y$, $v = 72 + 2y$, und für $t = 1$:

$$x = 4,\ y = y,\ z = 8 - 3y,\ v = 88 + 2y.$$

Im ersten Falle darf man also y nicht > 9, im andern nicht > 2 nehmen. Dies giebt im Ganzen 13 Auflösungen in positiven ganzen Zahlen, wenn man nur auch $y = o$ setzt.

12. Die hier angewandte Methode ist eine andere als die vorher gebrauchte. Ist sie auch nicht so allgemein als jene, so wird sie doch auch zuweilen mit Vortheil angewandt. Sie rührt von Euler her, und besteht vorzüg-

lich darin, daß man mit den Coefficienten der zu finden- den Größen so lange dividirt, als es angeht, den bleiben- den Bruch, welcher sich auf eine ganze Zahl bringen lassen muß, einer solchen, die man in die Rechnung einführt, gleich setzt, und hiermit so lange fortfährt, bis kein Bruch mehr vorhanden.

13. Seyen, um dies noch durch ein Beispiel zu erläu- tern, Zahlen zu finden, welche, durch 11 dividirt, 3, durch 19 dividirt, 5 zum Reste lassen; so hat man die Gleichung

$$11x + 3 = 19y + 5, \quad 11x = 19y + 2;$$
$$x = y + \frac{8y + 2}{11} = y + p;$$
$$y = p + \frac{3p - 2}{8} = p + q;$$
$$p = 2q + \frac{2q + 2}{3} = 2q + r;$$
$$q = r - 1 + \frac{r}{2} = r - 1 + s;$$
$$r = 2s.$$

Also, durch rückwärts gehende Bestimmung
$r = 2s$, $q = 3s - 1$, $p = 8s - 2$, $y = 11s - 3$, $x = 19s - 5$,
und folglich die Form der gesuchten Zahlen $= 11x + 3 = 209s - 52$. Die kleinste positive Zahl erhält man $= 157$ für $s = 1$.

Viele nach dieser Methode berechnete Exempel s. m. im zweiten Theile von Eulers Algebra. Kap. 1. u. 2. Auch vergl. m. die Artt. Alligationsrechnung u. Regel (1.), wo auch einige hierher gehörende Exempel vorkommen.

14. Man habe jetzt eine Gleichung mit zwei unbekann- ten Größen, von denen die eine den ersten Grad nicht übersteigt:

$$o = a + bx + a'y + cx^2 + b'xy + dx^3 + c'x^2y + ex^4 + d'x^3y + \ldots$$

so ist

$$y = -\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots}{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 + \ldots}.$$

Um also unsere Gleichung in ganzen Zahlen aufzulösen, muß x so bestimmt werden, daß der Nenner dieses Bruchs,

den wir durch q bezeichnen wollen, im Zähler p aufgeht. Man hat also

$$p = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots,$$
$$q = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4 + \ldots$$

Aus diesen beiden Gleichungen eliminire man x, wodurch zwischen p, q eine Gleichung von der Form

$$o = A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + Gp^3 + \ldots,$$

erhalten wird. Die Coefficienten dieser Gleichung sind ganze rationale Functionen von a, a', b, b', c, c', u. s. f. (Elimination. 10. ff.). Da nun $y = -\frac{p}{q}$ ist; so ist $p = -qy$; welches, in vorhergehende Gleichung gesetzt, giebt:

$$o = A - Bqy + Cq + Dq^2y^2 - Eq^2y + Fq^2 - Gq^3y^3 + \ldots$$

Alle Glieder dieser Gleichung, außer A, enthalten q als Factor. Sollen daher q, y zugleich ganze Zahlen seyn; so muß q in A aufgehen. Man suche daher alle Theiler von A (Theiler einer Zahl. 1. 11.), und setze nach und nach jeden derselben für q in die Gleichung

$$q = a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + \ldots,$$

Alle Gleichungen, welche man hierdurch erhält, löse man auf, und setze die ganzen rationalen Werthe von x, so viel man deren erhält, nach und nach für x; so werden sich leicht diejenigen ergeben, für welche $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl wird. Es erhellet leicht, daß man hierdurch alle Auflösungen unserer Gleichung in ganzen Zahlen erhalten muß, so wie denn auch die Anzahl dieser Auflösungen jederzeit beschränkt seyn wird.

Nur ein Fall läßt sich nach dieser Methode nicht behandeln. Ist nämlich

$$y = -\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots}{a'},$$

so daß $b' = c' = d' = \ldots = o$; so ist in der Gleichung $q = a'$ kein x mehr enthalten, und sie kann also nicht, wie die Methode verlangt, nach x aufgelöset werden. Man muß in diesem Falle x in ganzen Zahlen so bestimmen, daß

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

durch a' theilbar wird. Sey n ein solcher Werth von x;

so erhellet mittelst des binomischen Lehrsatzes leicht, daß für jedes ganze μ auch $n \pm \mu a'$ ein Werth von x seyn wird. Nun erhellet aber leicht, daß, indem man bloß auf die absoluten Werthe der Größen Rücksicht nimmt, wenn $n > \frac{1}{2}a'$ wäre, μ sich immer so bestimmen läßt, daß $n \pm \mu a' < \frac{1}{2}a'$ ist. Man hat nämlich, immer bloß die absoluten Werthe betrachtend, hierzu die beiden Bedingungen:

$$n - \mu a' < \tfrac{1}{2}a', \; n - \mu a' > 0;$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$\mu > \frac{n}{a'} - \tfrac{1}{2}, \; \mu < \frac{n}{a'}.$$

Ist nun n' ein solcher Werth von x, welcher $< \frac{1}{2}a'$; so ist für jedes ganze μ' überhaupt

$$n = n' \pm \mu' a'.$$

Daher versuche man bei allen ganzen Zahlen, welche rücksichtlich ihrer absoluten Werthe nicht $> \frac{1}{2}a'$ sind, ob, wenn man sie für x setzt, $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ durch a' theilbar wird. Sind nun n', n'', n''', u. s. f. diejenigen unter denselben, bei welchen dies eintrifft; so sind

$$n' \pm \mu' a', \; n'' \pm \mu'' a', \; n''' \pm \mu''' a' \; \text{etc.}$$

überhaupt die gesuchten Werthe von x.

Diese Methode lehrt Lagrange in den Zusätzen zu Eulers Algebra. §. IV. T. II. p. 383. der französischen Ausgabe von Garnier (Paris. 1807.), und den Mém. de Berlin. 1768., wo auch noch Mittel gelehrt werden, die Auflösung zu erleichtern.

15. Die gegebene Gleichung sey z. B. $xy + \alpha x + \beta y = \gamma$;

$$y = -\frac{\alpha x - \gamma}{\beta + x}, \; p = \alpha x - \gamma, \; q = \beta + x;$$

$$\alpha\beta + \gamma + p - \alpha q = 0.$$

Sey nun f ein Factor von $\alpha\beta + \gamma$; so ist $f = \beta + x$, $x = f - \beta$;

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha(f - \beta) - \gamma}{f} = \frac{\alpha f - (\alpha\beta + \gamma)}{f},$$

also für jeden Factor von $\alpha\beta + \gamma$ eine ganze Zahl. Sind demnach f, g irgend zwei Factoren von $\alpha\beta + \gamma = fg$; so ist immer

$$x = f - \beta,\ y = -\frac{p}{q} = g - \alpha,$$

eine Auflösung Zahlen unserer Gleichung in ganzen Zahlen.

16. Die Gleichung sey:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = \lambda xy;$$

so ist

$$y = -\frac{\alpha x + \gamma}{\beta - \lambda x},\ p = \alpha x + \gamma,\ q = \beta - \lambda x;$$

$$\alpha\beta + \gamma\lambda - \lambda p - \alpha q = 0.$$

Sey nun $\alpha\beta + \gamma\lambda = fg$; so ist

$$f = \beta - \lambda x,\ x = \frac{\beta - f}{\lambda};$$

$$y = -\frac{p}{q} = -\frac{\alpha(\beta - f) + \gamma\lambda}{\lambda f} = -\frac{\alpha\beta + \gamma\lambda - \alpha f}{\lambda f} = \frac{\alpha - g}{\lambda}.$$

Also müssen die Factoren f, g so beschaffen seyn, daß die Brüche

$$\frac{\beta - f}{\lambda},\ \frac{\alpha - g}{\lambda}$$

ganze Zahlen sind.

Hat man z. B. die Gleichung

$$2x + 3y + 18 = 5xy;$$

so ist $\alpha\beta + \gamma\lambda = 6 + 90 = 96$. Aber $96 = \pm 1 . \pm 96 = \pm 2 . \pm 48 = \pm 3 . \pm 32 = \pm 4 . \pm 24 = \pm 6 . \pm 16 = \pm 8 . \pm 12$, und

$$\frac{3 + 2}{5} = 1,\quad \frac{2 + 48}{5} = 10;$$

$$\frac{3 - 48}{5} = -9,\quad \frac{2 - 2}{5} = 0;$$

$$\frac{3 - 3}{5} = 0,\quad \frac{2 - 32}{5} = -6;$$

$$\frac{3 + 32}{5} = 7,\quad \frac{2 + 3}{5} = 1;$$

$$\frac{3 - 8}{5} = -1,\quad \frac{2 - 12}{5} = -2;$$

$$\frac{3 + 12}{5} = 3,\quad \frac{2 + 8}{5} = 2.$$

Demnach hat man folgende Auflösungen in ganzen Zahlen:

$$x = -9,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 7;$$
$$y = 0,\ -2,\ -6,\ 10,\ 2,\ 1.$$

17. Die vorigen Exempel sind zum Theil von Euler ent-

lehnt. Die nach Lagrange mitgetheilte allgemeine Auflösung (14.), welche immer sicher zum Zweck führt, hat Euler nicht. In besondern Fällen kann man zuweilen kürzer verfahren, wenn man, auf ähnliche Art wie (11. 13.), aus dem Bruche für y die Ganzen durch Division aussondert. Ist z. B.

$$xy + x^2 = 2x + 3y + 29$$

die gegebene Gleichung; so erhält man

$$y = \frac{2x - x^2 + 29}{x - 3} = - x - 1 + \frac{26}{x - 3}.$$

Also muß $x - 3$ ein Theiler von 26 seyn. Die Theiler von 26 sind aber ± 1, ± 2, ± 13, ± 26. Dies giebt

$$x - 3 = \pm 1;\ \begin{matrix} x = 4, & y = 21; \\ x = 2, & y = -29; \end{matrix}$$

$$x - 3 = \pm 2;\ \begin{matrix} x = 5, & y = 7; \\ x = 1, & y = -15; \end{matrix}$$

$$x - 3 = \pm 13;\ \begin{matrix} x = 16, & y = -15; \\ x = -10, & y = 7; \end{matrix}$$

$$x - 3 = \pm 26;\ \begin{matrix} x = 29, & y = -29; \\ x = -23, & y = 21; \end{matrix}$$

als Auflösungen in ganzen Zahlen. Will man nur positive Zahlen; so erhält man nur:

$$x = 4, 5;\ y = 21, 7.$$

18. Sey nun

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = o$$

die allgemeine Form einer Gleichung des zweiten Grades mit zwei unbekannten Größen. Man soll diese Gleichung in rationalen Zahlen auflösen.

Löset man sie nach y wie eine quadratische Gleichung auf; so erhält man für

$$c^2 - 4af = \alpha,\ 2ce - 4bf = \beta,\ e^2 - 4df = \gamma:$$

$$2fy + ex + c = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}.$$

Man sieht also, daß die Aufgabe darauf zurückkommt, x so zu bestimmen, daß $\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$ rational, oder $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ ein vollkommnes Quadrat wird, weil dann offenbar y, welches in obiger Gleichung nur in der ersten Potenz vorkommt, ebenfalls durch einen rationalen Ausdruck bestimmt wird.

19. Man setze also

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = v^2;$$

so erhält man, diese Gleichung nach x auflösend, für

$$4\gamma = A,\ \beta^2 - 4\alpha\gamma = B:\ 2\gamma x + \beta = \sqrt{Av^2 + B},$$

so daß also unsere Aufgabe ferner darauf reducirt ist, v so zu bestimmen, daß $Av^2 + B$ ein vollkommnes Quadrat wird.

20. Hierbei ist nun zunächst zu bemerken, daß, wenn A oder B einen quadratischen Factor hat, derselbe unbeschadet der Allgemeinheit weggelassen werden kann. Wäre nämlich $A = m^2A'$, $B = n^2B'$, und es wäre ein Werth v' von v gefunden, für welchen $A'v^2 + B'$ ein vollkommnes Quadrat ist; so setze man $v = \frac{n}{m}v'$. Dann ist $Av^2 + B = n^2(A'v'^2 + B')$ ebenfalls ein vollkommnes Quadrat. Wir wollen also annehmen, daß A, B schon von ihren quadratischen Factoren befreit seyen. Man braucht nur die Werthe von v' mit $\frac{n}{m}$ zu multipliciren.

21. Setzt man nun $v = \frac{p}{q}$, wo p, q ganze Zahlen sind; so wird

$$Av^2 + B = \frac{Ap^2 + Bq^2}{q^2},$$

und $Av^2 + B$ ist ein vollkommnes Quadrat, wenn $Ap^2 + Bq^2$ es ist. Demnach ist die Aufgabe jetzt auf folgende reducirt:

p und q in ganzen Zahlen so zu bestimmen, daß $Ap^2 + Bq^2$ ein vollkommnes Quadrat wird, oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$Ap^2 + Bq^2 = z^2$$

in ganzen Zahlen aufzulösen.

22. Man kann hierbei Folgendes annehmen:

a) p, q, z haben keinen gemeinschaftlichen Factor, weil, für $p = hp'$, $q = hq'$, $z = hz'$, man durch Division mit h^2 leicht

$$Ap'^2 + Bq'^2 = z'^2$$

als aufzulösende Gleichung erhalten würde.

b) Nicht zwei der Größen p, q, z haben einen

gemeinschaftlichen Factor. Denn für $p = hp'$, $q = hq'$, wo h eine Primzahl seyn mag, erhielte man

$$z^2 = (Ap'^2 + Bq'^2)h^2,$$

und es wäre also, gegen (a), auch z durch h theilbar (Zahl. I. 5.). Wäre dagegen z. B. $z = hz'$, $p = hp'$; so wäre

$$(z'^2 - Ap'^2)h^2 = Bq^2,$$

und Bq^2 hätte folglich den quadratischen Factor h^2. Aber q ist mit p, z relative Primzahl (a), kann also nicht den Factor h, und folglich auch q^2 nicht den Factor h^2 haben (Zahl. I. 2.). Also muß h^2 ein Factor von B seyn (Zahl. I. 7.), welches nicht möglich, da B als von allen seinen quadratischen Factoren befreit vorausgesetzt wird.

c) Ferner sind auch A, q relative Primzahlen. Denn für $A = hA'$, $q = hq'$ wäre

$$z^2 = (A'p^2 + Bhq'^2)h.$$

Folglich hätte z^2 mit q den Factor h gemein, so daß also offenbar auch z und q entweder h selbst, oder einen Divisor von h, als Factor gemein haben würden, gegen (b). Eben so überzeugt man sich, daß auch B, p relative Primzahlen seyn müssen.

23. Man nehme nun an, daß der Coefficient A nicht $<$ B sey, wobei, wie immer auch im Folgenden, nur die absoluten Werthe der Größen berücksichtigt werden, und gebe der Gleichung die Form

$$z^2 - Bq^2 = Ap^2,$$

welches offenbar verstattet ist, da die Gleichung in Bezug auf p und q ganz einerlei Gestalt hat.

24. Wäre nun die Gleichung in ganzen Zahlen auflösbar, so daß sich für z, q ein Paar ganzzahlige Werthe M, N finden ließen; so müßte, da A, q, d. i. A, N, relative Primzahlen sind (22. c.), auch die Gleichung

$$M = Nn - Aq'$$

des ersten Grades mit zwei Unbekannten n, q' in ganzen Zahlen auflösbar seyn (1.), welches für jede zwei Werthe M, N von z, q gilt. Man setze daher überhaupt

$$z = nq - Aq',$$

wo n, q' zwei neue unbestimmte Größen, ebenfalls ganze

Zahlen, sind. Setzt man dies in unsere Gleichung; so erhält man leicht:

$$\frac{(n^2 - B)q^2}{A} - 2nqq' + Aq'^2 = p^2.$$

Es muß also $\frac{(n^2 - B)q^2}{A}$, d. i., weil A, q relative Primzahlen sind (22. c.), $\frac{n^2 - B}{A}$ eine ganze Zahl seyn. Wäre ein Werth von n gefunden, für welchen dieser Bruch eine ganze Zahl würde; so wäre

$$z = nq - Aq',$$

wo q' willkührlich ist.

25. Wir bemerken hier besonders, daß man für n nur alle die ganzzahligen Werthe zu setzen braucht, welche $\frac{1}{2}$A nicht übersteigen. Sind nämlich n', n'', n''', u. s. f. die Werthe von n, welche $\frac{1}{2}$A nicht übersteigen und $n^2 - B$ durch A theilbar machen; so sind auch $n' \pm \mu' A$, $n'' \pm \mu'' A$, $n''' \pm \mu''' A$, ꝛc. Werthe von n (14.). Dies, in die Formel

$$(n^2 - B)q^2 - 2Anqq' + A^2q'^2 = Ap^2,$$
$$(nq - Aq')^2 - Bq^2 = Ap^2$$

gesetzt, giebt:

$$\{n'q - A(q' \mp \mu' q)\}^2 - Bq^2 = Ap^2,$$

welches, da q' ganz willkührlich, von

$$(nq - Aq')^2 - Bq^2 = Ap^2$$

nicht unterschieden ist. Man wird also für n alle ganze Zahlen, welche $\frac{1}{2}$A nicht übersteigen, setzen, und versuchen, ob $\frac{n^2 - B}{A}$ eine ganze Zahl wird. Findet sich unter diesen Werthen kein genügender; so ist die gegebene Aufgabe in rationalen Zahlen nicht auflösbar. Finden sich aber im angegebenen Intervall genügende Werthe von n; so rechnet man für jeden derselben auf folgende Art weiter.

26. Sey $n^2 - B = AA'\varkappa^2$, wo $\varkappa^2$ der größte in $\frac{n^2 - B}{A}$ enthaltene quadratische Factor ist; so ist

$$A'\varkappa^2q^2 - 2nqq' + Aq'^2 = p^2,$$

woraus, wenn auf beiden Seiten mit $A'\varkappa^2$ multiplicirt, und dann auf der linken n^2q' addirt und subtrahirt wird:

$$(A'\varkappa^2 q - nq')^2 - (n^2 - AA'\varkappa^2) q'^2 = A'\varkappa^2 p^2,$$

d. i., für $A'\varkappa^2 q - nq' = z'$, $\varkappa p = p'$:

$$z'^2 - Bq'^2 = A'p'^2$$

wo A', B schon von ihren quadratischen Factoren befreit sind. Kann man letztere Gleichung in rationalen Zahlen auflösen; so geben die Formeln

$$\varkappa p = p', \ A'\varkappa^2 q - nq' = z', \ z = nq - Aq'$$

auch rationale Werthe für p, q, z, wenn auch nicht immer ganzzahlige, welches aber auch die Aufgabe nicht zur Bedingung macht.

27. Ist der positive Werth des Coefficienten A' eine Quadratzahl $= \mathfrak{A}^2$; so ist, für $p'' = \mathfrak{A}p'$, die Gleichung von der Form

$$z'^2 - p''^2 = Bq'^2.$$

Ist aber der positive Werth von A' keine Quadratzahl, also auch > 1; so rechnet man, wenn derselbe zugleich auch noch $\geqq B$ ist, auf folgende Art weiter. Zunächst ist nämlich zu merken, daß immer $A' < A$ ist, weil, auch im schlimmsten Falle, wenn B negativ, $= -\mathfrak{B}$, wäre

$$A' = \frac{n^2 - B}{A\varkappa^2} = \frac{n^2 + \mathfrak{B}}{A\varkappa^2}$$

doch immer $< A$ seyn muß, indem nach dem Obigen

$$n^2 \leqq \tfrac{1}{4}A^2, \ \mathfrak{B} \leqq A;$$

$$\frac{n^2 + \mathfrak{B}}{A\varkappa^2} \leqq \frac{\frac{1}{4}A^2 + A}{A\varkappa^2}, \leqq \frac{\frac{1}{4}A + 1}{\varkappa^2};$$

aber $A \geqq 2$, $\varkappa^2 - \frac{1}{4} \geqq \frac{3}{4}$, $A(\varkappa^2 - \frac{1}{4}) \geqq \frac{3}{2}$, > 1. Also

$$\frac{n^2 + \mathfrak{B}}{A\varkappa^2} < \frac{\frac{1}{4}A + A(\varkappa^2 - \frac{1}{4})}{\varkappa^2},$$

d. i. $A' < A$, immer bloß in Bezug auf die positiven Werthe von A und A'. Man wird also nach dem obigen Verfahren aus der transformirten Gleichung

$$z'^2 - Bq'^2 = A'p'^2$$

eine ganz ähnliche neue Gleichung ableiten können, so daß man durch dasselbe eine Reihe Gleichungen von der Form

$$z^2 - Bq^2 = Ap^2,$$
$$z'^2 - Bq'^2 = A'p'^2,$$
$$z''^2 - Bq''^2 = A''p''^2,$$
$$z'''^2 - Bq'''^2 = A'''p'''^2,$$
u. s. f. u. s. f.

erhält, in welchen A, A′, A″, A‴, u. s. f. eine abnehmende Reihe bilden. Dadurch muß man nothwendig irgend einmal auf eine Gleichung

$$z_1^2 - Bq_1^2 = Cp_1^2$$

kommen, in welcher $C < B$ ist. Aus dieser Gleichung leite man wie vorher wieder eine ähnliche Reihe von Gleichungen ab:

$$z_1^2 - Cp_1^2 = Bq_1^2,$$
$$z'_1{}^2 - Cp'_1{}^2 = B'q'_1{}^2,$$
$$z''_1{}^2 - Cp''_1{}^2 = B''q''_1{}^2,$$
$$z'''_1{}^2 - Cp'''_1{}^2 = B'''q'''_1{}^2,$$
u. s. f. u. s. f.

wo wieder B, B′, B″, B‴, u. s. f. eine abnehmende Reihe bilden, und man also auf eine Gleichung

$$z_2^2 - Cp_2^2 = Dq_2^2$$

kommen muß, in welcher $D < C$, woraus man dann wieder ableitet:

$$z_2^2 - Dq_2^2 = Cp_2^2,$$
$$z'_2{}^2 - Dq'_2{}^2 = C'p'_2{}^2,$$
$$z''_2{}^2 - Dq''_2{}^2 = C''p''_2{}^2,$$
$$z'''_2{}^2 - Dq'''_2{}^2 = C'''p'''_2{}^2,$$
u. s. f. u. s. f.

wo auch C, C′, C″, C‴, u. s. f. eine abnehmende Reihe bilden, und man also endlich auf

$$z_3^2 - Dq_3^2 = Ep_3^2$$

geführt werden muß, wo $E < D$. In den Gleichungen

$$z^2 - Bq^2 = Ap^2,$$
$$z_1^2 - Cp_1^2 = Bq_1^2,$$
$$z_2^2 - Dq_2^2 = Cp_2^2,$$
$$z_3^2 - Ep_3^2 = Dq_3^2,$$
u. s. f. u. s. f.

bilden nun auch A, B, C, D, E, u. s. f. eine abnehmende Reihe ganzer Zahlen, so daß man also durch diese Ope-

ration irgend einmal auf einen Coefficienten = 1, d. i. auf eine Gleichung von der Form

$$z_r^2 - q_r^2 = \mathfrak{A} p_r^2$$

geführt werden muß, eben so, wie in dem obigen Falle, wenn ein Coefficient eine vollkommene Quadratzahl ist.

28. Um nun letztere Gleichung in rationalen Zahlen aufzulösen, zerlege man $\mathfrak{A}$ in zwei Factoren α_1, β_1, welche, da $\mathfrak{A}$, wie aus dem Obigen erhellet, keinen quadratischen Factor enthalten kann, immer relative Primzahlen seyn werden. Setzt man nun auch $p_r = \pi\varrho$; so hat man

$$(z_r - q_r)(z_r + q_r) = \alpha_1\beta_1\pi^2\varrho^2,$$

und die Gleichung wird aufgelöset seyn, wenn man z, q aus den Gleichungen

$$z_r + q_r = \alpha_1\pi^2, \quad z_r - q_r = \beta_1\varrho^2$$

bestimmt, woraus:

$$z_r = \frac{\alpha_1\pi^2 + \beta_1\varrho^2}{2}, \quad q_r = \frac{\alpha_1\pi^2 - \beta_1\varrho^2}{2}, \quad p_r = \pi\varrho.$$

π, ϱ können willkührlich angenommen werden. Enthielten die Brüche vielleicht den Bruch $\frac{1}{2}$, und wären also keine ganzen Zahlen; so setze man

$$z_r = \alpha_1\pi^2 + \beta_1\varrho^2, \quad q_r = \alpha_1\pi^2 - \beta_1\varrho^2, \quad p_r = 2\pi\varrho,$$

weil dann

$$z_r^2 - q_r^2 = 2\alpha_1\pi^2 . 2\beta_1\varrho^2 = \alpha_1\beta_1 . (2\pi\varrho)^2,$$

d. i. $z_r^2 - q_r^2 = \mathfrak{A} p_r^2$ ist, wie verlangt wurde.

29. Diese Auflösung der Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten hat dem Wesentlichen nach eben so Lagrange gegeben (Mém. de Berlin. 1767. Élém. d'Algèbre par L. Euler. Nouv. éd. Paris. 1807. T. II. p. 388. Additions. §. V.); so wie auch Legendre (Théorie des nombres. Sec. ed. Paris. 1808. §. III.) mit einigen Abweichungen. Methoden, durch welche die Auflösung noch vereinfacht wird, ließen sich hier in der Kürze nicht beibringen.

30. Seyen z. B. Zahlen von solcher Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man von ihrem doppelten Quadrate 2 subtrahirt, der Rest ein vollkommnes Quadrat sey. Es

muß in diesem Falle $2v^2 - 2$ ein vollkommnes Quadrat werden, und man hat für $v = \frac{p}{q}$ folglich die Gleichung

$$2p^2 - 2q^2 = z^2,\ z^2 + 2q^2 = 2p^2.$$

Also muß $\frac{n^2 + 2}{2}$ eine ganze Zahl seyn, und man braucht n nicht > 1 zu nehmen. Demnach $n = 0$, $A' = 1$, $\varkappa = 1$, und folglich die transformirte Gleichung:

$$z'^2 + 2q'^2 = p'^2,\ z'^2 - p'^2 = -2q'^2.$$

Da nun $-2 = -2.1$; so setze man $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 1$, und man hat:

$$z' = -\frac{2\pi^2 - \varrho^2}{2},\ p' = -\frac{2\pi^2 + \varrho^2}{2},\ ' = \pi\varrho.$$

Aber (26.)

$$\varkappa p = p',\ A'\varkappa^2 q - nq' = z',\ z = nq - Aq'.$$

Also $p = p'$, $q = z'$, d. i.

$$p = -\frac{2\pi^2 + \varrho^2}{2},\ q = -\frac{2\pi^2 - \varrho^2}{2};\ v = \frac{p}{q} = \frac{2\pi^2 + \varrho^2}{2\pi^2 - \varrho^2}.$$

Für $\pi = 1$, $\varrho = 1$ ist $v = 3$, $2v^2 - 2 = 2.9 - 2 = 16 = 4^2$. Für $\pi = 2$, $\varrho = 3$ ist $v = -17$, $2v^2 - 2 = 576 = 24^2$.

31. Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe ein Quadrat ist, setze man

$$p^2 + q^2 = z^2,\ z^2 - q^2 = p^2.$$

Der Coefficient von p^2 ist $= 1 = 1.1$. Also $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, und

$$p = \pi\varrho,\ q = \frac{\pi^2 - \varrho^2}{2};\ \text{oder}\ p = 2\pi\varrho,\ q = \pi^2 - \varrho^2.$$

32. Sey x so zu bestimmen, daß $7 + 15x + 13x^2$ ein vollkommnes Quadrat wird. Hier ist (19.) $\alpha = 7$, $\beta = 15$, $\gamma = 13$, $A = 52 = 2^2.13$, $B = -139$. Also $13v'^2 - 139$ zu einem Quadrat zu machen, oder

$$z^2 - 13p^2 = -139q^2$$

die aufzulösende Gleichung. Es muß also $\frac{n^2 - 13}{-139}$ eine ganze Zahl seyn, wobei n nicht $> \frac{139}{2}$. Dies ist der Fall für $n = 41$, wodurch obiger Bruch $= -12 = -3.2^2$. Also $A' = -3$, $\varkappa = 2$, und

$$z'^2 - 13p'^2 = -3q'^2,\ \text{oder}\ z'^2 + 3q'^2 = 13p'^2,$$

die neue Gleichung, wo also, für n' nicht $> \frac{13}{2}$, der Bruch $\frac{n'^2 + 3}{13}$ eine ganze Zahl seyn muß, welches der Fall für $n' = 6$, wodurch dieser Bruch $= 3 = 3.1^2$. Also $A'' = 3$, $\varkappa' = 1$, und die neue Gleichung

$$z''^2 + 3q''^2 = 3p''^2.$$

Folglich muß wieder $\frac{n''^2 + 3}{3}$, für n'' nicht $> \frac{3}{2}$, eine ganze Zahl seyn, welches der Fall für $n'' = 0$, wodurch dieser Bruch $= 1 = 1.1^2$, d. i. $A''' = 1$, $\varkappa'' = 1$, und folglich

$$z'''^2 + 3q'''^2 = p'''^2, \text{ oder } z'''^2 - p'''^2 = -3q'''^2.$$

Da nun $-3 = -3.1$, also $\alpha_1 = -3$, $\beta_1 = 1$ ist; so ist

$$z''' = \frac{-3\pi^2 + \varrho^2}{2},\ p''' = \frac{-3\pi^2 - \varrho^2}{2},\ q''' = \pi\varrho.$$

Für $\pi = 1$ und $\varrho = 1$ z. B. ist

$$z''' = -1,\ p''' = -2,\ q''' = 1.$$

Die allgemeinen Gleichungen in (26.)

$$\varkappa p = p',\ A'\varkappa^2 q - nq' = z',\ z = nq - Aq'$$

geben aber:

$$p'' = p''',\ q'' = z''',\ z'' = -3q''';$$
$$= -2,\ = -1,\ = -3;$$
$$p' = p'',\ q' = \frac{z'' + 6q''}{3},\ z' = 6q' - 13q'';$$
$$= -2,\ = -3,\ = -5;$$
$$q = \frac{q'}{2},\ p = \frac{z' + 41p'}{-12},\ z = 41p + 139p';$$
$$= -\tfrac{3}{2},\ = \tfrac{29}{4},\ = \tfrac{77}{4}.$$

Folglich $v' = \frac{p}{q} = -\frac{29}{6}$ und $v = \frac{1}{2}v' = -\frac{29}{12}$. Es ist $52v^2 - 139 = (\frac{77}{6})^2$. Endlich ist $2\gamma x + \beta = \sqrt{Av^2 + B}$, d. i. $26x + 15 = \pm \frac{77}{6}$, woraus $x = -\frac{1}{12}$, oder $x = -\frac{167}{156}$. Dies giebt $7 + 15x + 13x^2 = (\frac{29}{12})^2$. Setzt man für π, ϱ andere Werthe; so erhält man auch für x andere Werthe. Lagrange behandelt dieses Exempel nicht ganz eben so.

33. Sollte $23v^2 - 5$ ein vollständiges Quadrat werden; so hat man

$$23p^2 - 5q^2 = z^2,\ \ z^2 + 5q^2 = 23p^2.$$

Also muß $\frac{n^2+5}{23}$ Zahl seyn, für n nicht $> \frac{23}{2}$. Dies ist der Fall für $n = 8$, wofür obiger Bruch $= 3 = 3.1$. Also $A' = 3$, $\varkappa = 1$, und $z'^2 + 5q'^2 = 3p'^2$, $z'^2 - 3p'^2 = -5q'^2$ die neue Gleichung. Also muß $\frac{n'^2 - 3}{-5}$ eine ganze Zahl seyn, für n nicht $> \frac{6}{2}$. Ein solcher Werth von n' existirt aber nicht, und daher kann $23v^2 - 5$ nie ein vollkommnes Quadrat werden.

34. Hat man einen Werth l von x gefunden, für welchen $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ ein vollkommnes Quadrat wird; so lassen sich daraus auf folgende Art leicht andere Werthe ableiten. Man setze nämlich $x = l + y$; so wird

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \alpha + \beta l + \gamma l^2 + (\beta + 2\gamma l)y + \gamma y^2$$
$$= f^2 + (\beta + 2\gamma l)y + \gamma y^2,$$

wenn wir $\alpha + \beta l + \gamma l^2$, welches ein vollkommnes Quadrat ist, $= f^2$ setzen. Die Quadratwurzel aus dem gefundenen Ausdrucke setze man $= f + \frac{g}{h}y$; so wird derselbe

$$= f^2 + \frac{2fg}{h}y + \frac{g^2}{h^2}y^2.$$

Also, wenn man f^2 auf beiden Seiten aufhebt, und durch y dividirt:

$$\beta + 2\gamma l + \gamma y = \frac{2fg}{h} + \frac{g^2}{h^2}y,$$
$$y = \frac{h\{2fg - h(\beta + 2\gamma l)\}}{\gamma h^2 - g^2},$$
$$x = \frac{l(\gamma h^2 - g^2) + h\{2fg - h(\beta + 2\gamma l)\}}{\gamma h^2 - g^2},$$

wo g, h zwei völlig unbestimmte Größen sind, und

$$f = \sqrt{\alpha + \beta l + \gamma l^2}$$

ist.

35. Durch diese Methoden lassen sich nun zwar alle Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten in rationalen Zahlen auflösen; sie sind aber nicht ausreichend, wenn man nur ganze Zahlen verlangt. Die Untersuchung über diesen Gegenstand hängt so unmittelbar mit der Entwickelung irrationaler Quadratwurzeln in Kettenbrüche (Kettenbruch. 28.) zusammen, daß darüber hier zunächst noch Einiges vorausgeschickt werden muß.

36. Die Aufgabe, irgend eine irrationale Quadratwurzel $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln, kommt, wenn die in den Größen

$$\sqrt{A},\ x,\ x',\ x'',\ x''',\ \ldots\ldots$$

enthaltenen größten Ganzen respective durch

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\ a'''',\ \ldots\ldots$$

bezeichnet werden, darauf zurück, die Größen x, x', x'', x''', ... den Bedingungen

$$\sqrt{A} = a + \frac{1}{x},\ x = a' + \frac{1}{x'},\ x' = a'' + \frac{1}{x''},\ x'' = a''' + \frac{1}{x'''},$$

gemäß zu bestimmen, weil dann

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a''' + \ldots}}}$$

Man erhält aber leicht:

$$x = \frac{1}{\sqrt{A} - a},\ x' = \frac{1}{x - a'},\ x'' = \frac{1}{x' - a''},\ x''' = \frac{1}{x'' - a'''},\ \ldots$$

und, wenn man Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit $\sqrt{A} + a$ multiplicirt:

$$x = \frac{a + \sqrt{A}}{A - a^2} = \frac{Q' + \sqrt{A}}{P'},$$

für $Q' = a,\ P' = \frac{A - a^2}{1}$.

Setzt man nun diesen Werth von x in den Ausdruck für x', und multiplicirt immer Zähler und Nenner mit einem solchen gemeinschaftlichen Factor, daß der Nenner rational wird; so erhält man leicht:

$$x' = \frac{P'}{\sqrt{A} - (a'P' - Q')} = \frac{P'}{\sqrt{A} - Q''} = \frac{P'(\sqrt{A} + Q'')}{A - Q''^2} = \frac{\sqrt{A} + Q''}{P''},$$

für $Q'' = a'P' - Q',\ P'' = \frac{A - Q''^2}{P'}$;

$$x'' = \frac{P''}{\sqrt{A} - (a''P'' - Q'')} = \frac{P''}{\sqrt{A} - Q'''} = \frac{P''(\sqrt{A} + Q''')}{A - Q'''^2} = \frac{\sqrt{A} + Q'''}{P'''},$$

für $Q''' = a''P'' - Q'',\ P''' = \frac{A - Q'''^2}{P''}$;

$$x''' = \frac{P'''}{\sqrt{A} - (a'''P''' - Q''')} = \frac{P'''}{\sqrt{A} - Q''''} = \frac{P'''(\sqrt{A} + Q'''')}{A - Q''''^2} = \frac{\sqrt{A} + Q''''}{P''''},$$

für $Q'''' = a'''P''' - Q''',\ P'''' = \frac{A - Q''''^2}{P'''}$;

u. s. f. u. s. f.

Bezeichnen wir nun durch das zwischen zwei Größen gesetzte Zeichen $<$, daß die erste das größte in der zweiten enthaltene Ganze seyn solle, und setzen $Q = 0$, $P = 1$; so haben wir:

$$Q = 0, \quad P = 1, \quad a < \sqrt{A}$$
$$Q' = a, \quad P' = \frac{A - Q'^2}{P}, \quad a' < \frac{\sqrt{A} + Q'}{P'};$$
$$Q'' = a'P' - Q', \quad P'' = \frac{A - Q''^2}{P'}, \quad a'' < \frac{\sqrt{A} + Q''}{P''};$$
$$Q''' = a''P'' - Q'', \quad P''' = \frac{A - Q'''^2}{P''}, \quad a''' < \frac{\sqrt{A} + Q'''}{P'''};$$
$$Q'''' = a'''P''' - Q''', \quad P'''' = \frac{A - Q''''^2}{P'''}, \quad a'''' < \frac{\sqrt{A} + Q''''}{P''''};$$

u. s. f. u. s. f.

Für $A = 45$ erhält man z. B. für a, a', a'', ... die Werthe 6, 1, 2, 2, 2, 1, 12, ...

37. Sey nun

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{1}{a' + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_n}}}}$$

und die den drei letzten Nennern entsprechenden Partialwerthe des Kettenbruchs seyen $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ so ist (Kettenbruch. 5.), da offenbar $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \sqrt{A}$ ist:

$$\sqrt{A} = \frac{p_n x_n + p_{n-1}}{q_n x_n + q_{n-1}}.$$

Setzt man nun (36.)

$$x_n = \frac{\sqrt{A} + Q_{n+1}}{P_{n+1}},$$

multiplicirt auf beiden Seiten mit dem Nenner, und sondert das Rationale und Irrationale von einander; so erhält man:

$$p_n Q_{n+1} + p_{n-1} P_{n+1} - q_n A = \{q_n Q_{n+1} + q_{n-1} P_{n+1} - p_n\} \sqrt{A}.$$

Das Rationale kann aber dem Irrationalen nicht gleich seyn, ohne daß

$$p_n Q_{n+1} + p_{n-1} P_{n+1} - q_n A = 0, \quad q_n Q_{n+1} + q_{n-1} P_{n+1} - p_n = 0,$$

woraus durch Elimination:

$$(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) Q_{n+1} = q_n q_{n-1} A - p_n p_{n-1},$$
$$(p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) P_{n+1} = p_n p_n - q_n q_n A.$$

Aber (Kettenbruch. 6.)

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \mp 1,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Also

$$\mp Q_{n+1} = q_n q_{n-1} A - p_n p_{n-1}, \mp P_{n+1} = p_n p_n - q_n q_n A.$$

38. Aus diesen beiden merkwürdigen Gleichungen erhellet zunächst, daß P_{n+1}, Q_{n+1} immer ganze Zahlen sind.

Da nun (Kettenbruch. 2.) $\frac{p_n}{q_n} \lesseqgtr \sqrt{A}$, $p_n p_n \lesseqgtr q_n q_n A$, $p_n p_n - q_n q_n A$ negativ oder positiv ist, jenachdem n gerade oder ungerade ist; so ist klar, daß P_{n+1} immer positiv ist.

Da ferner (36.) überhaupt

$$P_n P_{n+1} = A - Q_{n+1} Q_{n+1},$$

$P_n P_{n+1}$ aber, wie wir so eben gesehen haben, immer positiv ist; so ist immer

$$Q_{n+1} Q_{n+1} < A,$$

oder der absolute Werth von $Q_{n+1} < \sqrt{A}$, so daß also die Brüche

$$\frac{\sqrt{A} + Q'}{P'}, \frac{\sqrt{A} + Q''}{P''}, \frac{\sqrt{A} + Q'''}{P'''}, \ldots$$

alle positiv sind.

Es läßt sich aber auch leicht zeigen, daß alle durch Q bezeichneten Größen selbst positiv sind. Sey Q_n positiv; so ist, weil a_n das größte in $\frac{\sqrt{A} + Q_n}{P_n}$ enthaltene Ganze, ist, offenbar

$$2a_n > \frac{\sqrt{A} + Q_n}{P_n}, 2a_n P_n > \sqrt{A} + Q_n.$$

Aber nach dem Vorigen $Q_n < \sqrt{A}$. Also $2a_n P_n > 2Q_n$, $a_n P_n > Q_n$. Folglich $a_n P_n - Q_n$, d. i. Q_{n+1} (36.), ebenfalls positiv. Da nun $Q' = a$ positiv ist; so sind es auch Q'', Q''', Q'''', u. s. f.

39. Da nun immer $Q_n < \sqrt{A}$; so können die durch Q bezeichneten Größen die Größe a nie übersteigen. Weil aber nach (36.)

$$Q_n + Q_{n+1} = a_n P_n$$

ist; so kann $a_n P_n$, folglich auch sowohl a_n als P_n die Größe $2a$ nicht übersteigen. Also können die durch P, Q bezeichneten Größen nur eine bestimmte endliche Anzahl von Werthen haben, und auch die Anzahl der Verbindungen je zweier dieser Werthe unter einander kann nur endlich seyn. Der Kettenbruch für die irrationale Größe $\sqrt{A}$ läuft aber natürlich ins Unendliche fort. Daher muß jederzeit irgend eine Combination der Werthe von P nnd Q, d. i. einer der Brüche

$$\frac{\sqrt{A}+Q'}{P'}, \frac{\sqrt{A}+Q''}{P''}, \frac{\sqrt{A}+Q'''}{P'''}, \ldots$$

einmal wiederkehren. Dann kehrt aber auch offenbar eine gewisse Anzahl vorhergehender Nenner in derselben Ordnung immer wieder, so daß also jeder Kettenbruch, welcher eine irrationale Quadratwurzel darstellt, periodisch ist.

40. Um den Anfang der Periode näher zu bestimmen, wollen wir setzen, daß a_{n+1} wiedergekehrt sey, so daß $a_{n+1} = a_{n+i+1}$, und folglich auch $Q_{n+1} = Q_{n+i+1}$, $P_{n+1} = P_{n+i+1}$ ist. Nun ist (36.)

$$Q_{n+1} = a_n P_n - Q_n,$$
$$P_n P_{n+1} = A - Q_{n+1} Q_{n+1};$$
$$Q_{n+i+1} = a_{n+i} P_{n+i} - Q_{n+i},$$
$$P_{n+i} P_{n+i+1} = A - Q_{n+i+1} Q_{n+i+1}.$$

Folglich nach der Annahme:

$$P_n P_{n+1} = A - Q_{n+1} Q_{n+1}, \; P_{n+i} P_{n+1} = A - Q_{n+1} Q_{n+1},$$

woraus unmittelbar folgt, daß $P_n = P_{n+i}$ ist. Also ist

$$Q_{n+1} = a_n P_n - Q_n, \; Q_{n+1} = a_{n+i} P_n - Q_{n+i},$$

woraus durch Subtraction:

$$\frac{Q_n - Q_{n+i}}{P_n} = a_n - a_{n+i},$$

oder, weil $P_n = P_{n+i}$ ist:

$$\frac{Q_{n+i} - Q_n}{P_{n+i}} = a_{n+i} - a_n.$$

Es ist aber ferner (37.)

$$q_{n-1} Q_n + q_{n-2} P_n = p_{n-1}, \; Q_n = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} P_n.$$

Da nun $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ein Näherungswerth des gegebenen Ketten-

bruchs ist; so kann man $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = a + \frac{r}{q_{n-1}}$ setzen, welches, in vorige Gleichung substituirt, giebt:

$$a - Q_n = \frac{q_{n-2}P_n - r}{q_{n-1}},$$

eine positive Größe, da Q_n nie $>$ a ist (38.). Da nun nach der Natur der Kettenbrüche $q_{n-2} < q_{n-1}$ ist (Kettenbruch. 5.); so ist $a - Q_n < P_n$, wobei nur zu bemerken, daß für $n = o$ diese Relation nicht mehr gilt, indem dann kein q_{-2} statt finden kann, übrigens aber auch $a - Q = a$, $P = 1$ (37.), also nicht allgemein $a - Q < P$ ist. Für $n = 1$ ist $a - Q' = o$, also noch $a - Q' < P'$. Ganz eben so hat man auch $a - Q_{n+i} < P_{n+i}$. Folglich, da $P_n = P_{n+i}$ ist:

$$a - Q_n < P_{n+i}, \; a - Q_{n+i} < P_n.$$

Da nun nie $Q_n > a$, $Q_{n+i} > a$ ist (38.); so hat man, jenachdem $Q_{n+i} \gtrless Q_n$ ist:

$$Q_{n+i} - Q_n < P_{n+i}, \; Q_n - Q_{n+i} < P_n.$$

In den beiden obigen Brüchen:

$$\frac{Q_n - Q_{n+i}}{P_n}, \; \frac{Q_{n+i} - Q_n}{P_{n+i}}$$

ist also immer der Zähler kleiner als der Nenner. Diese Brüche sind aber den ganzen Zahlen $a_n - a_{n+i}$, oder $a_{n+i} - a_n$ gleich. Also müssen diese ganzen Zahlen $= o$, d. h. es muß in beiden Fällen $a_n = a_{n+i}$ seyn, wovon aber der Fall, wo $n = o$, ausgeschlossen. Ist also $a_{n+1} = a_{n+i+1}$; so ist auch $a_n = a_{n+i}$, und man hat also, wenn irgend ein Nenner a_{n+1} einmal wiedergekehrt ist, durch fortgesetzte Anwendung obiger Schlußart:

$$a_{n+1} = a_{n+i+1}, \; a_n = a_{n+i},$$
$$a_{n-1} = a_{n+i-1}, \; a_{n-2} = a_{n+i-2},$$

u. s. f. $a' = a_{i+1}$; aber nach dem Obigen nicht $a = a_i$. Man sieht also hieraus, daß der erste wiederkehrende Nenner immer a' ist, und daß also die Periode immer mit a' anfängt.

41. Der dem Nenner a_{i-1} entsprechender Partialwerth des Kettenbruchs sey $= \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$, der vorhergehende $= \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$.

Der vollständige a_i entsprechende Quotient sey $= a_i + z$; so ist (Kettenbruch. 5.)

$$\frac{p_i}{q_i} = \sqrt{A} = \frac{p_{i-1}(a_i + z) + p_{i-2}}{q_{i-1}(a_i + z) + q_{i-2}}.$$

Da aber a_i der letzte Nenner in einer Periode ist; so ist offenbar $z = \sqrt{A} - a$. Also

$$\sqrt{A} = \frac{p_{i-1}(\sqrt{A} + a_i - a) + p_{i-2}}{q_{i-1}(\sqrt{A} + a_i - a) + q_{i-2}},$$

woraus

$$Aq_{i-1} - (a_i - a)p_{i-1} - p_{i-2}$$
$$= \{p_{i-1} - (a_i - a)q_{i-1} - q_{i-2}\}\sqrt{A}.$$

Also nach einer schon oben öfter gebrauchten Schlußart:

$$Aq_{i-1} - (a_i - a)p_{i-1} - p_{i-2} = 0,$$

$$p_{i-1} - (a_i - a)q_{i-1} - q_{i-2} = 0,$$

woraus leicht:

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = a_i - a + \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}.$$

Da nun nach der Natur der Kettenbrüche immer $q_{i-2} < q_{i-1}$ ist; so ist $a_i - a$ das größte in $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ enthaltene Ganze. Das in jedem Partialwerthe, also auch in letzterem, enthaltene größte Ganze ist aber $= a$. Folglich $a_i - a = a$, $a_i = 2a$, so daß also das letzte Glied der Periode immer $= 2a$ ist, wie auch leicht zu berechnende Beispiele lehren werden.

42. Setzt man $a_i = 2a$ in die Gleichung

$$p_{i-1} - (a_i - a)q_{i-1} - q_{i-2} = 0,$$

und dividirt durch q_{i-1}; so erhält man:

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - a = \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}.$$

Läßt man nun a_i die Gränze der ersten Periode seyn; so ist

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - a = \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \ldots + \cfrac{1}{a_{i-1}}}}.$$

Nun ist aber (Kettenbruch. 5.)

$$\begin{aligned} q' &= a', \\ q'' &= q'a'' + 1, \\ q''' &= q''a''' + q', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{i-3} &= q_{i-4}a_{i-3} + q_{i-5}, \\ q_{i-2} &= q_{i-3}a_{i-2} + q_{i-4}, \\ q_{i-1} &= q_{i-2}a_{i-1} + q_{i-3}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{q_{i-1}}{q_{i-2}} &= a_{i-1} + \frac{q_{i-3}}{q_{i-2}}, \\ \frac{q_{i-2}}{q_{i-3}} &= a_{i-2} + \frac{q_{i-4}}{q_{i-3}}, \\ \frac{q_{i-3}}{q_{i-4}} &= a_{i-3} + \frac{q_{i-5}}{q_{i-4}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{q'''}{q''} &= a''' + \frac{q'}{q''}, \\ \frac{q''}{q'} &= a'' + \frac{1}{q'}, \\ q' &= a', \end{aligned}$$

woraus durch successive Substitution:

$$\frac{q_{i-2}}{q_{i-1}} = \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_{i-2} + \ldots + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a'}}}}$$

erhalten wird. Folglich nach dem Obigen

$$\cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \ldots + \cfrac{1}{a_{i-1}}}}$$

$$= \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_{i-2} + \ldots + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a'}}}}$$

so daß also die beiden Reihen

$$a', a'', \ldots a_{i-2}, a_{i-1};$$

$$a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots a'', a',$$

identisch seyn müssen. Daher ist immer die Reihe der Glieder der Periode, ohne das letzte Glied, einerlei mit der umgekehrten Reihe dieser Glieder, oder die Reihe der Glieder der Periode ist symmetrisch. Bei $\sqrt{45}$ ist die Periode ohne das letzte Glied: 1, 2, 2, 2, 1. Das letzte Glied ist $= 12 = 2 . 6$, und 6 die in $\sqrt{45}$ enthaltene ganze Zahl.

43. Da nun (39.) für den Endpunkt irgend einer Periode

$$Q_i + Q_{i+1} = a_i P_i$$

und $a_i = 2a$ (41.), Q_i, Q_{i+1}, P_i aber ganze positive Zahlen sind, deren zwei erstere nie $>$ a werden können (38. 39.); so ist klar, daß $Q_i = Q_{i+1} = a$, und $P_i = 1$ seyn muß. Aber (37.)

$$\mp P_i = p_{i-1} p_{i-1} - q_{i-1} q_{i-1} A ;$$

also $p_{i-1} p_{i-1} - q_{i-1} q_{i-1} A = \mp 1$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem $i - 1$ gerade oder ungerade ist, d. i. jenachdem i ungerade oder gerade ist, oder

$$p_{i-1} p_{i-1} - q_{i-1} q_{i-1} A = \pm 1 ,$$

jenachdem $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} >$ oder $< \sqrt{A}$ ist.

44. Sey nun die unbestimmte Gleichung des zweiten Grades $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, wo A eine ganze Zahl ist, in ganzen Zahlen aufzulösen. Es erhellet zunächst, daß A nicht negativ seyn kann, weil die Gleichung $x^2 + Ay^2 = -1$ offenbar unmöglich, die Gleichung $x^2 + Ay^2 = 1$ aber augenscheinlich nur die Auflösungen $x = 1$, $y = o$ gestattet. Auch darf A kein vollkommnes Quadrat seyn, indem für $A = a^2$ und $x^2 - Ay^2 = + 1$, $(x + ay)(x - ay) = + 1$, also $x + ay = 1$, $x - ay = 1$ seyn müßte, woraus $x = 1$, $y = o$ als einzige Auflösung folgte. Für $x^2 - Ay^2 = - 1$, hätte man eben so $(x + ay)(x - ay) = - 1$, also $x + ay = 1$, $x - ay = - 1$, oder $x + ay = - 1$, $x - ay = 1$. Im ersten Falle erhielte man $x = o$, $y = \frac{1}{a}$, im andern $x = o$, $y = - \frac{1}{a}$.

45. Sey also A positiv und eine unvollkommne Quadratzahl, und zunächst $x^2 - Ay^2 = +1$. Man entwickele nun $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch, und bezeichne irgend einen zu a_{i-1} gehörenden Partialbruch mit $\frac{p}{q}$. Ist nun die Anzahl der Glieder einer Periode, also auch immer i gerade; so ist immer (43.) $p^2 - Aq^2 = +1$, und alle einander entsprechenden Werthe von p, q sind Auflösungen unserer Gleichung in ganzen Zahlen. Ist aber i, welches jetzt die Anzahl der Glieder einer einzelnen Periode bezeichnen soll, ungerade; so sind die vorletzten Glieder der einzelnen Perioden

$$a_{i-1}, a_{2i-1}, a_{3i-1}, a_{4i-1}, a_{5i-1}, \ldots$$

und es ist $i-1$ gerade, $2i-1$ ungerade, $3i-1$ gerade, $4i-1$ ungerade, $5i-1$ gerade, u. s. f. Also sind (43.) Zähler und Nenner der den Nennern a_{2i-1}, a_{4i-1}, a_{6i-1}, u. s. f. entsprechenden Partialwerthe, Auflösungen unserer Gleichung in ganzen Zahlen, Zähler und Nenner der den Nennern a_{i-1}, a_{3i-1}, $a_{5\ -1}$, u. s. f. entsprechenden Partialwerthe dagegen Auflösungen der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ in ganzen Zahlen, so daß also auch letztere in dem Fall, wenn die Anzahl der Glieder einer einzelnen Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ ungerade ist, immer auflösbar ist.

Hat man z. B. die Gleichung $x^2 - 31y^2 = +1$; so ist

$$\sqrt{31} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \ldots\ldots}}}}}}}}$$

Die Anzahl der Glieder der Periode ist gerade, folglich Zähler und Nenner des 8ten Partialbruchs eine Auflösung unserer Gleichung. Dieser Partialwerth ist $= \frac{1520}{273}$, und es ist wirklich $1520^2 - 31 \cdot 273^2 = +1$; eben so geben auch Zähler und Nenner des 16ten, 24sten, 32sten, u. s. f. eine Auflösung.

Für $x^2 - 53y^2 = \pm 1$ hat man

$$\sqrt{53} = 7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{14 + \ldots}}}}}$$

Die Periode hat 5 Glieder, also eine ungerade Anzahl. Der 5te Partialwerth ist $= \frac{182}{25}$, und es ist wirklich $182^2 - 53 . 25^2 = -1$, der 10te Partialwerth ist $= \frac{66249}{9100}$, und es ist wirklich $66249^2 - 53 . 9100^2 = +1$. Eben so sind nun der 15te, 25ste, 35ste u. s. f. Partialwerth Auflösungen von $x^2 - 53y^2 = -1$, der 20ste, 30ste, 40ste u. s. f. aber Auflösungen von $x^2 - 53y^2 = +1$.

46. Man hat auch Tafeln der einfachsten Werthe von x, y, welche die Gleichung $x^2 - Ay^2 = +1$ in ganzen rationalen Zahlen auflösen, für die einzelnen Werthe von A berechnet. Euler (Algebra. II. §. 111.) giebt eine Tafel für $A = 2$ bis $A = 99$. Die vollständigste Tafel ist: Canon Pellianus, sive tabula simplicissimam aequationis celeb. $y^2 = ax^2 + 1$ solutionem, pro singulis numeri dati valoribus ab 1 usque ad 1000 in numeris rat. iisdemque integris exhibens. Autore C. F. Degen. Hafniae. 1817. Man nennt nämlich die Aufgabe auch Pells Aufgabe (S. diesen Art.). Legendre (Théorie des nombres; am Ende), giebt eine Tafel bis $A = 135$, welche die einfachsten Auflösungen von $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ enthält.

47. Hat man nur eine Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$, so ist es leicht, mehrere zu finden. Sey zuerst die Anzahl der Glieder der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ gerade; so ist nur $x^2 - Ay^2 = +1$ in ganzen Zahlen auflösbar (45.). Der erste Näherungsbruch, welcher eine Auflösung giebt, sey $= \frac{p}{q}$, also $p^2 - Aq^2 = +1$. Irgend eine andere Auflösung sey P, Q, also auch $P^2 - AQ^2 = +1$; so ist

$$(p^2 - Aq^2)(P^2 - AQ^2) = +1$$
$$= p^2P^2 + A^2q^2Q^2 - Ap^2Q^2 - Aq^2P^2$$

$$= (pP + AqQ)^2 - A(pQ + qP)^2.$$

Folglich überhaupt

$$x = pP + AqQ, \quad y = pQ + qP.$$

Sind nun $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$ u. s. f. Brüche, welche Auflösungen unserer Gleichung geben; so kann man setzen:

$$\begin{array}{ll} p = p, & q = q; \\ p' = p^2 + Aq^2, & q' = 2pq; \\ p'' = pp' + Aqq', & q'' = pq' + p'q; \\ p''' = pp'' + Aqq'', & q''' = pq'' + p''q; \\ \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} \end{array}$$

wodurch man nach und nach mehrere Auflösungen erhält. Independente Ausdrücke erhält man so. Es ist

$$x \pm y\sqrt{A} = pP \pm qP\sqrt{A} \pm pQ\sqrt{A} + AqQ$$
$$= (p \pm q\sqrt{A})(P \pm Q\sqrt{A});$$

also kann man auch setzen:

$$\begin{array}{l} p \pm q\sqrt{A} = p \pm q\sqrt{A}, \\ p' \pm q'\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})^2, \\ p'' \pm q''\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})^3, \\ p''' \pm q'''\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})^4, \\ \text{u. s. f.} \quad \text{u. s. f.} \end{array}$$

Folglich überhaupt

$$x \pm y\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})^n,$$

$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^n + (p - q\sqrt{A})^n}{2},$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{A})^n - (p - q\sqrt{A})^n}{2\sqrt{A}},$$

für jedes ganze positive n. Daß dies immer ganze rationale Zahlen giebt, erhellet leicht, indem man mittelst des binomischen Lehrsatzes erhält:

$$x = p^n + \frac{n(n-1)}{1.2} Ap^{n-2}q^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} A^2p^{n-4}q^4 + \ldots$$

$$y = np^{n-1}q + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} Ap^{n-3}q^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} A^2p^{n-5}q^5 + \ldots$$

wo, weil n eine positive ganze Zahl ist, die Binomial-Coefficienten ebenfalls solche Zahlen sind. Lagrange, in den

Zusätzen zu Eulers Algebra. 75. zeigt, daß man auf diese Art alle möglichen Auflösungen in ganzen Zahlen erhält.

48. Ist die Anzahl der Glieder der Periode des Kettenbruchs für $\sqrt{A}$ ungerade; so sind die Gleichungen $x^2 - Ay^2 = +1$ und $x^2 - Ay^2 = -1$ beide auflösbar (45.). Man habe, wenn $\frac{p}{q}$ der einfachste Näherungsbruch ist, welcher die Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ auflöset,

$$p^2 - Aq^2 = -1,$$
$$p'^2 - Aq'^2 = +1,$$
$$p''^2 - Aq''^2 = -1,$$
$$p'''^2 - Aq'''^2 = +1,$$

u. s. f. u. s. f.

$$(p^2 - Aq^2)(p^2 - Aq^2) = +1,$$
$$(p^2 - Aq^2)(p'^2 - Aq'^2) = -1,$$
$$(p^2 - Aq^2)(p''^2 - Aq''^2) = +1,$$
$$(p^2 - Aq^2)(p'''^2 - Aq'''^2) = -1,$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich sind (47.)

$$p, \quad q;$$
$$p^2 + Aq^2, \quad 2pq;$$
$$pp' + Aqq', \quad pq' + p'q;$$
$$pp'' + Aqq'', \quad pq'' + p''q;$$
$$pp''' + Aqq''', \quad pq''' + p'''q;$$

u. s. f. u. s. f.

abwechselnd Auflösungen der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$, und $x^2 - Ay^2 = +1$.

Wie vorher (47.) hat man nun wieder

$$x \pm y\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})(P \pm Q\sqrt{A})$$

woraus leicht

$$x^2 - Ay^2 = (p^2 - Aq^2)(P^2 - AQ^2) = -1.(\pm 1) = \mp 1,$$

so daß also $x^2 - Ay^2 = \mp 1$, jenachdem $P^2 - AQ^2 = \pm 1$ ist. Also kann man setzen:

$$p \pm q\sqrt{A} = p \pm q\sqrt{A},$$
$$p' \pm q'\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})^2,$$
$$p'' \pm q''\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})^3,$$
$$p''' \pm q'''\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})^4,$$

u. s. f. u. s. f.

d. i. allgemein

$$x \pm y\sqrt{A} = (p \pm q\sqrt{A})^n,$$

wo x, y der Gleichung $x^2 - Ay^2 = +1$, oder $x^2 - Ay^2 = -1$ genügen, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Also hat man wieder

$$x = \frac{(p + q\sqrt{A})^n + (p - q\sqrt{A})^n}{2},$$

$$y = \frac{(p - q\sqrt{A})^n - (p - q\sqrt{A})^n}{2\sqrt{A}},$$

zur Auflösung von $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ in ganzen Zahlen, indem das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem n gerade oder ungerade ist.

Uebrigens sind die einfachsten Auflösungen der Gleichungen dieser Form doch oft sehr große Zahlen, wodurch die Nothwendigkeit einer Methode, wie die obige, welche das Resultat ohne alles Versuchen liefert, um so fühlbarer wird. Für die Gleichung $x^2 - 991y = 1$ ist z. B. die einfachste Auflösung:

$$x = 379516400906811930638014896080$$
$$y = 12055735790331359447442538767.$$

49. Es giebt noch einen Fall, wo sich eine unbestimmte Gleichung des zweiten Grades mit zwei Unbekannten unmittelbar mittelst der Kettenbrüche in ganzen Zahlen auflösen läßt, wozu folgende vorläufige Betrachtung erforderlich ist. Sey $\frac{p}{q}$ ein Bruch, und dessen Unterschied mit irgend einer Größe x sey $= \pm \frac{\delta}{q^2}$. Man soll die Bedingung finden, unter welcher $\frac{p}{q}$ einer der Näherungsbrüche des die Größe x darstellenden Kettenbruchs ist. Zu dem Ende denke man sich $\frac{p}{q}$ in einen Kettenbruch verwandelt. Die Quotienten seyen

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu,$$

und die Näherungsbrüche:

$$\frac{\alpha}{1}, \frac{\alpha\beta + 1}{1}, \ldots \frac{p^0}{q^0}, \frac{p}{q}.$$

Soll nun $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch zu x seyn; so müssen

dieselben Nenner aus der Entwickelung von x in einen Kettenbruch hervorgehen. Sey dies der Fall, und also

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \ldots + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{y}}}$$

Folglich $x = \frac{py + p^0}{qy + q^0}$ (Kettenbruch. 5.) $x - \frac{p}{q} = \frac{p^0 q - pq^0}{q(qy + q^0)} = \frac{\pm 1}{q(qy + q)^0}$ (Kettenbruch. 6.). Dies muß $= \pm \frac{\delta}{q^2}$, und folglich das Zeichen von $p^0 q - pq^0$ einerlei mit dem Vorzeichen dieses Bruchs seyn. Dies läßt sich aber immer annehmen. Man kann nämlich immer voraussetzen, daß $\mu > 1$, weil für $\mu = 1$ das Ende des Kettenbruchs für $\frac{p}{q}$, $= \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\mu}} = \frac{1}{\lambda + 1}$ wäre, wo $\lambda + 1 > 1$.

Umgekehrt kann man sich also auch die Reihe der Nenner und Näherungswerthe des Kettenbruchs für $\frac{p}{q}$ auf folgende zwei Arten beendigt denken:

$$\ldots \lambda, \mu; \text{ oder } \ldots \lambda, \mu - 1, 1$$

$$\ldots \frac{m}{n}, \frac{p}{q}; \qquad \ldots \frac{m}{n}, \frac{p-m}{q-n}, \frac{p}{q}$$

da im letzten Falle

$$\frac{p}{q} = \frac{p^0 . 1 + m}{q^0 . 1 + n}, \frac{p^0}{q^0} = \frac{p - m}{p - n}$$

seyn muß, wenn $\frac{p^0}{q^0}$ den vor $\frac{p}{q}$ vorausgehenden Näherungswerth bezeichnet. Bezeichnet nun $\frac{p^0}{q^0}$ in beiden Fällen diesen vorletzten Näherungswerth; so kann man also entweder $p^0 = m$, $q^0 = n$, oder $p^0 = p - m$, $q^0 = q - n$ setzen. Im ersten Falle ist $pq^0 - p^0 q = pn - qm$, im andern $= p(q - n) - q(p - m) = pq - pn - pq + qm = -(pn - qm)$, also der Werth von $pq^0 - p^0 q$ in beiden Fällen von verschiedenem Zeichen, so daß folglich auch der Differenz $p^0 q - pq^0$ ein beliebiges, also immer einerlei Zeichen mit $\pm \frac{\delta}{q^2}$ gegeben werden kann, und man also nach dem Obigen ohne Zweideutigkeit

$$\frac{1}{q(qy + q^0)} = \frac{\delta}{q^2}, \quad \delta = \frac{q}{qy + q^0}$$

haben muß. Nun ist aber offenbar $y \geqq 1$ und positiv. Also muß seyn $\delta \leqq \frac{q}{q + q^0}$, wenn $\frac{p}{q}$ unter den Näherungsbrüchen zu x vorkommen soll. Ist umgekehrt $\delta \leqq \frac{q}{q + q^0}$ und positiv; so ist nothwendig $y \geqq 1$. Setzt man nun

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \ldots + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{y}}}$$

und entwickelt hieraus den Werth von y; so wird man immer einen Werth erhalten, welcher positiv und $\geqq 1$ ist. Für $y = 1$ erhält man

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \ldots + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{1}}}$$

Für $y > 1$ kann man setzen

$$y = \mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \cfrac{1}{\mu''' + \ldots}}$$

folglich

$$x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \ldots + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{\mu' + \cfrac{1}{\mu'' + \ldots}}}}$$

so daß also $\frac{p}{q}$ immer unter den Näherungswerthen zu x vorkommen muß, wobei für den Fall $y = 1$ nur zu bemerken, daß man dann den letzten Nenner $\mu + 1$, welcher sich als eine ganze Zahl darbieten wird, in $\mu + \frac{1}{1}$ zerlegen muß. Nimmt man diese Zerlegung nicht vor, so ist auch $\frac{p}{q}$ nicht unter den Näherungswerthen enthalten, und dann muß also nur die Bedingung $\delta < \frac{q}{q + q^0}$ erfüllt seyn.

50. Ist nun die unbestimmte Gleichung $x^2 - Ay^2 = \mp B$, vorausgesetzt, daß $B < \sqrt{A}$ ist, in ganzen Zahlen

p, q auflösbar; so muß $\frac{p}{q}$ unter den Näherungsbrüchen zu $\sqrt{A}$ enthalten seyn. Es ist

$$p^2 - Aq^2 = \mp B,$$

$$(p + q\sqrt{A})(p - q\sqrt{A}) = \mp B,$$

$$\frac{p}{q} - \sqrt{A} = \frac{\mp B}{q(p + q\sqrt{A})},$$

$$\sqrt{A} - \frac{p}{q} = \frac{\pm B}{q(p + q\sqrt{A})},$$

oder, für $\sqrt{A} - \frac{p}{q} = \frac{\pm\delta}{q^2}$

$$\frac{\pm\delta}{q^2} = \frac{\pm B}{q(p + q\sqrt{A})}, \quad \delta = \frac{Bq}{p + q\sqrt{A}}.$$

Sey nun $\frac{p^0}{q^0}$ der vor $\frac{p}{q}$ vorausgehende Näherungsbruch zu $\frac{p}{q}$ so kann $\frac{p^0}{q^0}$ immer so bestimmt werden, daß δ mit B einerlei Zeichen hat, und es ist also nur noch zu zeigen, daß

$$\frac{Bq}{p + q\sqrt{A}} < \frac{q}{q + q^0}, \quad B(q + q^0) < p + q\sqrt{A}$$

ist. Setzt man $p = q\sqrt{A} \mp \frac{\delta}{q}$; so verwandelt sich diese Bedingung in

$$(q + q^0)(\sqrt{A} - B) + (q - q^0)\sqrt{A} \mp \frac{\delta}{q} > 0.$$

Da $\sqrt{A} > B$, $q > q^0$, und $(q - q^0)\sqrt{A}$ mindestens $= \sqrt{A}$, welches $> \frac{\delta}{q}$, das ein echter Bruch ist; so erhellet, daß obige Bedingung unmittelbar erfüllt ist, und $\frac{p}{q}$ also unter den Näherungsbrüchen zu $\sqrt{A}$ vorkommt. (49.). Da nun (37.) überhaupt

$$\mp P_{n+1} = p_n p_n - q_n q_n A$$

in dortiger Bezeichnung; so berechne man die Größen P, P′, P″, u. s. f. (36.). Kommt unter diesen Größen eine P_{n+1} vor, welche $= B$; so giebt $\frac{p_n}{q_n}$ eine Auflösung der Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = \mp B,$$

in Bezug auf das obere oder untere Zeichen, jenachdem $\frac{p_n}{q_n} <$ oder $> \sqrt{A}$.

Trifft man in der ersten Periode auf kein P, welches $= B$ ist; so kann auch fernerhin keins vorkommen, und die Gleichung läßt sich in ganzen Zahlen nicht auflösen. Kommen in der ersten Periode mehrere P vor, welche $= B$; so giebt es auch mehrere entsprechende Auflösungen der Gleichung. Hat man schon eine Auflösung gefunden, so daß

$$p^2 - Aq^2 = \mp B,$$

und t, u sind zwei der Gleichung

$$t^2 - Au^2 = + 1$$

genügende Zahlen; so hat man

$$(p^2 - Aq^2)(t^2 - Au^2) = \mp B,$$
$$(pt \pm Aqu)^2 - A(pu \pm qt)^2 = \mp B,$$

so daß also auch

$$x = pt \pm Aqu\ ,\quad y = pu \pm qt$$

Auflösungen von $x^2 - Ay^2 = \mp B$ sind.

51. Was ferner über die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades zu sagen wäre, läßt sich hier nur in einer kurzen Uebersicht zusammenfassen. Sey die quadratische Gleichung

$$ax^2 - 2\alpha x = \varkappa$$

gegeben, wo a, α, $\varkappa$ ganze Zahlen sind, a positiv ist, und, wenn der Coefficient des zweiten Gliedes keine gerade Zahl wäre, dies leicht durch beiderseitige Multiplication der Gleichung mit 2 erreicht werden könnte. Es ist

$$x = \frac{\alpha \pm \sqrt{a\varkappa + \alpha^2}}{a}.$$

Sind nun die Wurzeln möglich, aber irrational; so werden sie sich nach einer ganz ähnlichen Methode, wie in (36.) in einen Kettenbruch verwandeln lassen, welcher, wie sich ganz streng zeigen läßt, ebenfalls immer periodisch seyn wird. Seyen nun $\frac{p^0}{q^0}$, $\frac{p}{q}$ zwei auf einander folgende Partialwerthe desselben, und $\frac{1}{z}$ der Bruch, welchen man zu dem letzten Nenner des dem Bruche $\frac{p}{q}$ entsprechenden Theils des Kettenbruchs noch hinzufügen muß, um den ganzen Kettenbruch zu erhalten; so ist bekanntlich immer

$$x = \frac{pz + p^0}{qz + q^0}, \quad z = \frac{q^0 x - p^0}{p - qx},$$

woraus, wenn man den Werth von x substituirt:

$$z = \frac{q^0 \alpha - p^0 a \pm q^0 \sqrt{a\varkappa + \alpha^2}}{pa - q\alpha \mp q\sqrt{a\varkappa + \alpha^2}},$$

und wenn Zähler und Nenner mit

$$pa - q\alpha \pm q\sqrt{a\varkappa + \alpha^2}$$

multiplicirt wird:

$$z = \frac{\pm(pq^0 - p^0 q)\sqrt{a\varkappa + \alpha^2} + (pq^0 + p^0 q)\alpha - pp^0 a + qq^0 \varkappa}{ap^2 - 2\alpha pq - \varkappa q^2}.$$

Setzen wir für $a\varkappa + \alpha^2 = A$:

$$z = \frac{\pm\sqrt{A} + Q}{P} = \frac{\pm(pq^0 - p^0 q)\sqrt{A} + (pq^0 - p^0 q)Q}{(pq^0 - p^0 q)P};$$

so ist

$$A = a\varkappa + \alpha^2,$$
$$(pq^0 - p^0 q)Q = (pq^0 + p^0 q)\alpha - pp^0 a + qq^0 \varkappa$$
$$(pq^0 - p^0 q)P = ap^2 - 2\alpha pq - \varkappa q^2.$$

52. Fassen wir nun der Kürze wegen bloß die letzte Gleichung ins Auge; so ist klar, daß, wegen $pq^0 - p^0 q = \pm 1$; p, q die Gleichung

$$ax^2 - 2\alpha xy - \varkappa y^2 = \pm P$$

in ganzen Zahlen auflösen, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem $\frac{p}{q} >$ oder $<$ als der Werth des ganzen Kettenbruchs ist. Giebt es mehrere vollständige Quotienten z, die den Nenner P haben, wie dies immer der Fall ist, wenn z in die Periode des Kettenbruchs fällt; so giebt es auch mehrere Auflösungen obiger Gleichung. Giebt man in Bezug auf die zweite Wurzel der quadratischen Gleichung dem vollständigen Quotienten die Form

$$z = \frac{\sqrt{A} - Q}{-P} = \frac{\sqrt{A} + Q'}{P'};$$

so ist

$$ax^2 - 2\alpha xy - \varkappa y^2 = \mp P',$$

unter denselben Bedingungen für $\frac{p}{q}$.

53. Sey nun überhaupt die Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = L$$

in ganzen Zahlen aufzulösen. Man kann offenbar immer

annehmen, daß a positiv, und auch, daß der Coefficient von xy eine gerade Zahl ist, weil, wenn namentlich letzteres nicht der Fall wäre, man die Gleichung nur mit 2 zu multipliciren brauchte.

1) Ist $b^2 - ac = 0$; so multiplicire man auf beiden Seiten mit a:

$$a^2x^2 + 2abxy + acy^2 = aL,$$
$$(ax + by)^2 - (b^2 - ac)y^2 = aL,$$
$$(ax + by)^2 = aL.$$

Folglich muß aL ein vollkommnes Quadrat seyn, wenn die Auflösung möglich seyn soll. Ist nun $aL = K^2$; so hat man

$$ax + by = K,$$

eine Gleichung des ersten Grades mit zwei Unbekannten, in ganzen Zahlen aufzulösen (1.). Daß man x, y immer positiv und negativ nehmen kann, ist klar.

2) Ist $b^2 - ac < 0, = - d$; so erhält man leicht:

$$(ax + by)^2 + dy^2 = aL,$$

oder, für $ax + by = t$:

$$t^2 + dy^2 = aL.$$

Also muß L, wenn die Gleichung auflösbar seyn soll, positiv seyn. Man setze nun $y = 1, 2, 3,$ u. s. f., und behalte für y nur die Werthe, für welche $aL - dy^2$ positiv, und ein vollkommenes Quadrat ist. Dadurch erhält man eine Reihe Werthe für t. Von den erhaltenen Werthen von y, t behält man dann ferner nur die, für welche $x = \frac{t - by}{a}$ eine ganze Zahl wird.

3) Ist $b^2 - ac$ ein vollkommnes Quadrat $= l^2$, und positiv; so hat man

$$(ax + by)^2 - l^2y^2 = aL,$$
$$\{ax + (b + l)y\}\{ax + (b - l)y\} = aL.$$

Sind nun f, g irgend zwei Factoren von aL; so setze man

$$ax + (b + l)y = f, \quad ax + (b - l)y = g;$$
$$y = \frac{f - g}{2l}, \quad x = \frac{f - (b + l)y}{a}.$$

Man zerlege also aL auf alle mögliche Arten in zwei Factoren f, g, bestimme durch dieselben nach den vorigen

Formeln y, x, und behalte die Werthe, welche ganze Zahlen sind.

4) Ist endlich $b^2 - ac$ positiv und keine vollkommne Quadratzahl; so setze man $a = a$, $b = -\alpha$, $c = -\varkappa$; so wird die gegebene Gleichung:

$$ax^2 - 2\alpha xy - \varkappa y^2 = L.$$

Da $a\varkappa + \alpha^2 = b^2 - ac$ positiv und eine unvollkommne Quadratzahl ist; so sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$ax^2 - 2\alpha x - \varkappa = o$$

möglich und irrational (51.). Daher entwickele man diese Wurzeln in Kettenbrüche, und bestimme die vollständigen Quotienten z (51.). Für jeden Nenner P eines solchen vollständigen Quotienten ist nun, wenn $\frac{p}{q}$ der entsprechende Näherungswerth ist:

$$ap^2 - 2\alpha pq - \varkappa q^2 = \pm P,$$
$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = \pm P.$$

Sind nun in irgend einem Falle bei dieser Entwickelung die Größen auf der rechten Seite der Gleichungen

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = L,$$
$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = \pm P,$$

mit einander übereinstimmend; so geben p, q eine Auflösung der gegebenen Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = L.$$

Hat man z. B. die Gleichung

$$2x^2 - 14xy + 17y^2 = 5;$$

so ist, für

$$2x^2 - 14x + 17 = o,\ x = \frac{7 \pm \sqrt{15}}{2}.$$

Die Entwickelung der kleinern Wurzel in einen Kettenbruch giebt:

$$x = \frac{7 - \sqrt{15}}{2} = 1 + \frac{1}{x'};$$
$$x' = \frac{2}{5 - \sqrt{15}} = \frac{5 + \sqrt{15}}{5} = 1 + \frac{1}{x''};$$
$$x'' = \frac{5}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{3} = 1 + \frac{1}{x'''}$$

$$x'''' = \frac{3}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{2} = 3 + \frac{1}{x'''''},$$

$$x''''' = \frac{2}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{3} = 2 + \frac{1}{x''''''};$$

u. s. f. u. s. f.

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Der Nenner des vollständigen Quotienten $\frac{5+\sqrt{15}}{5}$ ist $=$ 5. Der entsprechende Partialwerth ist $= 1 = \frac{1}{1}$. Also ist, da hier $\frac{p}{q} < x$ ist (52.):

$$2.1^2 - 14.1.1 + 17.1^2 = 5,$$

so daß also 1, 1 eine Auflösung unserer Gleichung ist.

Für $2x^2 - 14xy + 17y^2 = -3$ erhält man durch Entwickelung der größern Wurzel der Gleichung

$$2x^2 - 14x + 17 = 0$$

in einen Kettenbruch

$$x = \frac{\sqrt{15}+7}{2} = 5 + \frac{1}{x'};$$

$$x' = \frac{2}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{3} = 2 + \frac{1}{x''};$$

$$x'' = \frac{3}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{2} = 3 + \frac{1}{x'''};$$

$$x''' = \frac{2}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{3} = 2 + \frac{1}{x''''};$$

u. s. f. u. s. f.

$$x = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}$$

Die Periode ist 2, 3. Die Partialbrüche, welche den vollständigen Quotienten x', x''', x''''', u. s. f. deren Nenner alle $=3$, entsprechen, sind alle $< x$. Folglich geben alle diese Partialbrüche $\frac{5}{1}$, $\frac{38}{7}$, $\frac{299}{55}$, u. s. f. eine Auflösung unserer Gleichung in ganzen Zahlen, da

$$2.5^2 - 14.5.1 + 17.1^2 = -3,$$

$$2.38^2 - 14.38.7 + 17.7^2 = -3,$$

$$2.299^2 - 14.299.55 + 17.55^2 = -3,$$

u. s. f. u. s. f.

Für $2x^2 - 14xy + 17y^2 = 3$ findet man keine Auflösung in ganzen Zahlen, und für $2x^2 - 14xy + 17y^2 = 2$ die Auflösungen 1, 11, 87, 685, 5393,..., oder 1, 3, 25, 197, 1551,... mit 0, 2, 16, 126, 992,...

54. Ist nun die allgemeinere Gleichung

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

aufzulösen, wo durch Multiplication mit 2 der Coefficient von xy immer zu einer geraden Zahl gemacht werden kann; so setze man

$$y = \varkappa y' + \alpha, \quad x = \lambda x' + \beta,$$

und suche die Gleichung, um sie auf dieselbe Form wie in (53.) zu bringen, von den Gliedern der ersten Dimension zu befreien. Macht man die Substitution; so sind die Coefficienten von y', x':

$$(2a\alpha + 2b\beta + d)\varkappa, \quad (2\beta c + 2\alpha b + e)\lambda.$$

Man setze also

$$2a\alpha + 2b\beta + d = 0, \quad 2\beta c + 2\alpha b + e = 0;$$

$$\alpha = \frac{cd - be}{2(b^2 - ac)}, \quad \beta = \frac{ae - bd}{2(b^2 - ac)}.$$

Ferner setze man $\varkappa = \lambda = \frac{1}{2(b^2 - ac)}$; so wird

$$y = \frac{y' + cd - be}{2(b^2 - ac)}, \quad x = \frac{x' + ae - bd}{2(b^2 - ac)}.$$

Dies sind zwei Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten, aus denen man y, x durch y', x' nach bekannten Methoden, wenn es möglich ist, so bestimmen kann, daß y, x ganze Zahlen werden (1.). Multiplicirt man nun die beiden obigen = 0 gesetzten Größen mit α, β, und addirt; so erhält man leicht:

$$-(a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2) = \frac{d\alpha + e\beta}{2} = \frac{ae^2 - 2bed + cd^2}{4(b^2 - ac)},$$

und hieraus, wenn man den letzten Bruch $= \frac{M}{4N}$ setzt, und die Substitutionen in der gegebenen Gleichung wirklich ausführt:

$$ay'^2 + 2bx'y' + cx'^2 + 4N^2f + MN = 0,$$

eine Gleichung von derselben Form, wie in (53.), die man also auflösen kann. Für

$$7y^2 - 2xy + 3x^2 - 30y + 10x + 8 = 0$$

ist $y = \frac{y' - 80}{-40}$, $x = \frac{x' + 40}{-40}$.

Da nun y, x ganze Zahlen seyn müssen; so kann man $-40y'$, $-40x'$ für y', x' setzen. Dies giebt $y = y' + 2$, $x = x' - 1$. Die transformirte Gleichung ist:

$$7y'^2 - 2x'y' + 3x'^2 = 27.$$

In derselben ist $b^2 - ac = 1 - 21 = -20$, also < 0. Sie kann folglich nach (53. 2.) aufgelöset werden. Man erhält $y' = \pm 0, \pm 2$; $x' = \pm 3, \pm 1$. Also $y = 2, 2, 4, 0$; $x = 2, -4, 0, -2$.

Ist $b^2 - ac = 0$; so ist obige Auflösung nicht anwendbar. Man multiplicire in diesem Falle die gegebene Gleichung mit a, und addire auf der linken Seite $(b^2 - ac)x^2$; so erhält man

$$(ay + bx)^2 + a\,dy + aex + af = 0.$$

Also für $ay + bx = z$:

$$z^2 + a\,dy + b\,dx + aex - b\,dx + af = 0,$$
$$z^2 + d(ay + bx) + (ae - bd)x + af = 0,$$
$$z^2 + dz + (ae - bd)x + af = 0.$$

Dies ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten, deren eine den ersten Grad nicht übersteigt. Man kann also diese Gleichung in ganzen Zahlen auflösen (14.). Da nun

$$y = \frac{z - bx}{a};$$

so setzt man für x, z nur die Werthe, für welche auch y eine ganze Zahl wird, wodurch dann auch y bestimmt ist.

55. Ueber den zweiten Grad hinaus giebt es nicht so allgemeine Methoden zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen, wie die vorhergehenden. Nur einzelne Fälle sind bis jetzt von den Mathematikern behandelt worden. Hierüber noch mehr zu sagen verbietet uns die Beschränktheit des Raumes, und wir schließen daher diesen Artikel mit einigen historischen Bemerkungen.

56. Für den Erfinder der unbestimmten Analytik hält man gewöhnlich den Alexandriner Diophantus, dessen Zeitalter sehr ungewiß ist. Gewöhnlich setzt man ihn in den

Zeitraum von 200 v. Ch. bis 400 v. Ch. Einige machen ihn zu einem Zeitgenossen des Nero, Bombelli läßt ihn zur Zeit des Kaisers Antoninus Pius, und Abulpharagius unter dem Kaiser Julianus Apostata leben; aber alle diese Angaben sind sehr unbestimmt und zweideutig, worüber mit Mehrerem die sehr schätzbare Vorrede zu: Diophantus von Alexandria arithm. Aufgaben. A. d. Griech. von Otto Schulz Berlin. 1822. nachzusehen ist. Dieses berühmte Werk des Diophantus enthält eine treffliche Sammlung algebraischer, vorzüglich unbestimmter, Aufgaben, die zu Exempeln der obigen allgemeinen Methoden sehr geeignet sind. Indeß ist nach O. Schulz (a. a. O. S. XXIII.) Diophantus nicht Erfinder dieses Theils der Analysis, sondern bloß Sammler des schon früher Entdeckten, und sein Verdienst besteht vorzüglich in einer faßlichen Darstellung. Die erste Uebersetzung veranstaltete W. Xylander oder Holzmann von Augsburg (Basileae. 1575. fol.), die erste Ausgabe des Textes Claudius Caspar Bachet, Herr von Meziriac (Lutetiae Paris. 1691. fol.), wovon Tolosae. 1760. fol. eine neue mit vielen Anmerkungen Fermats bereicherte, von Samuel Fermat, dem Sohne, veranstaltete Ausgabe erschien. Die neueste Uebersetzung ist die schon oben angeführte deutsche v. O. Schulz, ein sehr verdienstliches Unternehmen. Das Werk enthält einen wahren Schatz sehr scharfsinnig aufgelöster Aufgaben, und ist daher zur Uebung in der unbestimmten Analytik sehr zu empfehlen. Das letzte, sechste, Buch beschäftigt sich allein mit Aufgaben über sogenannte rationale Dreiecke (Vergl. Trig. 34.), und angehängt ist der deutschen Uebersetzung eine früher schon von Poselger (Lpzg. 1810.) übersetzte Schrift über die Polygonalzahlen. Auch die Indier haben die Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades gekannt; die Commentatoren des Bhasker oder Bhascara-Acharya (1150; aus der Stadt Bidder) legen diese Erfindung dem Arya-Batta, den man für einen Zeitgenossen des Diophant hält, bei. M. s. Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sans-

crit of Brahmegupta and Bhascara. Translated by Henry Thomas Colebrooke. London. 1817.; auch vergl. m. Hutton mathematical Tracts etc. London. 1812. Nach O. Schulz (a. a. O. S. XXIV.) findet kein Zusammenhang zwischen der Algebra der Indier und der Griechen statt.

57. Wir müssen gleich hier bemerken, daß die unbestimmte Analytik in unmittelbarer Verbindung steht mit einem gewissen höhern Theile der Arithmetik, welchen man seit Legendre die Theorie der Zahlen nennt, der sich einzig und allein mit der Untersuchung der Eigenschaften der ganzen Zahlen beschäftigt, wodurch er sich wesentlich von dem eigentlich rechnenden Theile der Arithmetik unterscheidet. Fermat hat z. B. gefunden, daß jede Primzahl von der Form $4n+1$ die Summe zweier Quadrate ist, welches dasselbe ist, als wenn man sagte, die unbestimmte Gleichung $a = x^2 + y^2$ ist, wenn a eine Primzahl von der Form $4n+1$ bezeichnet, immer in ganzen Zahlen auflösbar. Daher braucht man die Ausdrücke unbestimmte Analytik und Theorie der Zahlen jetzt gewöhnlich als gleichbedeutend, und wenn in diesem Wörterbuche der Beweis einiger merkwürdigen Eigenschaften der ganzen Zahlen in den Art. Zahl verwiesen worden ist; so ist dies nur deshalb geschehen, um vorliegenden Artikel nicht zu sehr auszudehnen, und weil es zweckmäßig schien, jene Eigenschaften abgesondert im Zusammenhange beisammen zu haben. Der Art. Zahl kann aber sehr zur Ergänzung des gegenwärtigen dienen.

58. Nach Diophant ward die unbestimmte Analytik nur erst wieder durch Vieta, mehr aber durch Bachet durch seinen Commentar zum Diophant, und seine Schrift: Problèmes plaisans et delectables sur les nombres. Lyon. 1612. gefördert, worin er auch eine sehr sinnreiche Auflösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades gab. Der größte Meister in diesem Theile der Analysis war aber Fermat, Parlamentsrath zu Toulouse, über dessen Entdeckungen der Artt. Fermats Lehrsätze nachzusehen ist. Den englischen Geometern legte er die unbestimmte Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ zur Auf-

lösung in ganzen Zahlen vor. Lord Brounker gab eine Auflösung, die sich in Wallis Werken (Algebra. Cap. XCVIII.), Eulers Algebra (Thl. II. Kap. VII.), und auch Ozanams Algebra, wo sie Fermat beigelegt wird, befindet. Indeß scheint Fermat nie eine Auflösung gegeben zu haben, und an Brounkers Auflösung möchte vorzüglich auszusetzen seyn, daß sie nicht auf eine ganz deutliche Art zeigt, daß die Aufgabe immer möglich ist. Die oben (35. ff.) mitgetheilte Auflösung mittelst der Kettenbrüche gab Lagrange (Mélanges de Turin. T. IV. Mém. de Berlin. 1767.), und sie genügt gewiß allen Anforderungen. Nach Fermat ist, nebst Euler, Lagrange der Mathematiker, welchem die unbestimmte Analytik offenbar am Meisten verdankt; und trat er auch in Eulers Fußtapfen, so hat er doch allein die Methoden, welche oft auf einem bloßen Probiren beruheten, zu völliger Allgemeinheit und Bestimmtheit erhoben. Eulers und Lagranges Abhandlungen findet man ziemlich ausführlich verzeichnet in Reuss Repertorium Commentationum a Societat. litt. editarum, T. VII. Gott. 1808. p. 107. sqq. worauf wir hier der Kürze wegen verweisen. Im zweiten Theile seiner Algebra lieferte Euler den ersten einigermaßen vollständigen Lehrbegriff dieser Wissenschaft, dessen Brauchbarkeit durch Lagrange's Zusätze außerordentlich gewann. Als die beste Ausgabe ist zu empfehlen: Élémens d'Algèbre par L. Euler, trad. de l'All. Nouv. éd. revue et augmentée de notes, par Garnier. T. I. II. Paris. 1807. Die Zusätze von Lagrange T. II. p. 281 — 485. Den vollständigsten Lehrbegriff lieferte Legendre (Essai sur la Théorie des nombres. 2ième éd. Paris. 1808. 4.), welcher nicht bloß die Methoden der unbestimmten Analytik, sondern auch eine große Menge der merkwürdigsten Eigenschaften der Zahlen enthält. Auch Trembley, Lagny, Leslie, Fontana und Kausler haben sich nicht ohne Erfolg diesen Untersuchungen gewidmet. Ihre Arbeiten sind bei Reuß a. a. O. verzeichnet. Kausler hat die Zusätze von Lagrange zu Eulers Algebra besonders

übersetzt (Frankft. 1796.). Für den ersten Unterricht kann dienen: Hellwig Anfangsgründe der unbest. Anal. Brnschwg. 1803. Gauß allein hat die unbestimmte Analytik und Zahlenlehre mehr gefördert, als viele seiner Vorgänger. Sein berühmtes Werk: Disquisitiones arithmeticae. Lips. 1801. enthält einen überaus großen Schatz der scharfsinnigsten Methoden, eine Menge neuer höchst merkwürdiger Sätze, und muß den Liebhabern zum Studium eifrigst empfohlen werden, da die Methoden dem Vf. so eigenthümlich sind, daß von demselben ohne größere Weitläufigkeit, als der Raum hier erlaubte, nicht Gebrauch gemacht werden konnte. Das Werk muß ganz und im Zusammenhange studirt werden. Es geht übrigens von ganz einfachen Sätzen und Principien aus. S. Zahl.

Unbestimmte Aufgaben sind solche, welche eine ganz unbestimmte Anzahl von Auflösungen zulassen. Eine Aufgabe, welche auf eine Gleichung des vierten Grades führt, kann, wenn alle Wurzeln der Gleichung reell sind, auf vier verschiedene Arten aufgelöset werden, ist aber dessenungeachtet doch eine bestimmte Aufgabe, weil die Anzahl der möglichen Auflösungen bestimmt ist. Eine unbestimmte Aufgabe führt immer auf weniger Gleichungen, als unbekannte Größen zu bestimmen sind, welches in dem Art. Unbestimmte Analytik weiter auseinander gesetzt worden ist, worauf wir überhaupt in Bezug auf die Auflösung unbestimmter arithmetischer Aufgaben verweisen. Gegenwärtiger Artikel soll der Auflösung einiger unbestimmten geometrischen Probleme gewidmet seyn.

1. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels BAC $= \alpha$ (Fig. 87.) einen Punkt P von solcher Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der mit den Schenkeln des Winkels parallel gezogenen Linien $PQ + PQ' = a$ sey, d. h. eine gegebene Größe habe.

Man nehme A als Anfang, AC als Axe der Abscissen an, und setze $AR = x$, $PR = y$; so ist

$$PQ = x - PQ'.\cos\alpha,\quad y = PQ'.\sin\alpha;$$
$$= x - y\cot\alpha,\ PQ' = y\,\mathrm{cosec}\,\alpha,$$
$$x + y(\mathrm{cosec}\,\alpha - \cot\alpha) = a,$$
$$x + y.\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = a,$$

woraus leicht

$$x = a - y\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Dies ist eine Gleichung zwischen zwei unbekannten Größen. Eine dieser Größen läßt sich also immer willkührlich annehmen, und bestimmt man dann nur die andere Coordinate mittelst der gefundenen Gleichung; so wird immer der durch diese beiden Coordinaten bestimmte Punkt der Aufgabe Genüge leisten. Man sieht also, daß es unendlich viele Auflösungen unserer Aufgabe giebt, und diese also zu den unbestimmten gehört. Bekanntlich (s. Krumme Linie) stellt jede Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen eine Curve von einfacher Krümmung dar. Alle Punkte dieser Curve erfüllen also die Bedingungen der Aufgabe, und diese Curve ist folglich der geometrische Ort (s. diesen Art.) dieser Punkte. In unserm Falle stellt die Gleichung eine gerade Linie dar (Linie, gerade. 13.), welche construirt wird, wenn man AD = a, und den Winkel $\gamma = 90^0 - \frac{1}{2}\alpha$ macht, wo dann jeder Punkt in DE der Aufgabe Genüge leistet. Denn die Gleichung dieser Linie ist:

$$y = x\,\mathrm{tang}(180^0 - \gamma) + A = x\,\mathrm{tang}(90^0 + \tfrac{1}{2}\alpha) + A$$
$$= -x\cot\tfrac{1}{2}\alpha + A.$$

Da nun $x = a$ für $y = 0$; so erhält man leicht $A = a\cot\frac{1}{2}\alpha$, und folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $\mathrm{tang}\frac{1}{2}\alpha$ multiplicirt:

$$y\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = -x + a,\quad x = a - y\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\alpha,$$

die obige Gleichung, so daß also DE der geometrische Ort des gesuchten Punktes ist.

Ueberhaupt sind alle Aufgaben über geometrische Oerter unbestimmte Aufgaben, und dieser und jener Artikel werden sich also gegenseitig ergänzen. Hier haben wir es indeß immer bloß mit der analytischen Auflösung zu thun.

2. Durch zwei gegebene Punkte A, B (Fig. 88.) zwei

Linien AP, BP zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel einschließen.

Man nehme A als Anfang, AB als Axe der Abscissen, und setze AB $= \alpha$. Die Tangente des gegebenen Winkels sey $= t$. Die Gleichungen der geraden Linien AP, BP sind $y = ax$, $y = a'x + b'$. Für letztere wird $y = o$, wenn $x = \alpha$. Dies giebt $b = - a'\alpha$, und die Gleichungen sind also:

$$y = ax,\ y = a'(x - \alpha).$$

Folglich (Linie, gerade. 16.):

$$t = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Sind nun x', y' die Coordinaten von P; so hat man:

$$y' = ax',\ y' = a'(x' - \alpha),\ t = \frac{a' - a}{1 + aa'};$$

und, wenn man a, a' eliminirt:

$$x'^2 + y'^2 - \alpha x' - \frac{\alpha y'}{t} = o;$$

$$\left.\begin{array}{l} x'^2 - 2 \cdot \frac{\alpha}{2} x' + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \\ + y'^2 - 2 \cdot \frac{\alpha}{2t} y' + \left(\frac{\alpha}{2t}\right)^2 \end{array}\right\} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2t}\right)^2,$$

$$\left(x' - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{\alpha}{2t}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{4}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right),$$

d. i. für

$$x' - \frac{\alpha}{2} = x,\ y' - \frac{\alpha}{2t} = y,\ \frac{\alpha}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = r:$$

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

die Gleichung des Kreises. Also ist der geometrische Ort der Spitzen aller Winkel, welche der Aufgabe genügen, ein Kreis, wie auch sogleich aus Eucl. Elem. III. 33. folgt.

3. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Kreise berührt.

Die Mittelpunkte der gegebenen Kreise seyen A, B (Fig. 89.), die Halbmesser r, r', die Linie AB $= a$. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sey C, und AP $= x$, PC $= y$, der Halbmesser des gesuchten Kreises $= \varrho$; so erhellet augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = (r + \varrho)^2 = r^2 + 2r\varrho + \varrho^2,$$
$$(a - x)^2 + y^2 = (r' + \varrho)^2 = r'^2 + 2r'\varrho + \varrho^2;$$

woraus durch Subtraction:

$$2ax - a^2 = r^2 - r'^2 + 2(r - r')\varrho,$$
$$\varrho = \frac{2ax - a^2 - r^2 + r'^2}{2(r - r')}.$$

Setzt man dies in die erste Gleichung; so erhält man nach einigen Reductionen:

$$y^2 = \frac{\{(2x - a)^2 - (r - r')^2\}\{a^2 - (r - r')^2\}}{4(r - r')^2},$$

welches die Gleichung des Orts des Mittelpunktes des gesuchten Kreises ist. Für die Punkte, in welchen die Curve die Abscissenaxe schneidet, muß seyn:

$$(2x - a)^2 = (r - r')^2, \quad 2x - a = \pm (r - r');$$
$$x = \frac{a \pm r \mp r'}{2}.$$

Also schneidet die Curve die Abscissenaxe in zwei Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, für welche

$$A\mathfrak{A} = \frac{a - r + r'}{2}, \quad A\mathfrak{B} = \frac{a + r - r'}{2};$$
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = r - r'$$

ist. Da

$$D\mathfrak{A} = r + \frac{a - r + r'}{2} = \frac{a + r + r'}{2} = \tfrac{1}{2}DE,$$

$$F\mathfrak{B} = - r + \frac{a + r - r'}{2} = \frac{a - r - r'}{2} = \tfrac{1}{2}FG,$$

ist; so findet man die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, wenn man die Linien DE und FG halbirt. Ist $\mathfrak{C}$ der Mittelpunkt von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, und $\mathfrak{C}P = x'$; so ist

$$x = A\mathfrak{A} + \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}P = \frac{a - r + r'}{2} + \frac{r - r'}{2} + x',$$

d. i. $x = \frac{1}{2}a + x'$, woraus auch zugleich erhellet, daß $A\mathfrak{C} = \frac{1}{2}a$, und folglich $\mathfrak{C}$ die Mitte von AB ist. Setzt man nun $2x - a = 2x'$ in die gefundene Gleichung; so wird

$$y^2 = \frac{a^2 - (r - r')^2}{(r - r')^2}\left\{x'^2 - \left(\frac{r - r'}{2}\right)^2\right\},$$

und der Ort ist folglich eine Hyperbel, deren Hauptaxe $= r - r'$, Nebenaxe $= \sqrt{a^2 - (r - r')^2}$, Scheitel

A, B, Mittelpunkt C (Hyperbel. 3.). Ist e die Excentricität; so ist (Hyperbel. 10.)

$$4e^2 = \{a^2 - (r - r')^2\} + (r - r')^2 = a^2.$$

Folglich sind, da $AC = CB = \frac{1}{2}a$ ist, A und B die beiden Brennpunkte. Hierdurch ist die Hyperbel vollkommen bestimmt.

Ist $a = (r - r')\sqrt{2}$; so sind die beiden Axen einander gleich, und die Hyperbel ist gleichseitig.

Ist der eine Kreis ein Punkt, also ein Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis berührt, und durch einen gegebenen Punkt geht; so ist $r' = o$, und

$$y^2 = \frac{a^2 - r^2}{r^2}\left\{x'^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2\right\}$$

die Gleichung der Hyperbel

4. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene gerade Linie berührt, und durch einen gegebenen Punkt hindurch geht.

Sey (Fig. 90.) P der gegebene Punkt, AB die gegebene Linie. Man setze $AP = a$, nehme AP als Abscissenaxe, AB als Ordinatenaxe an, so daß also $AB = y$, $BC = x$. Da $PC = BC = x$; so erhellet augenblicklich die Richtigkeit der Gleichung

$$x^2 = y^2 + (x - a)^2 = y^2 + x^2 - 2ax + a^2,$$
$$o = y^2 - 2ax + a^2, \quad y^2 = a(2x - a),$$

welches die Gleichung des Orts des Mittelpunktes des gesuchten Kreises ist. y wird $= o$, für $2x - a = o$, $x = \frac{1}{2}a$, so daß also, wenn E der Mittelpunkt von AP, E ein Punkt der Curve ist. Nimmt man E als Anfang der Abscissen x'; so ist $x = \frac{1}{2}a + x'$, $2x - a = 2x'$, und folglich $y^2 = 2ax'$ die Gleichung der Curve, welche also eine Parabel ist, deren Scheitel E, und Parameter $= 2a$. Da $EP = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}.2a$; so ist der gegebene Punkt der Brennpunkt dieser Parabel.

5. Einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis und eine gegebene gerade Linie berührt.

Sey A (Fig. 91.) der Mittelpunkt, r der Radius des gegebenen Kreises, BP die gegebene Linie, C der Mit-

telpunkt des gesuchten Kreises, $AB = a$, $CP = x$, $BP = y$; so ist

$$AC^2 = AD^2 + CD^2, \quad (r + x)^2 = (a - x)^2 + y^2,$$

woraus man leicht erhält:

$$y^2 = 2(a + r)x - (a^2 - r^2)$$
$$= 2(a + r)\left\{x - \frac{a - r}{2}\right\}.$$

y wird $= o$ für $x = \frac{a - r}{2}$, so daß also, wenn F der Mittelpunkt von BE ist, dieser Punkt der Curve angehören wird. Nimmt man F als Anfang der Abscissen x'; so ist

$$x = \frac{a - r}{2} + x',$$

und folglich $y^2 = 2(a + r)x'$, der Ort also eine Parabel, deren Scheitel F, Parameter $= 2(a + r)$. Die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel ist $= \frac{2(a + r)}{4} = \frac{a + r}{2}$, und der Focus wird also gefunden, wenn man die Linie GB halbirt.

6. Die Grundlinie eines Dreiecks, und der Unterschied der Winkel an derselben sind gegeben; man soll den Ort der Spitze finden.

Sey AC (Fig. 92.) $= a$ in D halbirt, $A - C = \delta$, und D der Anfang der Coordinaten, $DP = x$, $BP = y$; so ist $AP = \frac{1}{2}a - x$, $CP = \frac{1}{2}a + x$. Also

$$\tang A = \frac{y}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{2y}{a - 2x}, \quad \tang C = \frac{y}{\frac{1}{2}a + x} = \frac{2y}{a + 2x};$$

$$\tang(A - C) = \tang \delta = \frac{2xy}{\frac{1}{4}a^2 - x^2 + y^2},$$

woraus:

$$y^2 - 2xy \cot \delta - x^2 + \frac{1}{4}a^2 = o.$$

Um nun zu irgend einem andern rechtwinkligen Coordinatensysteme, ohne den Anfang zu verlegen, überzugehen, muß man, wie leicht aus dem Art. Coordinate gefunden wird, allgemein

$$x = mu + nt, \quad y = nu - mt$$

setzen, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{array}{l}(n^2 - m^2 - 2mn\cot\delta)u^2 - (n^2 - m^2 - 2mn\cot\delta)t^2 \\ \quad - 2tu\{2mn + (n^2 - m^2)\cot\delta\} + \tfrac{1}{4}a^2\end{array}\right\} = 0.$$

Bestimmt man nun m, n so, daß

$$n^2 - m^2 - 2mn\cot\delta = 0,$$

so ist die Gleichung

$$2tu\{2mn + (n^2 - m^2)\cot\delta\} = \tfrac{1}{4}a^2,$$

die Gleichung einer gleichseitigen (da die Coordinaten senkrecht auf einander angenommen sind) Hyperbel zwischen ihren Asymptoten (Hyperbel. 8.). Der Mittelpunkt derselben ist der Punkt D. Da, wie ebenfalls aus dem Art. Coordinate leicht geschlossen wird, indem hier die Coordinaten senkrecht auf einander sind, $n^2 + m^2 = 1$, und nach obiger Bedingung $n^2 - m^2 = 2mn\cot\delta$ ist; so wird, wenn man den Unterschied der Quadrate nimmt:

$$4m^2n^2\operatorname{cosec}\delta^2 = 1,\quad 2mn\operatorname{cosec}\delta = \pm 1.$$

Die Gleichung der Hyperbel aber wird:

$$2tu\{2mn + 2mn\cot\delta^2\} = \tfrac{1}{4}a^2,$$

oder $4mntu\operatorname{cosec}\delta^2 = \frac{1}{4}a^2$, d. i., wenn man $2mn\operatorname{cosec}\delta = +1$ setzt,

$$2tu\operatorname{cosec}\delta = \tfrac{1}{4}a^2,\quad tu = \tfrac{1}{8}a^2\sin\delta.$$

Ist α der Winkel der Axe der t mit der Axe der x an der Seite der negativen y; so ist $m = \sin\alpha$, $n = \cos\alpha$; also

$$2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{cosec}\delta = 1,\quad \sin 2\alpha = \sin\delta,$$

$\alpha = \frac{1}{2}\delta$. Dadurch ist die Lage der Asymptoten bestimmt. Man mache nämlich den Winkel ADE $= \frac{1}{2}\delta$, und errichte auf EF durch D das Perpendikel GH; so sind EF, GH die Asymptoten der Hyperbel, welche nun, da sie, wie aus der Gleichung $tu = \frac{1}{8}a^2\sin\delta$, wenn man $t = \pm\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\delta$, $u = \pm\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}\delta$ setzt, sogleich erhellet, durch A und C gehen muß, leicht beschrieben werden kann. Setzte man $2mn\operatorname{cosec}\delta = -1$; so erhielte man auf ganz ähnliche Art $\sin 2\alpha = -\sin\delta = \sin(180^0 + \delta)$, $\alpha = 90^0 + \frac{1}{2}\delta$, d. h. den Winkel ADG, und folglich keine neue Auflösung.

7. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels BAC (Fig. 93.) $= \alpha$ bewege sich eine Linie MN von be-

stimmter Länge, so daß ihre Endpunkte immer die Schenkel des Winkels berühren. Man sucht den Ort eines in der Linie MN gegebenen Punktes K, für welchen MK = m, NK = n ist.

Nimmt man A als Anfang, AC als Axe der Abscissen, α als Coordinatenwinkel an, und setzt AL = x, LK = y; so ist

$$m : m + n = x : AN\,,\ AN = \frac{(m+n)x}{m}\,;$$

$$n : m + n = y : AM\,,\ AM = \frac{(m+n)y}{n}\,;$$

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN.\cos\alpha$$

(Trigonometrie. 7.). Also, wenn man mit m + n = MN aufhebt:

$$1 = \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 - 2.\frac{x}{m}\frac{y}{n}\cos\alpha,$$

oder, für $x' = \frac{x}{m}$, $y' = \frac{y}{n}$:

$$1 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\alpha$$

die Gleichung der gesuchten Curve, woraus man leicht erhält:

$$y' = x'\cos\alpha \pm \sqrt{1 - x'^2\sin\alpha^2}\,.$$

Für $x'\sin\alpha > 1$ wird y' imaginär, und für $x'\sin\alpha = 1$, $x' = \mathrm{cosec}\,\alpha$, ist also die Ordinate eine Berührende, da sie nur den einen Werth $y' = x'\cos\alpha = \mathrm{cosec}\,\alpha\cos\alpha = \cot\alpha$ hat. Sey nun

$$AE = x = m\,\mathrm{cosec}\,\alpha,\ EF = y = n\cot\alpha,$$

wo EF der Ordinatenaxe parallel ist. Man ziehe AF, nehme diese Linie als Axe der Abscissen an, und setze AF = $\varkappa$, AD = x'', DK = y''; so ist

$$AE : AL = AF : AD,\ AE : EF = AL : LD;$$

$$m\,\mathrm{cosec}\,\alpha : x = \varkappa : x'',\ x = \frac{mx''\,\mathrm{cosec}\,\alpha}{\varkappa}\,;$$

$$m\,\mathrm{cosec}\,\alpha : n\cot\alpha = x : LD,\ LD = \frac{nx\cos\alpha}{m}\,.$$

Da nun LD + y'' = y; so hat man:

$$x = \frac{mx''\,\mathrm{cosec}\,\alpha}{\varkappa}\,,\ y = y'' + \frac{nx''\cot\alpha}{\varkappa}\,;$$

$$x' = \frac{x''}{x \sin\alpha}, \quad y' = \frac{y''}{n} + \frac{x'' \cos\alpha}{x \sin\alpha}.$$

Dies in die gefundene Gleichung gesetzt, giebt:

$$1 = \frac{x''^2}{x^2 \sin\alpha^2} + \frac{y''^2}{n^2} - \frac{x''^2 \cos\alpha^2}{x^2 \sin\alpha^2},$$

d. i.

$$1 = \frac{x''^2}{x^2} + \frac{y''^2}{n^2}.$$

Also ist der Ort eine Ellipse, deren zwei conjugirte Diameter AF $= x$, AG $=$ n sind (Ellipse. 17.), woraus sich, da Lage und Größe dieser Diameter gegeben sind, die Ellipse immer beschreiben läßt.

8. Durch zwei gegebene Punkte M, M′ im Raume zwei Linien MP, M′P zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel MPM′ $= \alpha$ einschließen.

Die Coordinaten der Punkte M, M′, P seyen a, b, c; a′, b′, c′; x, y, z; die Gleichungen der Linien MP, M′P (Linie, gerade. 20.):

$$y = Ax + \mathfrak{A}, \quad z = Bx + \mathfrak{B};$$
$$y = A'x + \mathfrak{A}', \quad z = B'x + \mathfrak{B}'.$$

Da diese Linien aber durch M, M′ gehen; so ist

$$b = Aa + \mathfrak{A}, \quad c = Ba + \mathfrak{B};$$
$$b' = A'a' + \mathfrak{A}', \quad c' = B'a' + \mathfrak{B}';$$
$$y - b = A(x - a), \quad z - c = B(x - a);$$
$$y - b' = A'(x - a'), \quad z - c' = B'(x - a').$$

Also (Linie, gerade. 32.):

$$\cos\alpha = \frac{1 + AA' + BB'}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(1 + A'^2 + B'^2)}}.$$

Nimmt man aber der Kürze wegen M als Anfang der Coordinaten, MM′ als Axe der z an; so ist a $=$ b $=$ c $=$ o, a′ $=$ b′ $=$ o. Also

$$y = Ax, \quad z = Bx;$$
$$y = A'x, \quad z - c' = B'x.$$

Bestimmt man nun hieraus A, B, A′, B′ durch x, y, z, entwickelt aus dem Ausdrucke für $\cos\alpha$ die Ausdrücke:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(AB' - A'B)^2 + (A - A')^2 + (B - B')^2}}{\sqrt{(1 + A^2 + B^2)(1 + A'^2 + B'^2)}},$$

$$\tan\!g\,\alpha = \frac{\sqrt{(AB' - A'B)^2 + (A - A')^2 + (B - B')^2}}{1 + AA' + BB'},$$

die man leicht mittelst bekannter goniometrischer Formeln findet, und setzt in letztern die gefundenen Werthe von A, B, A′, B′; so erhält man:

$$\tang \alpha = \frac{c'\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2 - c'z},$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - c'z)^2 = \frac{c'^2}{\tang \alpha^2}(x^2 + y^2),$$

so daß also der Ort des Punktes P eine Fläche des zweiten Grades ist.

Durch eine einfache geometrische Betrachtung überzeugt man sich sogleich, daß diese Fläche erzeugt werden muß, wenn sich ein über der Linie MM′ = c′ als Sehne beschriebener, des Winkels α fähiger, Kreisabschnitt um seine Sehne bewegt, welches sich auch leicht aus der gefundenen Gleichung ableiten läßt. Denkt man sich nämlich durch MM′ und P eine Ebene gelegt, und in derselben auf die Axe des z ein Perpendikel u von P gefällt; so ist klar, daß $u^2 = x^2 + y^2$, also

$$(u^2 + z^2 - c'z)^2 = \frac{c'^2}{\tang \alpha^2}u^2,$$

$$u^2 + z^2 - c'z = \pm \frac{c'u}{\tang \alpha},$$

woraus, verglichen mit (2.), das Gesagte erhellet.

9. Seyen mehrere Punkte im Raume gegeben; man soll die Lage einer Ebene bestimmen, so daß die Summen der von den gegebenen Punkten auf die Ebene gefällten Perpendikel auf beiden Seiten derselben einander gleich seyen.

Die Anzahl der gegebenen Punkte sey = n, und

$$x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; \ldots$$

ihre Coordinaten. Die Gleichung der Ebene sey (Krumme Fläche. 4.):

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

oder der Kürze wegen

$$z = ax + by + c.$$

Folglich die von den gegebenen Punkten auf diese Ebene gefällten Perpendikel (Linie und Ebene. 51. 52.):

$$\frac{z'-ax'-by'-c}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ \frac{z''-ax''-by''-c}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ \frac{z'''-ax'''-by'''-c}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

ꝛc. ꝛc.

Betrachtet man nun die auf der einen Seite der Ebene liegenden Perpendikel als positiv, die auf der andern als negativ; so ergiebt sich aus der Bedingung der Aufgabe sogleich folgende Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} z' - ax' - by' - c \\ + z'' - ax'' - by'' - c \\ + z''' - ax''' - by''' - c \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

$$c = \frac{-a(x'+x''+x'''+\ldots)-b(y'+y''+y'''+\ldots)+z'+z''+z'''+\ldots}{n},$$

woraus sich zwischen a, b, c, den Coefficienten in der Gleichung der Ebene, also nur eine Gleichung ergiebt, so daß es also auch unzählige Ebenen giebt, die der Aufgabe genügen, und dieselbe also unbestimmt ist. Setzt man den erhaltenen Werth von c in die Gleichung

$$z = ax + by + c;$$

so wird dieselbe:

$$z - \frac{z'+z''+z'''+\ldots}{n} = a\left\{x - \frac{x'+x''+x'''+\ldots}{n}\right\} + b\left\{y - \frac{y'+y''+y'''+\ldots}{n}\right\}$$

welches offenbar die Gleichung einer Ebene ist, die durch den, durch die Coordinaten

$$\frac{x'+x''+x'''+\ldots}{n},\ \frac{y'+y''+y'''+\ldots}{n},\ \frac{z'+z''+z'''+\ldots}{n}$$

bestimmten Punkt geht, so daß also alle durch diesen Punkt gehenden Ebenen der Aufgabe genügen. Dieser Punkt ist aber der Punkt der mittlern Entfernungen der gegebenen Punkte (Vergl. Vieleck. 10.).

10. Seyen mehrere Punkte im Raume gegeben; man soll einen Punkt von solcher Beschaffenheit finden, daß die Summe der Quadrate aller von demselben an die gegebenen Punkte gezogenen geraden Linien einem gegebenen Quadrate p^2 gleich sey.

Die Coordinaten der gegebenen Punkte seyen wie vorher:

$$x', y', z';\ x'', y'', z'';\ x''', y''', z''';\ \ldots$$

und x, y, z die Coordinaten des gesuchten Punktes. Die

Entfernungen desselben von dem gegebenen Punkten seyen e', e'', e''', ...; so ist, wie leicht aus dem Art. Linie und Ebene (50.) geschlossen wird:

$$\begin{aligned} e'^2 &= (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2, \\ e''^2 &= (x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2, \\ e'''^2 &= (x-x''')^2 + (y-y''')^2 + (z-z''')^2, \\ &\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Folglich, wenn man die Quadrate entwickelt, und der Kürze wegen $x' + x'' + x''' + \ldots$ durch $\Sigma x'$, $x'^2 + x''^2 + x'''^2 + \ldots$ durch $\Sigma x'^2$ bezeichnet, die Anzahl der gegebenen Punkte aber $= n$ setzt:

$$p^2 = nx^2 + ny^2 + nz^2 - 2x\Sigma x' - 2y\Sigma y' - 2z\Sigma z' + \Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2$$

$$o = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{n}\left\{x\Sigma x' + y\Sigma y' + z\Sigma z'\right\}.$$
$$- \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\}.$$

Verlegt man nun den Anfang der Coordinaten in einen Punkt, dessen primitive Coordinaten

$$\frac{1}{n}\Sigma x',\ \frac{1}{n}\Sigma y',\ \frac{1}{n}\Sigma z'$$

sind; so muß man, wenn übrigens beide Systeme als parallel angenommen werden, indem man die neuen Coordinaten durch x_1, y_1, z_1 bezeichnet,

$$x = x_1 + \frac{1}{n}\Sigma x',\quad y = y_1 + \frac{1}{n}\Sigma y',\quad z = z_1 + \frac{1}{n}\Sigma z'$$

setzen, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} o = {} & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + \frac{2}{n}\left\{x_1\Sigma x' + y_1\Sigma y' + z_1\Sigma z'\right\} \\ & + \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\} - \frac{2}{n}\left\{x_1\Sigma x' + y_1\Sigma y' + z_1\Sigma z'\right\} \\ & - \frac{2}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\} - \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\} \\ = {} & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ & - \frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\} - \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\}. \end{aligned}$$

Setzt man nun die constante Größe

$$\frac{1}{n}\left\{p^2 - (\Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2)\right\} + \frac{1}{n^2}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\} = r^2;$$

so wird unsere Gleichung

$$o = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r^2,\quad r^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

welches offenbar die Gleichung einer Kugelfläche ist, deren Mittelpunkt der Anfang der Coordinaten ist, und durch die primitiven Coordinaten

$$\frac{1}{n}\Sigma x', \frac{1}{n}\Sigma y', \frac{1}{n}\Sigma z'$$

bestimmt wird (Krumme Fläche. 40.). Der Halbmesser ist $= r$. Unsere Aufgabe ist also eine unbestimmte, und der Ort des gesuchten Punktes die so eben bestimmte Kugelfläche.

11. Der Mittelpunkt der Kugel ist wieder der Punkt der mittlern Entfernungen der gegebenen Punkte. Man erhält hieraus folgenden merkwürdigen Satz:

Wenn aus dem Punkte der mittlern Entfernungen gegebener Punkte im Raume, welcher durch die Coordinaten

$$\frac{1}{n}\Sigma x', \frac{1}{n}\Sigma y', \frac{1}{n}\Sigma z'$$

bestimmt wird, mit einem willkührlichen Radius r eine Kugel beschrieben wird; so ist die Summe der Quadrate aller von irgend einem Punkte in ihrer Oberfläche an die gegebenen Punkte gezogenen geraden Linien eine constante Größe, und zwar, wie aus dem Obigen leicht folgt, =

$$p^2 = nr^2 + \Sigma x'^2 + \Sigma y'^2 + \Sigma z'^2 - \frac{1}{n}\left\{(\Sigma x')^2 + (\Sigma y')^2 + (\Sigma z')^2\right\}.$$

12. Dies mag hinreichen, die Natur unbestimmter geometrischer Aufgaben zu erläutern. Jeder geometrische Ort giebt ein Beispiel einer solchen Aufgabe, so daß also hiermit dieser Artikel zu vergleichen ist, so wie auch die analytische Behandlung der in dem großen Werke des Apollonius über die ebenen Oerter enthaltenen Aufgaben eine treffliche Uebung seyn wird. Außerdem findet man Beispiele genug in den meisten Werken über die Kegelschnitte (s. diesen Art.), Newtons Arithmetica universalis, Tempelhoff Analysis endl. Größen. Berl. 1769. S. 514., Segneri Elementa Anal. finit. Halae. 1758. p. 357., Brandes höhere Geometrie. I. Lpzg. 1822. S. 25. S. 114. Puissant Recueil de diverses propositions de Géométrie. Paris. 1809. p. 158. 301., so wie in den meisten Werken über analytische Geometrie überhaupt. Auf-

gaben, welche auf höhere Curven führen, haben wir hier nicht mitgetheilt, weil die Ableitung der Gleichung einer Curve aus einer Eigenschaft derselben alle Mal ein hierher gehörendes Beispiel liefert, und in dieser Beziehung also die einzelnen Artikel dieses Wörterbuchs, welche specielle Formen der Curven betreffen, nachgesehen werden können.

Unbestimmte Axe einer Curve (Axis curvae indeterminatus) heißt zuweilen die Axe einer Curve, wenn durch die Natur derselben bloß die Lage, nicht die Länge der Axe bestimmt wird, wie z. B. bei der Parabel. Die Axen der Ellipse sind bestimmt, da beide von der Ellipse in zwei Punkten geschnitten wird. Bei der Hyperbel heißt zuweilen die zweite Axe die unbestimmte Axe, weil sie von der Hyperbel nicht geschnitten, und ihre Länge, wie bekannt, eigentlich nur fingirt wird.

Unbestimmte Coefficienten, Coefficientes ficti oder assumti, sind überhaupt, wenn eine gegebene Function unter einer andern bestimmten Form dargestellt werden soll, die noch unbestimmten Coefficienten der Potenzen der veränderlichen Größen der Function in dem allgemeinen symbolischen Ausdruck der gesuchten Form, und werden zuerst, als noch unbestimmte oder gesuchte Größen, durch willkührliche allgemeine Zeichen bezeichnet, dann aber der Natur der gegebenen Function und den durch die Form, auf welche dieselbe gebracht werden soll, gegebenen Bedingungen gemäß bestimmt. Durch zweckmäßige Beispiele wird diese Methode, welche man gewöhnlich die Methode der unbestimmten Coefficienten nennt, am besten erläutert, und in völliges Licht gesetzt. Zur Bezeichnung der unbestimmten Coefficienten bedient man sich gewöhnlich der lateinischen Versal-Buchstaben; in der combinatorischen Analysis dagegen nach der Hindenburgischen Charakteristik, werden sie immer durch willkührliche Buchstaben mit darüber gesetzten Punkten wie z. B. $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\dot{c}$, $\dot{d}$,...; $\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$,...; $\dot{\mathfrak{a}}$, $\dot{\mathfrak{b}}$, $\dot{\mathfrak{c}}$, $\dot{\mathfrak{d}}$,...; u. s. f. von den ge-

Digitized by Google

gebenen Coefficienten a, b, c, d, ...; A, B, C, D, ...; a, b, c, d, ...; u. s. f. unterschieden.

1. Gute Dienste leistet diese Methode z. B. bei der Zerlegung der gebrochenen Functionen in einfache Brüche (Function. 16.). Sey z. B. die gebrochene Function

$$\frac{\alpha x + \gamma}{(x - a)(x - b)}$$

in zwei einfache Brüche mit den Nennern x — a, x — b zu zerlegen; so setze man

$$\frac{\alpha x + \gamma}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} = \frac{(A + B)x - (Ab + Ba)}{(x - a)(x - b)},$$

und die Aufgabe ist aufgelöst, wenn A, B so bestimmt werden, daß für jedes x

$$\alpha x + \gamma = (A + B)x - (Ab + Ba)$$

ist, welcher Bedingung offenbar genügt wird, wenn A, B so bestimmt werden, daß

$$A + B = \alpha,\ Ab + Ba = -\gamma.$$

Löset man nun diese beiden Gleichungen nach A, B auf; so erhält man:

$$A = -\frac{\alpha a + \gamma}{b - a},\ B = \frac{\alpha b + \gamma}{b - a};$$

wodurch also A, B den Bedingungen der Aufgabe gemäß bestimmt sind.

2. Kann die gegebene Function nicht auf die verlangte Form gebracht werden; so wird dies die Auflösung selbst immer anzeigen. Für

$$\frac{1}{x(a^2 - x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a^2 - x^2}$$

erhielte man, wenn die beiden Brüche auf gleiche Benennung gebracht werden:

$$\frac{1}{x(a^2 - x^2)} = \frac{Aa^2 + Bx - Ax^2}{x(a^2 - x^2)},$$

$$1 = Aa^2 + Bx - Ax^2,$$

und, um dieser Bedingung allgemein, für jedes x, zu genügen, sind A, B so zu bestimmen, daß die Gleichungen

$$Aa^2 = 1,\ B = 0,\ -A = 0$$

erfüllt werden, welches offenbar nicht möglich ist. Setzt man aber

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{x(a-x)(a+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a-x} + \frac{C}{a+x};$$

so erhält man leicht:

$$\frac{1}{x(a^2-x^2)} = \frac{Aa^2 + a(B+C)x + (B-A-C)x^2}{x(a-x)(a+x)},$$

$$1 = Aa^2 + a(B+C)x + (B-A-C)x^2,$$

$$Aa^2 = 1,\ a(B+C) = 0,\ B-A-C = 0;$$

woraus, wenn diese drei Gleichungen nach A, B, C aufgelöst werden:

$$A = \frac{1}{a^2},\ B = \frac{1}{2a^2},\ C = -\frac{1}{2a^2},$$

so daß sich also nun der angenommenen Form genügen läßt. Für

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{x-1}$$

erhält man nach einem ganz ähnlichen Verfahren:

$$A = 2,\ B = -\tfrac{1}{2},\ C = -\tfrac{5}{4},\ D = 1,\ E = -\tfrac{3}{4}.$$

Allgemeinere Untersuchungen über diesen Gegenstand s. im Art. Function a. a. O.

3. Auch bei der Summirung der Reihen wird diese Methode zuweilen mit Vortheil angewandt. Sey z. B. die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen zu finden. Man bezeichne die Summe

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + x^n$$

überhaupt durch Sx^n, und setze, da diese Summe für $x = 0$ offenbar verschwindet,

$$Sx^n = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots;$$

also

$$S(x+1)^n = A(x+1) + B(x+1)^2 + C(x+1)^3 + D(x+1)^4 + \ldots$$

$$S(x+1)^n - Sx^n = (x+1)^n = A\{(x+1)-x\} + B\{(x+1)^2-x^2\}$$
$$+ C\{(x+1)^3-x^3\} + D\{(x+1)^4-x^4\} + \ldots\ldots$$

Die unbestimmten Coefficienten A, B, C, D, ... müssen nun so bestimmt werden, daß dieser Gleichung ganz allgemein für jedes x genügt wird. Ist dies möglich; so ist, wie angenommen wurde, wirklich

$$Sx^n = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$$

weil, wegen jener Gleichung, indem für x die natürlichen Zahlen nach der Ordnung von 0 an gesetzt werden:

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + x^n + (x+1)^n$$
$$= A\{1-0\} + B\{1^2-0\} + C\{1^3-0\} + \ldots$$
$$+ A\{2-1\} + B\{2^2-1^2\} + C\{2^3-1^3\} + \ldots$$
$$+ A\{3-2\} + B\{3^2-2^2\} + C\{3^3-2^3\} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A\{x-(x-1)\} + B\{x^2-(x-1)^2\} + C\{x^3-(x-1)^3\} + \ldots$$
$$+ A\{(x+1)-x\} + B\{(x+1)^2-x^2\} + C\{(x+1)^3-x^3\} + \ldots,$$

d. i., wenn man auf der rechten Seite aufhebt, was sich aufheben läßt, für jedes x:

$$S(x+1)^n = A(x+1) + B(x+1)^2 + C(x+1)^3 + D(x+1)^4 + \ldots$$

und folglich auch

$$Sx^n = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$$

wie behauptet wurde. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen sey, für die Summe der ersten Potenzen der natürlichen Zahlen, zuerst $n = 1$; so wird obige Gleichung:

$$1 + x = A\{(1+x)-x\} + B\{(1+x)^2-x^2\} + C\{(1+x)^3-x^3\} + \ldots,$$

welcher für jedes x genügt werden muß. Da aber der erste Theil dieser Gleichung nur zwei Glieder enthält; so kann man die Coefficienten aller Glieder des zweiten Theils, in welchen höhere Potenzen von x als die zweite vorkommen, $= 0$ setzen, woraus

$$1 + x = A\{(1+x)-x\} + B\{(1+x)^2-x^2\} = A + B + 2Bx.$$

Um dieser Gleichung für jedes x zu genügen, hat man also A, B aus den Gleichungen

$$A + B = 1,\quad 2B = 1$$

zu bestimmen, woraus $A = B = \frac{1}{2}$, und folglich

$$Sx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x^2 = \frac{x(x+1)}{1.2},$$

wie bekannt.

Für $n = 2$ hat man:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = A\{(1+x)-x\} + B\{(1+x)^2-x^2\}$$
$$+ C\{(1+x)^3-x^3\} + D\{(1+x)^4-x^4\} + \ldots,$$

oder, wenn man, da der erste Theil nur drei Glieder enthält, die unbestimmten Coefficienten von D an $= 0$ setzt:

$$1+2x+x^2 = A\{(1+x)-x\} + B\{(1+x)^2-x^2\} + C\{(1+x)^3-x^3\}$$
$$= A + B + C + (2B+3C)x + 3Cx^2,$$

und A, B, C müssen nun so bestimmt werden, daß sie den drei Gleichungen

$$A + B + C = 1, \quad 2B + 3C = 2, \quad 3C = 1$$

genügen. Dies giebt

$$A = \tfrac{1}{6}, \quad B = \tfrac{1}{2}, \quad C = \tfrac{1}{3};$$

$$Sx^2 = \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 = \frac{x(x+1)(2x+1)}{1.2.3}.$$

Für die Summe der Cubikzahlen erhält man auf ähnliche Art:

$$1 + 3x + 3x^2 + x^3 =$$

$$A + B + C + D + (2B + 3C + 4D)x + (3C + 6D)x^2 + 4Dx^3,$$

und die Coefficienten müssen so bestimmt werden, daß sie den vier Gleichungen

$$A + B + C + D = 1, \quad 2B + 3C + 4D = 3,$$

$$3C + 6D = 3, \quad 4D = 1$$

genügen, woraus

$$A = 0, \quad B = \tfrac{1}{4}, \quad C = \tfrac{1}{2}, \quad D = \tfrac{1}{4};$$

$$Sx^3 = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 = \left\{\frac{x(x+1)}{1.2}\right\}^2.$$

Für die Summe der Biquadratzahlen erhält man eben so:

$$Sx^4 = -\tfrac{1}{30}x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 = \frac{x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1)}{1.2.3.5}.$$

Dies wird zur Erläuterung der Methode hinreichen. Wie man weiter gehen kann, fällt in die Augen. In dem Art. Potenz. III. ist ausführlich von diesem Gegenstande gehandelt, dabei aber ein anderer Weg eingeschlagen worden.

4. Mit ganz besonderm Vortheil wird aber diese Methode angewandt, wenn eine Function in eine nach Potenzen ihrer veränderlichen Größe fortschreitende Reihe entwickelt werden soll, und sie erhält in dieser Beziehung vorzugsweise den Namen der Methode der unbestimmten Coefficienten. Um mit ganz einfachen Beispielen anzufangen; so sey der Bruch $\frac{1}{1-\alpha x}$ in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln, und man setze daher:

$$\frac{1}{1-\alpha x} = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots$$

Die Coefficienten A, A_1, A_2, A_3, ... sind nun so zu be-

stimmen, daß dieser Gleichung im Allgemeinen für jedes x genügt wird. Dies wird aber der Fall seyn, wenn man diese Coefficienten so bestimmt, daß im Allgemeinen für jedes x der Gleichung

$$1 = (1 - \alpha x)(A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots)$$

genügt wird, indem erstere eine unmittelbare Folge aus dieser ist. Man muß die Coefficienten also so bestimmen, daß für jedes x die Gleichung

$$1 = A + \left.\begin{matrix} A_1 \\ - \alpha A \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} A_2 \\ - \alpha A_1 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} A_3 \\ - \alpha A_2 \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

erfüllt wird. Ist diese Bestimmung ausführbar; so wird auch die Entwickelung des gegebenen Bruchs in eine Reihe von obiger Form möglich seyn. Führte aber diese Bestimmung auf widersprechende Resultate; so müßte in der Annahme gefehlt, und die Entwickelung unsers Bruchs in eine Reihe von obiger Form demnach unmöglich seyn. Obige Gleichung wird aber für jedes x erfüllt; wenn die unbestimmten Coefficienten so bestimmt werden, daß sie folgender Reihe von Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ A_1 - \alpha A &= 0, \\ A_2 - \alpha A_1 &= 0, \\ A_3 - \alpha A_2 &= 0, \\ A_4 - \alpha A_3 &= 0, \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

eine Bestimmung, welche offenbar immer möglich ist, indem sich aus denselben unmittelbar folgende Werthe der Coefficienten ergeben:

$$A = 1,\ A_1 = \alpha,\ A_2 = \alpha^2,\ A_3 = \alpha^3,\ A_4 = \alpha^4, \ldots;$$

wo auch das Gesetz ganz deutlich erhellet. Also ist

$$\frac{1}{1 - \alpha x} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \alpha^4 x^4 + \ldots;$$

und die gesuchte Entwickelung folglich gefunden.

5. Soll die gebrochene Function

$$\frac{1}{1 - \alpha x + \gamma x^2}$$

in eine Reihe von ähnlicher Form entwickelt werden, so setze man

$$\frac{1}{1 - \alpha x + \gamma x^2} = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots,$$

und bestimme wieder die Coefficienten so, daß sie dieser Gleichung für jedes x genügen. Diese Gleichung ist aber eine unmittelbare Folge aus der Gleichung

$$\begin{aligned} 1 &= (1 - \alpha x + \gamma x^2)(A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots) \\ &= A + \left.\begin{matrix} A_1 \\ -\alpha A \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} A_2 \\ -\alpha A_1 \\ +\gamma A \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} A_3 \\ -\alpha A_2 \\ +\gamma A_1 \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots \end{aligned}$$

so daß also der ersten Gleichung für jedes x genügt seyn wird, wenn die Coefficienten der zweiten gemäß bestimmt werden. Dies giebt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ A_1 - \alpha A &= 0, \\ A_2 - \alpha A_1 + \gamma A &= 0, \\ A_3 - \alpha A_2 + \gamma A_1 &= 0, \\ A_4 - \alpha A_3 + \gamma A_2 &= 0, \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

also

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ A_1 &= \alpha A, \\ A_2 &= \alpha A_1 - \gamma A, \\ A_3 &= \alpha A_2 - \gamma A_1, \\ A_4 &= \alpha A_3 - \gamma A_2, \end{aligned}$$

u. s. f.

und daß diesen Gleichungen durch eine successive Bestimmung der Coefficienten immer genügt werden kann, die Entwickelung des gegebenen Bruchs in eine Reihe von obiger Form also möglich ist, fällt sogleich in die Augen. Man erhält

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ A_1 &= \alpha, \\ A_2 &= \alpha^2 - \gamma, \\ A_3 &= \alpha^3 - 2\alpha\gamma; \\ A_4 &= \alpha^4 - 3\alpha^2\gamma + \gamma^2, \\ A_5 &= \alpha^5 - 4\alpha^3\gamma + 3\alpha\gamma^2; \\ A_6 &= \alpha^6 - 5\alpha^4\gamma + 6\alpha^2\gamma^2 - \gamma^3, \\ A_7 &= \alpha^7 - 6\alpha^5\gamma + 10\alpha^3\gamma^2 - 4\alpha\gamma^3, \\ A_8 &= \alpha^8 - 7\alpha^6\gamma + 15\alpha^4\gamma^2 - 10\alpha^2\gamma^3 + \gamma^4, \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Das allgemeine Gesetz erhellet leicht. Es ist nämlich

$$A_{2n} = \alpha^{2n} - \frac{2n-1}{1}\alpha^{2n-2}\gamma$$
$$+ \frac{(2n-2)(2n-3)}{1.2}\alpha^{2n-4}\gamma^2$$
$$- \frac{(2n-3)(2n-4)(2n-5)}{1.2.3}\alpha^{2n-6}\gamma^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp \frac{(n+1)n}{1.2}\alpha^2\gamma^{n-1} \pm \gamma^n,$$

$$A_{2n+1} = \alpha^{2n+1} - \frac{2n}{1}\alpha^{2n-1}\gamma$$
$$+ \frac{(2n-1)(2n-2)}{1.2.3}\alpha^{2n-3}\gamma^2$$
$$- \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)}{1.2.3}\alpha^{2n-5}\gamma^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}\alpha^3\gamma^{n-1} \pm \frac{n+1}{1}\alpha\gamma^n.$$

6. Nicht immer ist die Anwendung dieser Methode so einfach, wie in den vorigen Beispielen, und erfordert oft besondere Kunstgriffe. Von besonderer Wichtigkeit ist es, die Form der Reihe richtig anzunehmen, weil man sonst entweder gar keine Bestimmung der Coefficienten erhält, oder zu widersprechenden Resultaten gelangt, welches dann ein Zeichen ist, daß die Entwickelung der gegebenen Function in eine Reihe von der angenommenen Form unmöglich ist. Es wird daher nicht unnütz seyn, bevor wir zu andern Beispielen übergehen, einige allgemeine Bemerkungen in dieser Beziehung vorauszuschicken.

7. Die einfachste, am häufigsten in der Analysis geforderte, Reihenform ist die der nach den positiven ganzen Potenzen der veränderlichen Größe fortschreitenden Reihen, und von ganz besonderer Wichtigkeit erscheint die Frage, ob alle Functionen sich in Reihen dieser Art entwickeln lassen, und, wenn dies nicht der Fall seyn sollte, woran man im Allgemeinen erkennen kann, wann diese Entwickelung möglich oder unmöglich ist. Das Folgende enthält einen Versuch, diese Frage zu beantworten. Der Werth

einer Function φx, welchen sie erhält, wenn man $x = 0$ setzt, soll durch $\varphi 0$ bezeichnet werden.

8. Unter einer Function einer veränderlichen Größe versteht man bekanntlich jede von derselben auf irgend eine Art abhängende Größe, so daß verschiedenen bestimmten Werthen der veränderlichen Größe auch gewisse bestimmte Werthe der Function entsprechen, worüber der Art. Function mit Mehrerem zu vergleichen.

Sey nun φx das allgemeine Symbol irgend einer Function von x, und man setze, da die Entwickelung dieser Function in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe verlangt wird,

$$\varphi x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

wo es nun auf die Bestimmung der Coefficienten A, B, C, D, E,.... ankommt. Setzt man $x = 0$; so erhält man sogleich

$$A = \varphi 0;$$

$$\varphi x = \varphi 0 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots;$$

$$\frac{\varphi x - \varphi 0}{x} = B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + \ldots;$$

wo offenbar $\frac{\varphi x - \varphi 0}{x}$ wieder eine Function von x ist, die wir durch $\varphi_1 x$ bezeichnen wollen, so daß also

$$\varphi_1 x = B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \ldots,$$

woraus, wenn man $x = 0$ setzt, wie vorher:

$$B = \varphi_1 0;$$

$$\varphi_1 x = \varphi_1 0 + Cx + Dx^2 + Ex^3 + Fx^4 + \ldots,$$

$$\frac{\varphi_1 x - \varphi_1 0}{x} = C + Dx + Ex^2 + Fx^3 + \ldots;$$

wo wiederum $\frac{\varphi_1 x - \varphi_1 0}{x}$ eine Function von x ist, die durch $\varphi_2 x$ bezeichnet werden soll, so daß

$$\varphi_2 x = C + Dx + Ex^2 + Fx^3 + Gx^4 + \ldots;$$

woraus, wenn man $x = 0$ setzt, ferner

$$C = \varphi_2 0;$$

$$\varphi_2 x = \varphi_2 0 + Dx + Ex^2 + Fx^3 + Gx^4 + \ldots,$$

$$\frac{\varphi_2 x - \varphi_2 0}{x} = D + Ex + Fx^2 + Gx^3 + \ldots;$$

wo die Function $\frac{\varphi_2 x - \varphi_2 0}{x} = \varphi_3 x$ gesetzt werden soll.

Setzt man dieses Verfahren weiter fort, so erhält man zur Bestimmung der Functionen

$$\varphi_1 x,\ \varphi_2 x,\ \varphi_3 x,\ \varphi_4 x,\ \ldots$$

folgende Gleichungen:

$$\varphi x = \varphi x$$

$$\varphi_1 x = \frac{\varphi x - \varphi 0}{x},$$

$$\varphi_2 x = \frac{\varphi_1 x - \varphi_1 0}{x},$$

$$\varphi_3 x = \frac{\varphi_2 x - \varphi_2 0}{x},$$

$$\varphi_4 x = \frac{\varphi_3 x - \varphi_3 0}{x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{n+1} x = \frac{\varphi_n x - \varphi_n 0}{x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und die Coefficienten sind:

$$A = \varphi 0,\ B = \varphi_1 0,\ C = \varphi_2 0,\ D = \varphi_3 0,\ \ldots;$$

die gesuchte Reihe also

$$\varphi x = \varphi 0 + \varphi_1 0 . x + \varphi_2 0 . x^2 + \varphi_3 0 . x^3 + \varphi_4 0 . x^4 + \ldots$$

9. Ueber diese Bestimmung der Coefficienten sind aber folgende Bemerkungen zu machen, und einige Zweifel zu heben. Betrachtet man nämlich die beiden Ausdrücke

$$\varphi\, x = \frac{\varphi_{n-1} x - \varphi_{n-1} 0}{x},\ \varphi_{n+1} x = \frac{\varphi_n x - \varphi_n 0}{x}$$

näher; so ist klar, daß die Bestimmung von $\varphi_{n+1} x$ sich auf die Bestimmung des besondern Werthes $\varphi_n 0$ von $\varphi_n x$ gründet. Setzt man aber in dem Ausdrucke von $\varphi_n x$ die veränderliche Größe $= 0$; so erhält man

$$\varphi_n 0 = \frac{\varphi_{n-1} 0 - \varphi_{n-1} 0}{0} = \frac{0}{0},$$

das Symbol der Unbestimmtheit (S. Function. 50. ff.), so daß hierdurch offenbar der Zweifel, daß sich durch die obige Methode gar keine Bestimmung der einzelnen Functionen, und folglich auch der Coefficienten, ergebe, Raum gewinnt. Ueberlegt man aber, daß

$$\varphi_n x = \frac{\varphi_{n-1} x - \varphi_{n-1} 0}{x}$$

offenbar eine Function von x ist, und daß folglich, nach dem oben (8.) von Neuem festgestellten allgemeinen Begriffe der Function, nothwendig jedem bestimmten Werthe von x, also auch dem Werthe $x = 0$, ein bestimmter Werth von $\varphi_n x$ entsprechen muß; so fällt leicht in die Augen, daß obige Unbestimmtheit nur scheinbar, und bloß durch die ganz allgemeine Form der Function $\varphi_n x$ herbeigeführt ist, indem es keinem Zweifel unterworfen ist, daß dem bestimmten Werthe $x = 0$ auch ein bestimmter Werth von $\varphi_n x$ entsprechen muß, wenn er sich auch unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellt, welches ja überhaupt nicht selten der Fall ist. So wird z. B. der Bruch

$$\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2} = \frac{0}{0},$$

wenn man $x = a$ setzt. Bemerkt man aber, daß so wohl der Zähler, als auch der Nenner, sich in Factoren zerlegen läßt, wodurch

$$\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x - a)^2(x + a)}{(x - a)(x + a)},$$

d. i., wenn man die gleichen Factoren aufhebt, $= x - a$ wird; so ist klar, daß für $x = a$ der Werth obigen Bruchs $= 0$ ist, und so in andern Fällen, worüber auch der Art. Function. (50. ff) nachzusehen ist. Es ist also keinem Zweifel unterworfen, daß es für $x = 0$ auch gewisse bestimmte Werthe der durch φ bezeichneten Functionen geben muß, wenn sie sich auch hier unter unbestimmten Formen darstellen. Im Allgemeinen giebt es also auch immer bestimmte Werthe der Coefficienten A, B, C, D, . . ., und die Entwickelung der Function φx in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe ist also im Allgemeinen immer möglich, so daß nämlich

$$\varphi x = \varphi 0 + \varphi_1 0 . x + \varphi_2 0 . x^2 + \varphi_3 0 . x^3 + \varphi_4 0 . x^4 + \ldots$$

10. Tritt aber, welches offenbar auch möglich seyn kann, der Fall ein, daß für $x = 0$ der Zähler einer der obigen Functionen einen bestimmten constanten Werth a erhält, der Nenner aber verschwindet; so erhält man immer für irgend einen Coefficienten einen Ausdruck von der Form $\frac{a}{0}$, welches bekanntlich (s. den Art. Unendlich.)

das analytische Symbol des Unendlichen ist. So wenig aber einem solchen Ausdruck bei allgemeinen analytischen Entwickelungen ein bestimmter Werth beigelegt werden kann; so wenig kann auch eine Reihe, deren Coefficienten mit solchen Ausdrücken behaftet sind, als der Aufgabe genügend betrachtet werden, und man hat hierin vielmehr ein Zeichen, daß die Entwickelung der gegebenen Function in eine Reihe von der zum Grunde gelegten Form, wenn nämlich alle Coefficienten ganz bestimmte numerische Werthe haben, und von Ausdrücken, wie $\frac{a}{o}$, befreit seyn sollen, nicht möglich ist. Nur dann also, wenn man bei der obigen Bestimmung der Coefficienten nie auf Ausdrücke von der Form $\frac{a}{o}$ kommt, ist die Entwickelung der Function φx in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe möglich, wobei zugleich die Nothwendigkeit erhellet, in jedem Falle immer das allgemeine Gesetz der Coefficienten aufzusuchen, um sich zu überzeugen, daß, auch wenn die Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt wird, doch nie Ausdrücke von der Form $\frac{a}{o}$ erscheinen.

11. Vorhergehende analytische Betrachtung läßt sich nun auch leicht in einen synthetischen Beweis umwandeln. Sey nämlich φx die gegebene Function, und man bestimme die Functionen $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x$, u. s. f., welches, wie aus dem Obigen (9.) erhellet, immer möglich ist, aus den Gleichungen:

$$\varphi x = \varphi x$$

$$\varphi_1 x = \frac{\varphi x - \varphi o}{x},$$

$$\varphi_2 x = \frac{\varphi_1 x - \varphi_1 o}{x},$$

$$\varphi_3 x = \frac{\varphi_2 x - \varphi_2 o}{x},$$

. . . .

$$\varphi_{n+1} x = \frac{\varphi_n x - \varphi_n o}{x},$$

u. s. f. u. s. f.

so läßt sich, wenn man bei dieser Bestimmung in der Reihe φo, $\varphi_1 o$, $\varphi_2 o$, $\varphi_3 o$, ... $\varphi_n o$, ... nie auf ein Glied von

der Form $\frac{a}{o}$ kommt, die Function φx immer in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, so daß alle Coefficienten bestimmte numerische Werthe, deren keiner $= \frac{a}{o}$ ist, haben. Denn obige Gleichungen geben:

$$\begin{aligned}
\varphi x - \varphi_1 x \,.\, x &= \varphi o, \\
\varphi_1 x - \varphi_2 x \,.\, x &= \varphi_1 o, \\
\varphi_2 x - \varphi_3 x \,.\, x &= \varphi_2 o, \\
\varphi_3 x - \varphi_4 x \,.\, x &= \varphi_3 o, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{n-1} x - \varphi_n x \,.\, x &= \varphi_{n-1} o, \\
\varphi_n x - \varphi_{n+1} x \,.\, x &= \varphi_n o, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\varphi x - \varphi_1 x \,.\, x &= \varphi o, \\
\varphi_1 x \,.\, x - \varphi_2 x \,.\, x^2 &= \varphi_1 o \,.\, x, \\
\varphi_2 x \,.\, x^2 - \varphi_3 x \,.\, x^3 &= \varphi_2 o \,.\, x^2, \\
\varphi_3 x \,.\, x^3 - \varphi_4 x \,.\, x^4 &= \varphi_3 o \,.\, x^3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{n-1} x \,.\, x^{n-1} - \varphi_n x \,.\, x^n &= \varphi_{n-1} o \,.\, x^{n-1}, \\
\varphi_n x \,.\, x^n - \varphi_{n+1} x \,.\, x^{n+1} &= \varphi_n o \,.\, x^n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

also, wenn man addirt:

$$\varphi x + \varphi_1 x \,.\, x + \varphi_2 x \,.\, x^2 + \varphi_3 x \,.\, x^3 + \ldots + \varphi_n x \,.\, x^n + \ldots$$
$$- \left\{ \varphi_1 x \,.\, x + \varphi_2 x \,.\, x^2 + \varphi_3 x \,.\, x^3 + \varphi_4 x \,.\, x^4 + \ldots + \varphi_n x \,.\, x^n + \ldots \right\}$$
$$= \varphi o + \varphi_1 o \,.\, x + \varphi_2 o \,.\, x^2 + \varphi_3 o \,.\, x^3 + \ldots + \varphi_n o \,.\, x^n + \ldots$$

Die beiden unendlichen Reihen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens sind offenbar ganz übereinstimmend mit einander, und nur darin unterschieden, daß die erste das Glied φx mehr enthält, so daß also ihr Unterschied eben dieses Glied, und folglich

$$\varphi x = \varphi o + \varphi_1 o \,.\, x + \varphi_2 o \,.\, x^2 + \varphi_3 o \,.\, x^3 + \ldots + \varphi_n o \,.\, x^n + \ldots$$

ist. Dies ist aber, wegen der obigen Voraussetzung in Bezug auf φo, $\varphi_1 o$, $\varphi_2 o$, $\varphi_3 o, \ldots$, eine Reihe von der verlangten Form.

12. Die Möglichkeit der Entwickelung von φx in eine Reihe nach den positiven ganzen Potenzen von x, hängt also davon ab, daß keine der Functionen φx, $\varphi_1 x$, $\varphi_2 x$, $\varphi_3 x, \ldots$ für $x = o$ die Form $\frac{a}{o}$ annimmt. Es fragt

sich nun, ob sich dies nicht vielleicht aus der gegebenen Function φx selbst unmittelbar entscheiden läßt. Hierzu dienen folgende Betrachtungen.

13. Zunächst bemerken wir, daß eine Function, welche für $x = o$ die Form $\frac{a}{o}$ erhält, insofern es nur einzig und allein auf diesen speciellen Werth derselben ankommt, allgemein durch $\frac{a}{\xi}$ dargestellt werden kann, wo ξ an sich mit x völlig einerlei ist, und nur deshalb durch den griechischen Buchstaben unterschieden wird, um anzudeuten, daß ξ immer $= o$ gesetzt werden muß, weil offenbar nur unter dieser Bedingung $\frac{a}{\xi}$ jede Function von x, welche für $x = o$ den Werth $\frac{a}{o}$ enthält, repräsentiren kann, und nur da die Einführung dieses Ausdrucks verstattet ist, wo es bloß auf den Werth der Function für $x = o$ ankommt. Leicht erhellet nun die Richtigkeit folgender Sätze.

14. Wenn $\varphi_n x$, für $x = o$, $= \frac{a}{o}$ wird; so wird immer $\varphi_{n+1} x$, für $x = o$, $= -\frac{a}{o}$. Denn es ist (11.):

$$\varphi_{n+1} x = \frac{\varphi_n x - \varphi_n o}{x},$$

oder, da nach der Voraussetzung $\varphi_n o = \frac{a}{o}$:

$$\varphi_{n+1} x = \frac{\varphi_n x - \frac{a}{\xi}}{x} = \frac{\xi . \varphi_n x - a}{\xi x},$$

unter der Voraussetzung, daß $x = \xi = o$ gesetzt wird. Also

$$\varphi_{n+1} o = \frac{-a}{o} = -\frac{a}{o}.$$

15. Ist umgekehrt $\varphi_{n+1} x$, für $x = o$, $= \frac{a}{o}$, wo a nicht $= o$; so ist auch $\varphi_n x$, für $x = o$, $= \frac{a}{o}$. Denn es ist (11.):

$$\varphi_{n+1} x = \frac{\varphi_n x - \varphi_n o}{x},$$

oder, unter der Voraussetzung, daß $x = \xi = o$ gesetzt

wird, da nach der Annahme $\varphi_{n+1}x$, für $x = o$, $= \frac{a}{o}$ ist:

$$\frac{a}{\xi} = \frac{\varphi_n x - \varphi_n o}{x}, \; a = \varphi_n x - \varphi_n o,$$

weil ξ an sich mit x völlig einerlei ist, nur unter der Voraussetzung, daß $x = o$ gesetzt wird. Wäre nun $\varphi_n x$ für $x = o$, nicht $= \frac{a}{o}$, sondern hätte einen bestimmten numerischen Werth α; so folgte aus der Gleichung

$$a = \varphi_n x - \varphi_n o,$$

wenn man, wie erfordert wird, und nach dem Obigen geschehen muß, $x = o$ setzt:

$$a = \varphi_n o - \varphi_n o = \alpha - \alpha = o,$$

da doch nach der Voraussetzung a nicht $= o$ seyn soll. Also ist es falsch, daß $\varphi_n o$ nicht $= \frac{a}{o}$ wäre, und es ist folglich $\varphi_n o = \frac{a}{o}$. In der That implicirt, wenn man $\varphi_n o = \frac{a}{o} = \frac{a}{\xi}$ setzt, unter der Bedingung, daß am Schlusse der Rechnung $\xi = o$ gesetzt wird; die Gleichung

$$a = \varphi_n o - \varphi_n o$$

keine Ungereimtheit, weil dann

$$a = \frac{a}{\xi} - \frac{a}{\xi},$$

oder, wenn man mit ξ multiplicirt,

$$a\xi = a - a,$$

also, für ξ, wie erforderlich ist, $= o$:

$$o = a - a.$$

Die Gleichung

$$a = \frac{a}{\xi} - \frac{a}{\xi} = \varphi_n o - \varphi_n o$$

kann als aus der Gleichung

$$a\xi = a - a,$$

aber unter der Voraussetzung, daß $\xi = o$ gesetzt werden muß, entstanden gedacht werden.

16. Aus diesen Sätzen folgt nun:

1, Wenn die gegebene Function φx für $x = o$, $= \frac{a}{o}$ wird; so ist auch $\varphi_1 x = \frac{a}{o}$, folglich auch $\varphi_2 x =$

$\frac{a}{o}$, folglich auch $\varphi_3 x = \frac{a}{o}$ u. s. f., wie sich aus (14.) augenblicklich ergiebt. Wird also die gegebene Function $\varphi x = \frac{a}{o}$, für $x = o$; so werden für diesen Werth von x auch alle folgenden Functionen

$$\varphi_1 x, \varphi_2 x, \varphi_3 x, \varphi_4 x, \ldots,$$

$= \frac{a}{o}$, und die Entwickelung von φx in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe ist unmöglich.

2, Wird irgend eine der obigen Functionen, z. B. $\varphi_{n+1} x = \frac{a}{o}$ für $x = o$; so ist nach (15.) auch $\varphi_n x$, also auch $\varphi_{n-1} x$, also auch $\varphi_{n-2} x$, und folglich, wenn man so weiter geht, auch φx selbst $= \frac{a}{o}$, für $x = o$.

3, Ist folglich φx, für $x = o$, nicht $= \frac{a}{o}$; so ist auch keine der Functionen

$$\varphi_1 x, \varphi_2 x, \varphi_3 x, \varphi_4 x, \ldots,$$

für diesen Werth von x, $= \frac{a}{o}$, weil, wenn dies bei irgend einer, z. B. $\varphi_{n+1} x$, der Fall wäre, nach dem so eben Bewiesenen, auch $\varphi x = \frac{a}{o}$ seyn müßte, für $x = o$, welches gegen die Voraussetzung ist.

4, Hieraus schließt man nun ferner leicht Folgendes:

Wird $\varphi x = \frac{a}{o}$ für $x = o$; so ist die Entwickelung von φx in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe unmöglich; ist aber φx nicht $= \frac{a}{o}$ für $x = o$, sondern erhält für $x = o$ einen völlig bestimmten Werth; so haben auch alle folgenden Functionen für $x = o$ völlig bestimmte Werthe, und die Entwickelung von φx in eine Reihe von der angegebenen Beschaffenheit ist also möglich.

17. Betrachtet man, $x + i$ für x setzend, $\varphi(x + i)$ als eine Function von i; so wird diese Function, wenn man $i = o$ setzt, $= \varphi x$, und erhält also, so lange nämlich x als allge-

meines Symbol einer veränderlichen Größe betrachtet wird, und man ihm keine besondern Werthe beilegt, einen völlig bestimmten Werth, welcher im Allgemeinen nicht $= \frac{a}{o}$ ist. Folglich läßt sich, so lange dem x keine besondern Werthe beigelegt werden, $\varphi(x + i)$ immer in eine nach den positiven ganzen Potenzen von i fortschreitende Reihe entwickeln. In dem Art. Taylors Lehrsatz. (3.) ist ein anderer Beweis dieses für die ganze Analysis höchst wichtigen Satzes nach Lagrange gegeben worden. Ich habe in den vorhergehenden Nummern einen Versuch gewagt, denselben auf eine vielleicht genügendere Art zu begründen, und unterwerfe diese Betrachtungen dem nachsichtigen Urtheil der Kenner. Jede Belehrung über diesen schwierigen Gegenstand wird mir erwünscht seyn. Auch scheint nur auf diese Weise der Methode der unbestimmten Coefficienten ein völlig festes Fundament untergelegt zu werden, weshalb obige Betrachtungen in diesem Artikel nicht fehlen durften.

18. Endlich läßt sich noch im Allgemeinen die Frage aufwerfen, wie in dem Falle, wo $\varphi x = \frac{a}{o}$ für $x = o$, und die Entwickelung in eine Reihe nach den positiven ganzen Potenzen von x also nicht möglich ist, die Form der Reihe gefunden werden kann. Allgemeine Vorschriften lassen sich offenbar hier nicht geben. Am besten wird man die Function φx entweder selbst so umzuformen suchen, daß sie nicht $= \frac{a}{o}$ wird, für $x = o$, die transformirte Function in eine Reihe nach den positiven ganzen Potenzen von x entwickeln, und daraus für φx selbst eine Reihe abzuleiten suchen; oder man verwandelt, welches immer möglich ist (17.), $\varphi(x + i)$ in eine Reihe nach den positiven ganzen Potenzen von i (am leichtesten freilich mittelst der Differentialrechnung. Taylors Lehrsatz. 12.), und sucht dann für x einen solchen bestimmten Werth einzuführen, daß kein Coefficient der erhaltenen Reihe $= \frac{a}{o}$ wird. Beispiele werden dieses deutlicher machen.

19. Noch beruhet die Methode der unbestimmten Coefficienten, wenn sie mit Leichtigkeit und Sicherheit ange-

wandt werden soll, auf folgendem leicht zu beweisenden Lehrsatze:

Wenn für jedes x zwei Reihen, die nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreiten, einander gleich sind, so daß also für jedes x z. B.

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$
$$= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \ldots$$

ist; so ist

$$A = \mathfrak{A},\ B = \mathfrak{B},\ C = \mathfrak{C},\ D = \mathfrak{D},\ \text{u. s. f.}$$

Da nämlich obige Gleichung für jeden Werth von x gilt; so gilt sie auch für $x = 0$, woraus augenblicklich folgt:

$$A = \mathfrak{A},$$
$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$
$$= \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \ldots;$$
$$B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + \ldots$$
$$= \mathfrak{B} + \mathfrak{C}x + \mathfrak{D}x^2 + \mathfrak{E}x^3 + \ldots;$$

ebenfalls für jedes x, also auch für $x = 0$. Folglich

$$B = \mathfrak{B},$$
$$Cx + Dx^2 + Ex^3 + \ldots = \mathfrak{C}x + \mathfrak{D}x^2 + \mathfrak{E}x^3 + \ldots,$$
$$C + Dx + Ex^2 + \ldots = \mathfrak{C} + \mathfrak{D}x + \mathfrak{E}x^2 + \ldots.$$

für jedes x, also auch für $x = 0$. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet nun schon.

20. Sey, um nun zu Beispielen überzugehen, zuerst $\varphi x = (1 + x)^n$, so ist $\varphi 0 = 1$, und es kann also φx in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden (16. 4.). Man ist also berechtigt, zu setzen:

$$(1 + x)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

oder, da man für $x = 0$ sogleich $A = 1$ erhält, kürzer:

$$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$

Setzt man nun $x + u$ für x; so wird, wenn man die positiven ganzen Potenzen von $x + u$ entwickelt:

$$(1 + x + u)^n = 1 + A(x + u) + B(x + u)^2 + C(x + u)^3 + \ldots$$
$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$
$$+ \{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\}u + \ldots.$$
$$= (1 + x)^n \left\{1 + \frac{u}{1 + x}\right\}^n$$
$$= (1 + x)^n \left\{1 + A\frac{u}{1 + x} + B\frac{u^2}{(1 + x)^2} + C\frac{u^3}{(1 + x)^3} + \ldots\right\}$$

Digitized by Google

$$= (1 + x)^n + A(1 + x)^{n-1}u + B(1 + x)^{n-2}u^2 + \ldots$$
$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$
$$+ A(1 + x)^{n-1}u + B(1 + x)^{n-2}u^2 + C(1 + x)^{n-3}u^3 + \ldots$$

und folglich für jedes u:

$$\{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\}u + \ldots$$
$$= A(1 + x)^{n-1}u + B(1 + x)^{n-2}u^2 + C(1 + x)^{n-3}u^3 + \ldots$$

Also nach (19.):

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots = A(1 + x)^{n-1},$$
$$(1 + x)\{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\} = A(1 + x)^n,$$

d. i. nach der Annahme, wenn man zugleich die Producte entwickelt:

$$\left.\begin{array}{l} A \\ \end{array}\right. + \left.\begin{array}{l} 2B \\ + A \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{l} 3C \\ + 2B \end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{l} 4D \\ + 3C \end{array}\right\} x^3 + \ldots$$
$$= A + AAx + ABx^2 + ACx^3 + \ldots$$

Also für jedes x nach (19):

$$A = A \;;\; A = A;$$
$$2B + A = AA;\; B = \frac{A(A-1)}{2};$$
$$3C + 2B = AB;\; C = \frac{B(A-2)}{3};$$
$$4D + 3C = AC;\; D = \frac{C(A-3)}{3}$$
$$5E + 4D = AD;\; E = \frac{D(A-4)}{5};$$

u. s. f. u. s. f.

und es erhellet aus diesen Gleichungen sogleich, daß mittelst derselben alle Coefficienten bestimmt sind, wenn nur A bestimmt ist. Zur Bestimmung von A gelangt man aber auf folgende Art. Sey $A = f(n)$; so ist

$$(1 + x)^n = 1 + f(n).x + \ldots,$$
$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)\{1 + f(n).x + \ldots\} = 1 + \{f(n) + 1\}x + \ldots$$
$$= 1 + f(n + 1).x + \ldots,$$

und folglich

$$f(n + 1) = f(n) + 1.$$

Nun ist offenbar für $n = 1$:

$$f(1) = 1; \quad \text{also}$$
$$f(2) = f(1) + 1 = 2;$$
$$f(3) = f(2) + 1 = 3;$$
$$f(4) = f(3) + 1 = 4;$$

u. s. f. u. s. f.

Also, wenn n eine positive ganze Zahl ist, überhaupt

$$f(n) = n,$$
$$(1 + x)^n = 1 + nx + \ldots$$

Ferner ist, wenn n noch eine positive ganze Zahl ist:

$$(1 + x)^{-n} = 1 + f(-n).x + \ldots$$
$$= \frac{1}{(1 + x)^n} = \frac{1}{1 + nx + \ldots},$$

und folglich:

$$1 = \{1 + f(-n).x + \ldots\}\{1 + nx + \ldots\} = 1 + \{f(-n) + n\} x + \ldots$$

Also $f(-n) + n = 0$, $f(-n) = -n$. Ist endlich der Exponent ein Bruch $\frac{n}{m}$, wo n und m ganze Zahlen sind, m positiv ist, n aber sowohl positiv als negativ seyn kann; so ist

$$(1 + x)^{\frac{n}{m}} = 1 + f\left(\frac{n}{m}\right).x + \ldots,$$
$$(1 + x)^n = \left\{1 + f\left(\frac{n}{m}\right).x + \ldots\right\}^m,$$

und folglich, weil n, m ganze Zahlen sind, nach dem Vorhergehenden:

$$1 + nx + \ldots = 1 + m\left\{f\left(\frac{n}{m}\right).x + \ldots\right\} + \ldots$$
$$= 1 + m.f\left(\frac{n}{m}\right).x + \ldots,$$

wo alle folgenden Glieder höhere Potenzen von x enthalten. Also

$$n = m.f\left(\frac{n}{m}\right),\ f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}.$$

Es ist also, wie auch der Exponent n beschaffen seyn mag, immer

$$f(n) = A = n,$$

und folglich nach den obigen Gleichungen:

$$A = n,$$
$$B = \frac{A(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{1.2},$$
$$C = \frac{B(n-2)}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},$$
$$D = \frac{C(n-3)}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4},$$

$$E = \frac{D(n-4)}{5} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5},$$

u. s. f. u. s. f.

Also

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^4 + \ldots$$

wie bekannt (s. Binomischer Lehrsatz.).

21. Sey ferner $\varphi x = a^x$; so wird, für $x = o$, $\varphi x = a^0 = 1$, also nicht $= \frac{a}{o}$, und man ist folglich berechtigt, zu setzen:

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$

Man setze wieder $x + u$ für x; so wird

$$a^{x+u} = 1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots$$
$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$
$$+ \{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\}u + \ldots$$
$$= a^x + \{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots\}u + \ldots$$
$$= a^x . a^u = a^x\{1 + Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + \ldots\}$$
$$= a^x + Aa^xu + Ba^xu^2 + Ca^xu^3 + \ldots$$

für jedes u. Also (19.):

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots$$
$$= Aa^x = A + AAx + ABx^2 + ACx^3 + \ldots$$

für jedes x. Folglich

$$A = A\;;\quad A = A;$$
$$2B = AA;\quad B = \frac{A^2}{1.2};$$
$$3C = AB;\quad C = \frac{A^3}{1.2.3};$$
$$4D = AC;\quad D = \frac{A^4}{1.2.3.4};$$
$$5E = AD;\quad E = \frac{A^5}{1.2.3.4.5};$$

u. s. f. u. s. f.

so daß also auch hier wieder alle Coefficienten bestimmt sind, wenn nur A bestimmt ist. Es ist folglich:

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Wir werden nachher auf die Bestimmung von A zurückkommen.

22. Sey ferner $\varphi x = \log x$, für die Basis $= b$. Für $x = o$ muß seyn $o = b^{\log o} = \frac{1}{b^\infty} = b^{-\infty}$; also $\log o = -\infty = -\frac{a}{o}$, so daß also $\log x$ nicht in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickelt werden kann (16. 4.). Man entwickele daher, der in (18.) angedeuteten Methode gemäß, $\log(x+u)$ in eine Reihe nach den positiven ganzen Potenzen von u, und setze folglich

$$\log(x + u) = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + \ldots,$$

wo aber jetzt die Coefficienten selbst Functionen von x sind. Setzt man z für u; so wird

$$\log(x + z) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots,$$

und folglich

$$\log(x + u) - \log(x + z) =$$
$$= B(u - z) + C(u^2 - z^2) + D(u^3 - z^3) + E(u^4 - z^4) + \ldots$$
$$= \log\frac{x + u}{x + z} = \log\left\{\frac{1}{x}\left(x + \frac{x(u - z)}{x + z}\right)\right\}$$
$$= \log\frac{1}{x} + \log\left(x + \frac{x(u - z)}{x + z}\right),$$
$$= A + B\frac{x(u - z)}{x + z} + C\frac{x^2(u - z)^2}{(x + z)^2} + D\frac{x^3(u - z)^3}{(x + z)^3} + \ldots$$
$$- \log x$$

Setzt man aber $u = o$; so erhält man augenblicklich $\log x = A$, so daß diese Gleichung sich also in folgende verwandelt:

$$B(u - z) + C(u^2 - z^2) + D(u^3 - z^3) + E(u^4 - z^4) + \ldots$$
$$= B\frac{x(u - z)}{x + z} + C\frac{x^2(u - z)^2}{(x + z)^2} + D\frac{x^3(u - z)^3}{(x + z)^3} + \ldots,$$

und, wenn man mit $u - z$ dividirt:

$$B + C(u + z) + D(u^2 + uz + z^2) + E(u^3 + u^2z + uz^2 + z^3)$$
$$+ F(u^4 + u^3z + u^2z^2 + uz^3 + z^4) + \ldots$$
$$= B\frac{x}{x + z} + C\frac{x^2(u - z)}{(x + z)^2} + D\frac{x^3(u - z)^2}{(x + z)^3} + \ldots$$

für jedes u und z. Setzt man also $u = z$; so erhält man:

$$B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + 5Fz^4 + \ldots$$
$$= B\frac{x}{x+z} = B\left\{1 - \frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2} - \frac{z^3}{x^3} + \ldots\right\},$$

wie man leicht findet, wenn man den Bruch $\frac{x}{x+z}$ in eine Reihe nach Potenzen von z entwickelt, wozu man sich auch der gemeinen Division bedienen kann. Da nun obige Gleichung für jedes z gilt; so ist

$$B = B;\quad B = B;$$
$$2C = -\frac{B}{x};\quad C = -\frac{B}{2x};$$
$$3D = \frac{B}{x^2};\quad D = \frac{B}{3x^2};$$
$$4E = -\frac{B}{x^3};\quad E = -\frac{B}{4x^3};$$
$$5F = \frac{B}{x^4};\quad F = \frac{B}{5x^4};$$
u. s. f. u. s. f.

und folglich, wenn man $\mathfrak{A}$ für B setzt:

$$\log(x+u) = \log x + \mathfrak{A}\left\{u - \frac{u^2}{2x} + \frac{u^3}{3x^2} - \frac{u^4}{4x^3} + \ldots\right\}$$

Nach der in (18.) angedeuteten Methode muß man nun für x einen bestimmten Werth setzen; für welchen kein Coefficient einer Potenz von u, $= \frac{u}{o}$ wird. In dieser Beziehung bietet sich sogleich, und am einfachsten, $x = 1$ dar, wodurch:

$$\log(1+u) = \mathfrak{A}\{u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \ldots\},$$
$$\log(1+x) = \mathfrak{A}\{x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\},$$

wo nun natürlich $\mathfrak{A}$ eine constante Größe ist, die noch bestimmt werden muß.

23. Die Logarithmen, für welche $\mathfrak{A} = 1$ ist, heißen natürliche oder hyperbolische, und ihre Basis wird durch e bezeichnet. Also ist immer

$$\log\text{nat}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

Ueberhaupt ist also

$$\log(1+x) = \mathfrak{A}\log n(1+x),\ \mathfrak{A} = \frac{\log(1+x)}{\log n(1+x)},$$

und folglich, für $1 + x = b$, also $\log(1+x) = 1$, da b die Basis:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\log \operatorname{nat} b},$$

$$\log(1+x) = \frac{1}{\log \operatorname{nat} b} \left\{ x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \right\},$$

wo bekanntlich $\frac{1}{\log \operatorname{nat} b}$ der Modulus des Systems genannt wird, dessen Basis $= b$ ist. Setzt man $b = 1 + (b-1)$; so ist klar, daß

$$\log \operatorname{nat} b = (b-1) - \tfrac{1}{2}(b-1)^2 + \tfrac{1}{3}(b-1)^3 + \ldots.$$

Setzt man nun in (21.) $a = 1 + \alpha$; so wird nach (20.)

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\alpha + \frac{x(x-1)}{1.2}\alpha^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\alpha^3 + \ldots$$
$$= 1 + (\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{1}{4}\alpha^4 + \ldots)x + \ldots\ldots,$$

wie leicht erhellet. Also die in (21.) durch A bezeichnete Größe

$$= \alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{1}{4}\alpha^4 + \ldots$$
$$= (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \ldots,$$

d. i. nach dem Obigen

$$A = \log \operatorname{nat} a,$$

und folglich, wenn die natürlichen Logarithmen bloß durch l bezeichnet werden, nach (21.):

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{(xla)^2}{1.2} + \frac{(xla)^3}{1.2.3} + \ldots;$$

folglich, für $a = e$, $la = le = 1$, da e die Basis der natürlichen Logarithmen:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1..4} + \ldots,$$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1...4} + \ldots.$$

24. Sey ferner $\varphi x = \sin x$, $\varphi o = o$, so daß sich also φx in eine Reihe nach den positiven ganzen Potenzen von x entwickeln läßt (16. 4.). Man setze folglich

$$\sin x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots,$$
$$\sin z = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots,$$
$$\sin x - \sin z = A(x-z) + B(x^2-z^2) + C(x^3-z^3) + \ldots$$
$$= 2\sin \tfrac{1}{2}(x-z) \cos \tfrac{1}{2}(x+z) \text{ (Goniometrie. 28.)}$$
$$= \left\{ A(x-z) + \tfrac{1}{2}B(x-z)^2 + \tfrac{1}{4}C(x-z)^3 + \tfrac{1}{8}D(x-z)^4 + \ldots \right\} \cos \tfrac{1}{2}(x+z),$$

und, wenn man durch $x - z$ dividirt:

$$A + B(x+z) + C(x^2+xz+z^2) + D(x^3+x^2z+xz^2+z^3)$$
$$+ E(x^4+x^3z+x^2z^2+xz^3+z^4) + \ldots\ldots$$

$$= \left\{ A + \tfrac{1}{2}B(x-z) + \tfrac{1}{4}C(x-z)^2 + \tfrac{1}{8}D(x-z)^3 + \ldots \right\} \cos\tfrac{1}{2}(x+z).$$

Folglich, wenn man nun $x = z$ setzt:

$$A\cos x = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \ldots,$$

$$A\cos z = A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + \ldots,$$

$$A(\cos x - \cos z) = 2B(x-z) + 3C(x^2-z^2) + 4D(x^3-z^3) + \ldots$$

$$= -2A\sin\tfrac{1}{2}(x+z)\sin\tfrac{1}{2}(x-z) \text{ (a. a. O.)}$$

$$= -A\left\{A(x-z) + \tfrac{1}{2}B(x-z)^2 + \tfrac{1}{4}C(x-z)^3 + \ldots\right\}\sin\tfrac{1}{2}(x+z).$$

Also, wie vorher:

$$2B + 3C(x+z) + 4D(x^2+xz+z^2) + 5E(x^3+x^2z+xz^2+z^3)$$
$$+ 6F(x^4+x^3z+x^2z^2+xz^3+z^4) + \ldots\ldots$$
$$= -A\left\{A + \tfrac{1}{2}B(x-z) + \tfrac{1}{4}C(x-z)^2 + \ldots\right\}\sin\tfrac{1}{2}(x+z);$$

und für $x = z$:

$$-A^2\sin x = 2B + 2.3Cx + 3.4Dx^2 + 4.5Ex^3 + \ldots.$$
$$= -A^2\left\{Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots\right\}.$$

Folglich

$$2B = 0; \qquad B = 0;$$
$$2.3C = -A^3; \qquad C = -\frac{A^3}{1.2.3};$$
$$3.4D = -A^2B; \qquad D = 0;$$
$$4.5E = -A^2C; \qquad E = \frac{A^5}{1.2.3.4.5};$$
$$5.6F = -A^2D; \qquad F = 0;$$
$$6.7G = -A^2E; \qquad G = -\frac{A^7}{1.2\ldots7};$$

u. s. f. u. s. f.

Also

$$\sin x = Ax - \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^5x^5}{1\ldots5} - \frac{A^7x^7}{1\ldots7} + \ldots.$$

wo nur noch A zu bestimmen.

Da hiernach

$$\frac{\sin x}{x} = A - \frac{A^3x^2}{1.2.3} + \ldots$$

ist; so erhellet, daß, wenn x abnimmt, dieses Verhältniß sich der Größe A immer mehr und mehr nähert, und A also die Gränze dieses Verhältnisses ist. Diese Gränze ist aber, wie augenblicklich aus der Natur des Sinus folgt, das Verhältniß der Gleichheit, also $= 1$. Folglich $A = 1$, und demnach

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \ldots,$$

woraus, mittelst der oben für Acos x gefundenen Reihe, sogleich:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \ldots.$$

25. Da tang x = o für x = o; so muß sich tang x in eine nach den positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lassen (Cyclometrie 17.) Da aber cot x $= \frac{a}{o}$ für x = o; so ist die Entwickelung der Cotangente in eine solche Reihe nicht möglich (16. 4.). Es ist aber

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \ldots.}{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots.},$$

$$x \cot x = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \ldots.}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \ldots.},$$

eine Function, welche, für x = o, = 1 wird, und sich demnach in eine Reihe von obiger Form entwickeln läßt. Man ist also berechtigt zu setzen:

$$x \cot x = 1 + Ax + Bx^2 + \ldots,$$

woraus

$$\cot x = \frac{1}{x} + A + Bx + Cx^2 + \ldots.$$

Dies stimmt überein mit Cyclometrie (15.). Bey der wirklichen Entwickelung verweilen wir nicht.

26. Die gegebene Function sey x' = Arc tang x; so wird, wenn wir den kleinsten Werth von Arc tang x in's Auge fassen, x' = o für x = o, und x' ändert bekanntlich sein Zeichen zugleich mit x. Daher ist man berechtigt, zu setzen

$$x' = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \ldots,$$

und die Entwickelung selbst wird zeigen, ob diese Form die richtige ist. Für z' = Arc tang z ist

$$z' = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \ldots;$$

$$\frac{x'-z'}{x-z} = A + B(x^2 + xz + z^2) + C(x^4 + x^3z + x^2z^2 + xz^3 + z^4)$$
$$+ D(x^6 + x^5z + x^4z^2 + x^3z^3 + x^2z^4 + xz^5 + z^6) + \ldots\ldots$$

Aber

$$\frac{x'-z'}{x-z} = \frac{x'-z'}{\text{tang}\,x' - \text{tang}\,z'} = \frac{(x'-z')\cos x' \cos z'}{\sin(x'-z')}$$

$$= \frac{(x'-z')\cos x' \cos z'}{(x'-z') - \frac{1}{6}(x'-z')^3 + \ldots} = \frac{\cos x' \cos z'}{1 - \frac{1}{6}(x'-z')^2 + \ldots}$$

und folglich, wenn man auf beiden Seiten in obiger Gleichung $x' = z'$, also auch $x = z$ setzt:

$$\cos x'^2 = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots$$

Aber

$$\cos x'^2 = \frac{1}{\sec x'^2} = \frac{1}{1 + \text{tang}\,x'^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

so daß also

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$
$$= A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + \ldots,$$

woraus unmittelbar:

$$A = 1,\; B = -\tfrac{1}{3},\; C = \tfrac{1}{5},\; D = -\tfrac{1}{7},\; \ldots;$$

also

$$\text{Arc tang}\,x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.$$

(Cyclometrie 10.).

27. Für $y' = \text{Arc}\sin y$, $u' = \text{Arc}\sin u$ setze man, wie vorher:

$$y' = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7 + \ldots,$$
$$u' = Au + Bu^3 + Cu^5 + Du^7 + \ldots,$$

$$\frac{y'-u'}{y-u} = A + B(y^2 + yu + u^2) + C(y^4 + y^3u + y^2u^2 + u^4)$$
$$+ D(y^6 + y^5u + y^4u^2 + y^3u^3 + y^2u^4 + yu^5 + u^6) + \ldots\ldots$$

$$\frac{y'-u'}{y-u} = \frac{y'-u'}{\sin y' - \sin u'} = \frac{y'-u'}{2\sin\frac{1}{2}(y'-u')\cos\frac{1}{2}(y'+u')}$$

$$= \frac{y'-u'}{\left\{(y'-u') - \frac{1}{24}(y'-u')^3 + \ldots\right\}\cos\frac{1}{2}(y'+u')}$$

$$= \frac{1}{\left\{1 - \frac{1}{24}(y'-u')^2 + \ldots\right\}\cos\frac{1}{2}(y'+u')}.$$

Setzt man nun wieder $y' = u'$, also auch $y = u$; so wird

$$\frac{1}{\cos y'} = A + 3By^2 + 5Cy^4 + 7Dy^6 + \ldots.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin y'^2}} = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}y^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}y^6 + \ldots (20.),$$

woraus unmittelbar:

$$A = 1,\ B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3},\ C = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5},\ D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7}, \ldots$$

und folglich, x für y gesetzt:

$$\text{Arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$

(Cyclometrie 1.)

28. Diese Beispiele mögen hinreichen, das Wesen der wichtigen Methode der unbestimmten Coefficienten zu erläutern, und ihre Anwendung zu zeigen. Vorzüglich v. m. auch den Art. Umkehrung der Reihen, wo diese Methode ganz besonders ihre Anwendung findet. Ich glaubte mich über dieselbe, wegen ihrer großen Wichtigkeit, in diesem Art. etwas weiter verbreiten zu müssen. Der Erfinder dieser Methode ist Descartes (Geometria p. 49.); sie ist aber durch die spätern Mathematiker sehr erweitert, vervollkommnet, und auf viele Fälle angewandt worden. Vorzüglich verdankt ihr die Theorie der Reihen, insbesondere die Entwickelung der Functionen in Reihen, viele Erweiterungen und Vereinfachungen der Methoden.

Unbestimmte Größe ist eine Größe, deren Werth willkührlich angenommen werden kann. Eine Größe kann unbestimmt seyn, und ihr Werth doch durch die Werthe anderer Unbestimmten bestimmt werden, von denselben abhängig seyn, welches bei allen Functionen veränderlicher Größen der Fall ist. In der Analysis ist der Ausdruck unbestimmte Größe im Allgemeinen gleichbedeutend mit dem Ausdruck veränderliche Größe (s. diesen Artikel.). Was man in der Integralrechnung Sonderung der Unbestimmten (Indeterminatas separare. Séparation des Indéterminées.) oder Sonderung der veränderlichen Größen nennt, s. in dem Artikel Integralgleichung. I.

Unbestimmte Quadratur einer Curve ist die Bestimmung des Flächeninhalts eines willkührlichen, der unbestimmten Abscisse x entsprechenden, Segmentes derselben. Dagegen ist z. B. die Bestimmung des Flächeninhalts des

ganzen Kreises durch die Formel $r^2 . \pi$ ein einfaches Beispiel einer bestimmten Quadratur einer Curve. Vergl. auch den folgenden Artikel.

Unbestimmte Rectification einer Curve ist die Bestimmung der Länge eines Bogens derselben, welcher einer unbestimmten willkührlichen Abscisse entspricht. So ist es z. B. eine unbestimmte Rectification der Ellipse, wenn überhaupt die Länge eines der unbestimmten Abscisse x entsprechenden Bogens bestimmt wird; die Bestimmung des ganzen oder halben Umfanges der Ellipse, oder der Länge eines elliptischen Quadranten dagegen ist eine bestimmte Rectification der Ellipse. S. z. B. Rectification (11.).

Unbestimmte Werthe der Functionen, s. Function (50. ff.).

Uncia, gleichbedeutend mit Coefficient, vorzüglich unciae binomiales, die Binomial-Coefficienten. Das Wort wird von Ougtred (Clavis mathematica. C. XII. §. 6.) zuerst gebraucht seyn. Aber auch Euler bedient sich desselben in zwei Abhandlungen über die Binomial-Coefficienten. Acta Petropol. 1781. P. I. II.

Undecagonum, Eilfeck, eine ebene geradlinige Figur mit eilf Seiten.

Undeterminirt, s. Unbestimmt.

Unechter Bruch, gleichbedeutend mit uneigentlicher Bruch.

Uneigentlicher Bruch, s. Bruch.

Unendlich. 1. Schon in Stifels Arithmetica integra. Norib. 1544. Appendix libri secundi: De quadratura circuli fol. 224. finden sich folgende drei Sätze: Triangulus est polygoniarum omnium prima. Omnium polygoniarum ultima est circulus.

Recte igitur describitur circulus mathematicus esse polygonia infinitorum laterum. An diesem Orte scheint daher der Begriff, oder vielmehr die Idee des Unendlichen zuerst vorzukommen, da die Alten bey allen Beweisen in der Elementargeometrie sich immer der Exhaustionsmethode bedienten, worüber dieser Artikel nachzusehen ist. Stifel macht aber in der Folge keine weiteren Anwendungen von dem Unendlichen, und in der That scheint auch dieser Begriff zuerst von Kepler in seiner Nova Stereometria doliorum vinariorum etc. Accessit Stereometriae Archimedeae supplementum. Lincii 1615. eigentlich in die Mathematik eingeführt worden zu seyn. Um ein Beispiel seiner Methode zu geben, setze ich, da mir das Werk selbst nicht zur Hand ist, aus Carnots Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung, übers. von J. K. F. Hauff. Frankfurt 1800. S. 62. den Beweis von Archim. de circuli dimensione. Prop. I., daß der Kreis einem Triangel gleich ist, dessen Grundlinie der Peripherie, die Höhe aber dem Radius des Kreises gleich ist, hierher.

„Archimedes, sagt Kepler (P. I. Theor. II.), bedient sich des indirecten Beweises, der auf eine Unmöglichkeit führt, worüber von Vielen Vieles gesagt worden ist. Mir scheint der Sinn der zu seyn: die Peripherie des Kreises BG (Fig. 94.) hat eben so viele Theile, als Punkte, d. h. unendlich viele, deren jeder betrachtet werden kann als die Grundlinie eines gleichschenklichten Dreiecks, dessen Schenkel der Linie AB gleich sind, daß also die Kreisfläche unendlich viele Dreiecke enthält, deren Spitzen alle in den Punkt A zusammen fallen. Man strecke nun die Peripherie des Kreises BG in eine gerade Linie aus, und es sey BC ihr gleich, und AB auf ihr lothrecht, so werden alle Grundlinien jener unendlichen vielen Dreiecke oder Ausschnitte, in einer geraden Linie an einander liegen. Es sey eine dieser Grundlinien BF so klein, als man will, und die CE ihr gleich, und man verbinde die Punkte F, E, C mit A. Da nun auf der geraden Linie BC so viele Dreiecke ABF, AEC sind, als

in der Kreisfläche Ausschnitte, und sie gleiche Grundlinien BF, EC, und einerlei Höhe BA haben, die auch zu den Ausschnitten gehört, so werden die Dreiecke EAC, BAF einander, und jedes wird auch einem Kreisausschnitte gleich seyn, und alle Dreiecke zusammen, deren Grundlinien in der Linie BC liegen, d. i. das Dreieck BAC, das aus ihnen allen besteht, wird allen Kreisausschnitten, d. h. der aus allen bestehenden Kreisfläche gleich seyn. Das will der indirecte Beweis des Archimedes sagen."

Eben so betrachtet Kepler den Kegel als zusammengesetzt aus unendlich vielen Pyramiden, welche auf den unendlich kleinen Dreiecken, in die er die Grundfläche zerlegt, stehen, und mit dem Kegel eine gemeinschaftliche Spitze haben; den Cylinder auf ähnliche Weise zusammengesetzt aus unendlich vielen kleinen Prismen über einerlei Grundfläche und von einerlei Höhe.

2. Wie wenig diese Sprache, welche auch in viele neuere Lehrbücher der Geometrie übergegangen ist, wenn sie auch allerdings die Beweise abkürzt, den Verstand befriedigt, wie wenig sie der sonst in der Geometrie gewöhnlichen Evidenz und Strenge gemäß ist, erhellet von selbst; und gewiß ist es als ein besonderer Vorzug mehrerer der neuesten geometrischen Werke, als ein vorzüglicher Fortschritt der Lehrmethode zu betrachten, daß jene unwissenschaftliche Sprache immer mehr und mehr verbannt, die Exhaustionsmethode der griechischen Geometer wieder in ihre alten Rechte eingesetzt, oder statt derselben die Methode der Gränzen, welche jener an Strenge nichts nachgiebt, und dabei in den meisten Fällen kürzer ist, besonders weil sie leicht auf einige allgemeine Sätze gebracht werden kann, in die Lehrbücher eingeführt wird. Von der Methode der Gränzen ist im Art. Verhältniß (76. ff.) ein, wie ich glaube, genügender Abriß gegeben. Sehr wichtig für die Anwendung in der Geometrie ist der dort in (81.) bewiesene allgemeine Lehrsatz. Der obige Satz vom Kreise kann mittelst der Theorie der Gränzen leicht und völlig streng auf folgende Art bewiesen werden. Inhalt, Umfang und (kleiner) Radius irgend eines in den Kreis beschriebenen

regulären Vielecks seyen P, u, ϱ, die entsprechenden Größen beim Kreise k, p, r; Gränzen im Wachsen bezeichne man durch Lc., Gränzen im Abnehmen durch Ld.; so erhellet durch einfache geometrische Betrachtungen sogleich, daß

$$P = \tfrac{1}{2}\,\varrho u;$$

$$\text{Lc. } P = K,\ \text{Lc. } \varrho = r,\ \text{Lc. } u = p;$$

so wie auch eben so leicht, daß Ld. $\frac{1}{u} = \frac{1}{p}$ ist. Folglich ist Lc. $(\varrho : 1) = r : 1$ (Verhältniß. 78.); Ld. $(\frac{1}{u} : 1) = \frac{1}{p} : 1$ (Verhältniß. 78.); Lc. $(1 : \frac{1}{u}) = 1 : \frac{1}{p}$ (Verhältniß. 83.); Lc. $(\varrho : \frac{1}{u}) = r : \frac{1}{p}$ (Verhältniß. 88.); d. i. da $\varrho : \frac{1}{u} = \varrho u : 1$, $r : \frac{1}{p} = rp : 1$ ist,

$$\text{Lc. } (\varrho u : 1) = rp : 1;$$

also Lc. $\varrho u = rp$, welches auch leicht für sich erhellet, ohne die obigen Sätze von den Verhältnissen anzuwenden, da, wenn r, p respective die Gränzen im Wachsen von ϱ, u sind, offenbar auch rp die Gränze im Wachsen von ϱu ist. Nun ist aber immer

$$P : \tfrac{1}{2}\varrho u = 1 : 1,\ P : \varrho u = 1 : 2.$$

Also auch (Verhältniß. 81.)

$$\text{Lc. } P : \text{Lc. } \varrho u = 1 : 2,$$

d. i. nach dem Obigen

$$K : rp = 1 : 2,\ K = \tfrac{1}{2} rp,$$

welche Formel den zu beweisenden Satz enthält.

3. In noch größerer Ausdehnung als von Kepler ward die Idee des Unendlichen von Cavaleri in seiner Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bonon. 1635. (1653.) angewandt. Von dieser Methode ist in diesem Wörterbuche in dem ihr besonders gewidmeten Artikel (Thl. I. S. 415.) ausführlich gehandelt. Daß Cavaleri nicht durch Kepler auf seine Methode geleitet worden ist (Thl. I. S. 416.), hat er selbst in einem spätern Werke (Exercitationes geometricae. Bonon. 1647.) aus der Verschiedenheit der Gründe beider Methoden, und aus der

Verschiedenheit des Ganges, den beide bei den Anwendungen derselben Vorstellungsart genommen haben, darzuthun gesucht. Auch vergl. man Frisi's Elogi di Galileo Galilei e di Bonaventura Cavaleri. Milano. 1778.

4. Die Arithmetica infinitorum von Wallis (Joannis Wallisii Opera math., tribus volumin. comprehensa. Oxonii. T. I. 1665.) enthält die ersten Spuren der Anwendung des algebraischen Calculs auf die Quadratur der Räume. Er sieht die Flächen als aus Linien bestehend an, die nach einem bestimmten Gesetze zu- oder abnehmen, und findet den Ausdruck für den Inhalt der Flächen durch Summirung der Reihen der Linien, aus denen sie zusammengesetzt sind. Seine Methode ist eine Erweiterung der Cavaleri'schen Methode des Untheilbaren. Mehr über dieses in der Geschichte der Mathematik wichtige Werk s. m. im Art. Quadratur (5.)

5. Auch Fontenelle hat Élémens de la Géometrie de l'infini. Paris. 1727. geschrieben. Er glaubt, daß die Differentialrechnung nothwendig unendlich große und unendlich kleine Größen voraussetze, und stellt daher gleich zu Anfange den Satz auf, daß man eine jede Größe wirklich bis in's Unendliche vermehrt oder vermindert annehmen könne, und auf diesem Satze beruhet das ganze Werk. D'Alembert erklärt sich in ziemlich starken Ausdrücken gegen dieses Princip in der Encyclopédie méthodique. Art. Infini., so wie auch Maclaurin im zweiten Theile des Treatise of Fluxions, und Buffon in der Vorrede zu der französischen Uebersetzung von Newtons Methodus fluxionum.

6. Die wichtigste Erfindung, zu welcher die Idee des Unendlichen geleitet hat, ist die Differentialrechnung, worüber ich mich aber hier um so eher weiterer Auseinandersetzungen, wegen Beschränktheit des Raumes, enthalten kann, da dieser Gegenstand schon in den Artt. Differentiale und Differentialrechnung ausführlich behandelt worden ist, auf welche ich daher, so wie auf den Artt. Berührende Linie, hier verweise. Wir wollen vielmehr nun, nach diesen historischen Bemerkungen, die wichtigsten Fälle, wo das Un-

endliche in der Mathematik vorkommt, durchgehen, und Alles auf möglichst deutliche Begriffe zurückzuführen suchen, indem wir bei den allgemeinen Begriffen und Sätzen von den unendlichen Größen vorzüglich drei wichtige Abhandlungen von Cauchy: Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. I. Partie. Analyse algebrique. Paris. 1821. p. 26. sqq. Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal. Paris. 1823. p. 161. Addition., und den Aufsatz sur les divers ordres de quantités infiniment petites in den Exercices de Mathématiques par Cauchy. 6me Livraison. Paris. 1826. p. 146. benutzen, weil uns Cauchy's Darstellung der mathematischen Strenge und Evidenz am meisten zu genügen scheint.

7. Man sagt, daß eine veränderliche Größe unendlich klein werde, wenn ihr numerischer Werth unbegränzt abnimmt, so daß er kleiner werden kann als jede gegebene noch so kleine Größe, und folglich der Null sich immer mehr und mehr nähert, der Abnahme keine andere Gränze, als Null selbst, gesetzt werden kann.

Cauchy bemerkt ganz richtig, daß eine unbegränzte Abnahme wohl von einer fortwährenden Abnahme zu unterscheiden sey. Die Fläche eines regulären Vielecks nimmt, wenn die Seitenzahl wächst, fortwährend ab, aber nicht unbegränzt, da der Kreis die Gränze ist, über welche hinaus die genannte veränderliche Größe nicht abnehmen kann. Die Brüche

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \ldots$$

nehmen fortwährend ab, aber nicht unbegränzt, da die Einheit die Gränze ist. Dagegen nehmen die Brüche

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{9},\ \ldots$$

nicht fortwährend ab, weil der Unterschied zwischen je zwei auf einander folgenden abwechselnd positiv und negativ ist, die Abnahme ist aber dessen ungeachtet unbegränzt, da jene Brüche offenbar willkührlich klein werden können, und der Null sich immer mehr und mehr nähern. Die Gränze einer unbegränzten Abnahme ist allerdings die Null selbst, und es scheint uns hierin kein Widerspruch zu liegen. Was unbegränzt ab-

nimmt, nähert sich immer mehr und mehr dem Zustande des wirklichen Verschwindens, d. h. der Null, und diese ist seine Gränze.

8. Man sagt, daß eine veränderliche Größe unendlich groß werde, wenn ihr numerischer Werth unbegränzt wächst, und folglich größer werden kann als jede gegebene noch so große Größe, wobei wieder ein unbegränztes Wachsen von einem fortwährenden Wachsen wohl zu unterscheiden ist. Die Fläche eines in den Kreis beschriebenen regulären Vielecks wächst fortwährend, wenn die Seitenzahl zunimmt, aber nicht unbegränzt, da der Kreis die Gränze ist. Die natürliche Zahlenreihe

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

wächst fortwährend und unbegränzt.

Die Gränze einer unbegränzten Abnahme nannten wir vorher Null, und das Symbol dieser Gränze ist 0; das Symbol der Gränze einer unbegränzten Zunahme ist ∞, welches so wenig, wie jenes, etwas Reelles bezeichnet. Die Zeichen 0 und ∞ scheinen uns völlig in eine Kategorie zu gehören; so wenig jenes Schwierigkeit macht, eben so wenig wird dieses Hindernisse in den Weg legen. 0 ist die Gränze des Abnehmens, ∞ die Gränze des Wachsens.

9. Die alten Metaphysiker unterschieden das actuale oder kategorematische Unendliche (Infinitum actu) von dem potentialen oder synkategorematischen Unendlichen (Infinitum potentia), und verstanden unter dem erstern das, was wirklich Unendlichkeit in sich hat, unter dem letztern das, was zwar nicht wirklich unendlich, aber doch eines ins Unendliche, d. h. ohne Ende fortgehenden Wachsthums fähig ist (Hauff a. a. O. S. 105. Chauvini Lexicon philosoph. Leovard. 1713. Art. Infinitum). Den Größen kann hiernach nur potentiale Unendlichkeit zukommen, denn wer will dem Wachsen einer Größe, wenn sie nicht vielleicht besondern Bedingungen unterworfen ist, wie z. B. die Fläche eines in den Kreis beschriebenen regulären Polygons, sondern eines unbegränzten Wachsthums fähig ist, im eigentlichen Sinne

eine Gränze setzen. Eine solche Gränze läßt sich gewissermaßen nur fingiren, wenn ich so sagen darf, welches aber mit der Null ganz eben so der Fall ist. Wir haben jene Gränze durch ∞ bezeichnet, und ∞ bedeutet also das actuale oder kategorematische Unendliche der Metaphysiker. Eine Größe, die einer unbegränzten Abnahme fähig ist, haben wir unendlich klein, ihre Gränze Null genannt; gewiß wäre es ein Vortheil, auch in Bezug auf das Unendlichgroße hierin einen Unterschied zu machen, und das Zeichen ∞, die Gränze, welcher sich eine unbegränzt wachsende Größe, die oben unendlich groß genannt worden ist, fortwährend nähert, nicht schlechthin unendlich groß zu nennen, sondern auch im Ausdruck von den unendlich großen Größen zu unterscheiden, wie es die alten Metaphysiker wirklich thaten, und auch in der Mathematik bei dem Unendlichkleinen schon wirklich geschieht. L'Huilier (Exposition élémentaire des Principes des calculs superieurs. Berlin. 1786. §. LXVI. Scholie 2.) hat zu diesem Zweck schon die Ausdrücke infini für das actuale, infinible für das potentiale Unendliche vorgeschlagen, ein Sprachgebrauch, der aber, so viel ich weiß, bei französischen Schriftstellern, mit Unrecht, keinen Eingang gefunden hat. v. Busse (Bündige und reine Darstellung des wahrhaften Infinitesimal-Calculs. Thl. I. Dresden. 1825.) bedient sich für das Zeichen ∞ der Benennung vollgroß. In diesem Artikel wird das bloße Zeichen hinreichen.

10. Negative Größen, deren absolute Werthe entweder immer kleiner oder immer größer werden, nähern sich immer mehr und mehr den Gränzen —o und —∞.

11. Ein Bruch, dessen Zähler ungeändert bleibt, dessen Nenner aber fortwährend abnimmt, d. h. sich immer mehr und mehr der Gränze o nähert, wird immer größer, und nähert sich immer mehr und mehr der Gränze ∞. Eben so wird ein Bruch, dessen Zähler ungeändert bleibt, dessen Nenner aber fortwährend zunimmt und sich der Gränze ∞ nähert, immer kleiner, und nähert sich der Gränze o. Stellt man sich nun vor, daß der Nenner die Gränzen o und ∞ wirklich erreicht habe, so wird der Bruch

selbst natürlich die Gränzen ∞ oder o erreicht haben. Dies ist der Sinn der symbolischen Ausdrücke

$$\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{-0} = -\infty, \frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{-\infty} = -0.$$

12. So lange man sich eine Größe als eine Zahl dargestellt denkt, ist es, wie es scheint, keinem Zweifel unterworfen, daß diese Größe weder beim Abnehmen o, noch beim Zunehmen ∞ wirklich erreichen, sondern diesen beiden Gränzen sich nur immer mehr nähern kann. Bei stetigen Größen aber ist dies anders, welches wir durch einige Beispiele, die hier mehr, als allgemeine Betrachtungen, zu nützen scheinen, erläutern wollen.

13. Bekanntlich ist $\tang \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, eine Formel, deren Beweis, streng genommen nur für den Fall gilt, wo die Linien, durch welche die Tangente und Secante des Winkels φ geometrisch dargestellt werden, sich wirklich schneiden. Denkt man sich die Tangente von 90° durch eine Linie geometrisch dargestellt, so kann man sie sich nicht anders, als unbegränzt, ohne Ende, vorstellen, da sie von der Secante nicht mehr geschnitten wird. Wendet man nun obige Formel auch auf diesen Fall an, und läßt zuerst φ von o an immer mehr und mehr zunehmen, so wird $\sin \varphi$ immer größer, $\cos \varphi$ immer kleiner, der obige Bruch, d. i. $\tang \varphi$, also immer größer, ganz der Natur der Sache gemäß. Denkt man sich jetzt aber, daß φ wirklich $= 90^0$ geworden ist; so gilt, streng genommen, die obige Formel nicht mehr, sie geht aber, da für diesen Fall $\sin \varphi = 1$, $\cos \varphi = 0$ ist, in das Symbol $\frac{1}{0} = \infty$ über, wodurch nun eben angedeutet wird, daß in diesem Fall die Tangente, als stetige Größe, unbegränzt, ohne Ende, im eigentlichen Sinne unendlich, vollgroß nach Busse, gedacht werden muß.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich über die Formel

$$\tang(\varphi + \psi) = \frac{\tang \varphi + \tang \psi}{1 - \tang \varphi \tang \psi}$$

für den Fall, wo $\psi = 90^0 - \varphi$, also

$$\tang \varphi \tang \psi = \tang \varphi \cot \varphi = 1$$

ist, anstellen.

14. Die Gleichung der geraden Linie ist bekanntlich

$$y = Ax + B,$$

wo, rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt, A die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die gegebene Linie die Abscissenaxe schneidet, B die Entfernung ihres Durchschnittspunktes mit der Ordinatenaxe vom Anfangspunkte der Coordinaten ist. Geht man auf den Beweis dieser Gleichung, welcher doch, wie die Natur der Sache es fordert, nur aus einer geometrischen Betrachtung abgeleitet werden kann, zurück; so erhellet, daß er, streng genommen, nur für den Fall gilt, wenn beide Axen von der gegebenen Linie geschnitten werden. Die Allgemeinheit der analytischen Rechnung fordert aber, unter obiger Gleichung auch die Fälle, wo die gegebene Linie entweder der Abscissen-, oder der Ordinatenaxe parallel ist, zu subsumiren. Im ersten Falle ist, den geometrischen Gesichtspunkt festgehalten, für alle Abscissen $y = B$. Daher muß, soll dieser Fall auch durch obige Gleichung dargestellt werden, das erste Glied Ax für alle x verschwinden. Man stellt sich daher vor, daß der von der gegebenen geraden Linie mit der Abscissenaxe eingeschlossene Winkel, obgleich es in der That eigentlich gar keinen solchen Winkel giebt, $= 0$ oder 180°, seine trigonometrische Tangente also, d. i. A, $= 0$ werde, wodurch sich die allgemeine Gleichnng auf $y = B$ reducirt, wie es seyn muß. Ist die gegebene gerade Linie der Ordinatenaxe parallel, so wird letztere nicht mehr von ersterer geschnitten, und man muß sich also die Linie, durch welche B dargestellt wird, in der That als unbegränzt, ohne Ende denken, und daher nach dem Obigen durch das Symbol $\pm \frac{1}{0}$ bei der arithmetischen Darstellung, da die genannte Linie über und unter der Abscissenaxe liegen kann, bezeichnen. Führt man nun dies in die allgemeine Gleichung ein; so wird dieselbe

$$y = \frac{1}{0} \cdot x \pm \frac{1}{0}.$$

Wendet man hierauf die gewöhnliche Bruchrechnung an; so erhält man

$$y = \frac{x}{o} \pm \frac{1}{o} = \frac{o \cdot x \pm 1 \cdot o}{o} = \frac{o \pm o}{o} = \frac{o}{o},$$

das Symbol des Unbestimmten (s. Function 50.), welches ganz der Natur der Sache gemäß ist, da in der That im vorliegenden Fall die Coordinate keinen (geometrisch) bestimmten Werth hat, weil es keinen Durchschnittspunkt der Coordinate mit der gegebenen Linie mehr giebt.

15. Sind die Gleichungen zweier geraden Linien

$$y = Ax + B, \; y = A'x + B'$$

und diese beide Linien schneiden einander; so erhält man leicht die Coordinaten des Durchschnittspunktes

$$x = -\frac{B - B'}{A - A'}, \; y = \frac{AB' - BA'}{A - A'}.$$

Sind die beiden Linien einander parallel; so ist $A = A'$, und man erhält

$$x = -\frac{B - B'}{o}, \; y = \frac{AB' - BA'}{o},$$

d. h. beide Coordinaten $= \infty$, so daß also auch hier dieses Symbol wieder dem Parallelismus der beiden Linien entspricht. Fallen beide Linien zusammen; so ist $A = A'$, $B = B'$, und man erhält $x = y = \frac{o}{o}$, das Symbol des Unbestimmten, wie es erforderlich ist.

16. Die Gleichung der Hyperbel zwischen ihren Asymptoten ist $xy = \frac{1}{2}a^2$, $y = \frac{a^2}{2x}$. Für $x = o$ wird $y = \frac{a^2}{o}$, und man muß sich in der That auch die durch den Mittelpunkt gehende Ordinate, die nothwendig mit in das ganze System der Coordinaten gehört, ein Glied desselben ist, als unbegränzt oder unendlich vorstellen. So kommen auch an vielen andern krummen Linien unendlich große Coordinaten zwischen endlichen vor.

17. Die Gleichung der Ellipse aus den Scheitel ist

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a}.$$

Je größer a wird, desto mehr nimmt das Glied $\frac{px^2}{2a}$ ab, besonders in der Nähe des Scheitels, für kleine x, desto

mehr nähert sich also auch die Gleichung der Ellipse der Gleichung $y^2 = px$, welches die Gleichung der Parabel ist. Setzt man für a das Symbol $\frac{1}{0}$, und wendet die Regeln der gemeinen Bruchrechnung an; so wird die Gleichung der Ellipse

$$y^2 = px - \frac{px^2}{\frac{2}{0}} = px - \frac{px^2 . 0}{\frac{2 . 0}{0}} = px - \frac{px^2 . 0}{2},$$

d. i. $y^2 = px$, so daß also, wenn man sich denkt, daß a die Gränze $\frac{1}{0}$ wirklich erreicht hätte, die Ellipse in der That und völlig in die Parabel übergegangen wäre. Gewöhnlich sagt man, die Parabel sey eine Ellipse, deren Hauptaxe unendlich ist. Der wahre Sinn dieses Ausdrucks ist aus dem Obigen klar.

18. Man habe zwei aus einerlei Mittelpunkt beschriebene Ellipsen, deren Hauptaxen zusammenfallen und deren Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

sind. Bestimmt man hieraus die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser beiden Ellipsen; so erhält man aus diesen Gleichungen:

$$x = aa' \sqrt{\frac{b^2 - b'^2}{a'^2 b^2 - a^2 b'^2}}, \quad y = bb' \sqrt{\frac{a'^2 - a^2}{a'^2 b^2 - a^2 b'^2}}.$$

Sind nun die beiden Ellipsen einander ähnlich, so daß $a : b = a' : b'$, $a'b = ab'$ ist; so erhält man $x = \frac{a}{0}$, $y = \frac{a'}{0}$, und diese Ausdrücke deuten hier offenbar an, daß die beiden Ellipsen in diesem Falle einander nicht schneiden können, sondern einander parallel sind.

19. Wer sich nur ein bestimmtes Stück einer Parabel, einer Hyperbel oder einer Kegelfläche vorstellt, hat noch keinen vollständigen Begriff davon. Um sich dieselbe, ich möchte sagen, in ihrer Ganzheit vorzustellen, muß man sie sich in ihrer unendlichen Ausdehnung, immer nach einem und demselben Gesetze gekrümmt und gebildet denken. Dies sind andere Beispiele, wo stetige Größen wirklich als un=

endlich gedacht werden müssen. Etwas Aehnliches findet statt, wenn man beim Kreise die ihn beschreibende gerade Linie, nachdem sie einen Umlauf vollendet, nicht stille stehen, sondern ihre Umläufe willkührlich oft fortsetzen und wiederholen läßt. In der analytischen Trigonometrie gebraucht man in der That diese Vorstellung durchgängig. Auf ähnliche Art kann man sich auch die Ellipse und jede andere geschlossene Curve als unendlich denken.

20. Die Cycloide und Epicycloide, welche durch Umwälzung eines Kreises entstehen, sind ebenfalls unendliche Größen. Wenn der Kreis seine Umwälzung einmal vollendet hat, muß man ihn nicht stille stehen lassen; man kann die Umwälzung willkührlich oft wiederholen.

21. Eine Reihe, deren Glieder, nach einem bestimmten allgemeinen Gesetze gebildet, nie abbrechen, muß man sich ebenfalls, wenn man sie sich in ihrer Ganzheit, um so zu sagen, vorstellen will, in der That als unendlich denken, und nennt sie daher auch eine unendliche Reihe, welches sich aber hier bloß theils auf das niemalige Abbrechen ihrer Glieder, theils auf das überall in ihr obwaltende Gesetz der Glieder bezieht, dessen allgemeinen analytischen Ausdruck man bekanntlich das allgemeine Glied (terminus generalis) der Reihe nennt. Etwas Aehnliches findet bei den Kettenbrüchen und bei Producten mit unendlich vielen Factoren statt, deren Glieder, ohne jemals abzubrechen, einem bestimmten allgemeinen Gesetze unterworfen sind.

22. Wir gehen nun zu der Erklärung der verschiedenen Ordnungen des Unendlichen, vorzüglich des unendlich Kleinen, über, welches von ganz besonderer Wichtigkeit ist. Ist nämlich i eine unendlich kleine oder unendlich große Größe, d. h. eine veränderliche Größe, welche entweder unbegränzt ab- oder zunimmt (7. 8.); so nennt man die Potenzen

$$i, i^2, i^3, i^4, i^5, \ldots.$$

im ersten Falle unendlich kleine, im zweiten unendlich große Größen der ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften Ordnung, u. s. f., welches auf der Vorstellung beruht, daß i^2 gewissermaßen unendlichmal kleiner oder größer als i, i^3 unendlichmal kleiner oder größer als i^2 ist, u. s. f.,

immer gleiche Grade der Ab- oder Zunahme von i vorausgesetzt.

Cauchy hat in den Exercices de Mathématiques. Livraison 6. p. 146. folgende allgemeine Definition unendlich kleiner Größen verschiedener Ordnungen, welche auch den Fall begreift, wo die Ordnungszahl keine ganze Zahl ist, gegeben.

Wenn a eine constante, rationale oder irrationale, nur positive Zahl, i eine unendlich kleine Größe, r eine veränderliche Zahl bezeichnet; so ist in dem System unendlich kleiner Größen, dessen Basis i ist, irgend eine Function f(i) von i eine unendlich kleine Größe der aten Ordnung, wenn die Gränze des Bruchs

$$\frac{f(i)}{i^r}$$

für jedes r, welches $<$ a, Null, für jedes r dagegen, welches $>$ a, ∞ ist.

Um den Sinn dieser Definition deutlicher zu machen, wollen wir zeigen, daß der obige eingeschränktere ältere Begriff unendlich kleiner Größen verschiedener Ordnungen unter derselben enthalten ist. Sey nämlich i eine unendlich kleine Größe; so heißt, wenn n eine ganze positive Zahl ist, i^n eine unendlich kleine Größe der nten Ordnung, und es ist also für diesen Fall $f(i) = i^n$, $a = n$. Sey nun zuerst $r < n$; so ist

$$\frac{f(i)}{i^r} = \frac{i^n}{i^r} = i^{n-r},$$

wo $n - r$ positiv ist, so daß sich also offenbar, wenn i sich der Gränze o nähert, auch $\frac{f(i)}{i^r}$ dieser Gränze nähert. Ist aber $r > n$, so ist

$$\frac{f(i)}{i^r} = \frac{i^n}{i^r} = \frac{1}{i^{r-n}} = \left(\frac{1}{i}\right)^{r-n},$$

wo $r - n$ positiv ist. Nähert sich nun i der Gränze o, so nähert sich $\frac{1}{i}$, also auch $\left(\frac{1}{i}\right)^{r-n}$, d. i. $\frac{f(i)}{i^r}$, der Gränze ∞, wie es seyn soll.

Für $r = n$ wird

$$\frac{f(i)}{i^r} = \frac{i^a}{i^a} = 1,$$

und erhält also einen endlichen bestimmten Werth. Ueberhaupt kann für $r = a$ der Bruch

$$\frac{f(i)}{i^r}$$

sich jeder beliebigen Gränze, welche endlich, o oder ∞ seyn kann, nähern.

Obige allgemeine Definition zum Grunde gelegt, kann man mehrere elegante Theoreme über die unendlich kleinen Größen beweisen, von denen wir folgende ausheben.

23. Man habe in einem beliebigen Systeme zwei unendlich kleine Größen verschiedener Ordnungen, so wird, während sich diese beiden Größen der o nähern, diejenige, deren Ordnungszahl am größten ist, immer endlich einmal beständig den kleinsten numerischen Werth haben.

Die Basis des Systems sey i, und $I = f(i)$, $I' = F(i)$ zwei unendlich kleine Größen, die erste von der Ordnung a, die zweite von der Ordnung b, so daß $a < b$. Legt man der veränderlichen Zahl r einen Werth bei, der zwischen a und b liegt, d. h. $> a$ und $< b$ ist; so sind die Gränzen der Brüche $\frac{I}{i^r}$ und $\frac{I'}{i^r}$ nach obiger Definition (22.) respective ∞ und o. Folglich ist die Gränze des Quotienten

$$\frac{I'}{i^r} : \frac{I}{i^r} = \frac{I'}{I},$$

wie leicht erhellet, Null. Also muß der numerische Werth des Zählers dieses Bruchs weit schneller abnehmen, als der numerische Werth des Nenners, und letzterer wird also endlich einmal erstern beständig übertreffen.

24. Bezeichnen a, b, c, ... in irgend einem Systeme die Ordnungszahlen der unendlich kleinen Größen I, I', I'', ..., so daß a die kleinste Ordnungszahl ist; so ist die Summe

$$I + I' + I'' + \ldots\ldots$$

eine unendlich kleine Größe der aten Ordnung.

Sey immer i die Basis des angenommenen Systems. Da die Gränze eines jeden der Brüche

$$\frac{I'}{I}, \frac{I''}{I}, \frac{I'''}{I}, \ldots\ldots$$

nach (23.) Null ist; so ist die Gränze des Bruchs

$$\frac{I + I' + I'' + \ldots\ldots}{I} = 1 + \frac{I'}{I} + \frac{I''}{I} + \ldots\ldots,$$

wie leicht erhellet, die Einheit. Also hat das Product

$$\left\{1 + \frac{I'}{I} + \frac{I''}{I} + \ldots\right\} \frac{I}{i^r} = \frac{I + I' + I'' + \ldots}{i^r}$$

mit $\frac{I}{i^r}$ einerlei Gränze. Da nun nach der Voraussetzung, weil I eine unendlich kleine Größe der aten Ordnung seyn soll, dieser Bruch für $r < a$ sich der Gränze o, für $r > a$ aber sich der Gränze ∞ nähert, so nähert sich auch

$$\frac{I + I' + I'' + \ldots\ldots}{i^r}$$

für $r < a$ der Gränze o, für $r > a$ der Gränze ∞, und die Summe

$$I + I' + I'' + \ldots\ldots$$

ist also eine unendlich kleine Größe der aten Ordnung (22.).

25. In irgend einem Systeme seyen wieder I und I' unendlich kleine Größen von der Ordnung a und b; so ist das Product II' eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a + b$.

Die Brüche

$$\frac{I}{i^r}, \frac{I'}{i^s}$$

nähern sich für $r < a$, $s < b$ der Gränze o, für $r > a$, $s > b$ dagegen der Gränze ∞. Also nähert sich offenbar auch das Product

$$\frac{I}{i^r} \cdot \frac{I'}{i^s} = \frac{II'}{i^{r+s}}$$

für $r < a$, $s < b$ der Gränze o, für $r > a$, $s > b$ der Gränze ∞. Setzt man nun überhaupt $r + s = \varrho$; so ist klar, daß, für $\varrho < a + b$, ϱ immer in zwei Theile $r + s$ zerlegt werden kann, so daß $r < a$, $s < b$, und eben so, daß, für $\varrho > a + b$, ϱ immer in zwei Theile $r + s$ zerlegt werden kann, so daß $r > a$, $s > b$ ist. Hieraus erhellet also, daß

$$\frac{II'}{i^\varrho}$$

für $\varrho < a + b$ sich der Gränze o, für $\varrho > a + b$ sich der Gränze ∞ nähert, und folglich II' eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a + b$ ist.

26. Durch mehrmalige Anwendung dieses Satzes zeigt man leicht, daß, wenn in irgend einem Systeme I, I', I'', I''', ... unendlich kleine Größen der aten, bten, cten, dten, ... Ordnung sind, das Product $II'I''I'''$.... immer eine unendlich kleine Größe von der Ordnung $a + b + c + d + \ldots$ ist.

Wäre ein Factor eine endliche Größe; so wäre offenbar deren Ordnungszahl $= 0$ zu setzen.

27. Sind drei unendlich kleine Größen so beschaffen, daß, für die erste als Basis, die zweite von der Ordnung a, für die zweite als Basis, die dritte von der Ordnung b ist; so ist, für die erste als Basis, die dritte von der Ordnung ab.

Die drei unendlich kleinen Größen seyen i, I, I', so daß also die Brüche

$$\frac{I}{i^r}, \frac{I'}{I^s}$$

für $r < a$, $s < b$ sich der Gränze o, für $r > a$, $s > b$ dagegen sich der Gränze ∞ nähern (22.); so wird offenbar auch das Product

$$\left(\frac{I}{i^r}\right)^s \cdot \frac{I'}{I^s} = \frac{I'}{i^{rs}}$$

für $r < a$, $s < b$ sich der Gränze o, für $r > a$, $s > b$ dagegen sich der Gränze ∞ nähern. Setzt man nun $rs = \varrho$, so ist klar, daß, jenachdem $\varrho <$ oder $>$ ab ist, ϱ immer in zwei Factoren r, s zerlegt werden kann, so daß im ersten Falle $r < a$, $s < b$, im andern $r > a$, $s > b$ ist, woraus also mittelst des Obigen folgt, daß

$$\frac{I'}{i^\varrho}$$

für $\varrho <$ ab sich der Gränze o, für $\varrho >$ ab dagegen sich der Gränze ∞ nähert, und folglich eine unendlich kleine Größe der Ordnung ab ist (22.).

28. Für die Basis i seyen die Ordnungszahlen der unendlich kleinen Größen I, I' in diesem Systeme a, a', für eine andere Basis i' dagegen α, α', und b sey Ord-

nungszahl von I' in Bezug auf die Basis I; so ist nach (27.) $a' = ab$, $\alpha' = \alpha b$. Also

$$\frac{a'}{a} = \frac{\alpha'}{\alpha} = b, \; a : a' = \alpha : \alpha',$$

so daß also das Verhältniß der Ordnungszahlen unendlich kleiner Größen für jede Basis ungeändert bleibt, oder constant ist. Ist $\alpha = a\lambda$, so ist auch $\alpha' = a'\lambda$, und die Ordnungszahlen unendlich kleiner Größen in Bezug auf eine bestimmte Basis, werden also, wenn die Basis geändert wird, alle in einem bestimmten Verhältnisse zu- oder abnehmen.

29. Setzt man in (27.) $I' = i$; so ist natürlich $ab = 1$, $b = \frac{1}{a}$. Ist also I von der Ordnung a für die Basis i; so ist i von der Ordnung $\frac{1}{a}$ für die Basis I. Wenn daher I, als Function von i, eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung ist; so ist auch i, als Function von I, eine unendlich kleine Größe der ersten Ordnung.

30. Seyen I, I' zwei unendlich kleine Größen von solcher Beschaffenheit, daß, wenn man die eine als Basis nimmt, die andere von der ersten Ordnung ist (29.); so wird die Ordnungszahl irgend einer Größe in den beiden Systemen, welche eine der beiden obigen unendlich kleinen Größen zur Basis haben, dieselbe bleiben. Sey nämlich I'' von der Ordnung a in Bezug auf I, von der Ordnung a', in Bezug auf I' als Basis; so ist, da I' in Bezug auf I von der ersten Ordnung ist, nach (27.) $a = a' . 1 = a'$.

31. Aus den bisherigen Sätzen lassen sich mehrere wichtige Sätze von Polynomien ableiten, unter denen wir folgende ausheben.

Das Polynnomium

$$ai^{n} + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots,$$

wo die Exponenten eine steigende Reihe bilden, wird, wenn i sich der Gränze o nähert, endlich einmal mit seinem ersten Gliede ai^{n} gleiches Zeichen behalten.

Denn

$$bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots \ldots$$

ist eine unendlich kleine Größe der n'ten Ordnung (24.), und wird daher, weil $n' > n$, immer einmal fortwährend einen kleinern numerischen Werth haben, als die unendlich kleine Größe ai^n der $n$ten Ordnung (23.), wo denn also auch das gegebene Polynomium mit seinem ersten Gliede ai^n immer einerlei Zeichen haben wird. Die Exponenten nehmen wir hier immer als positive ganze Zahlen an, obgleich sich diese Sätze auch noch erweitern lassen würden.

32. Ist in dem Polynom

$$ai^n + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots$$

der Exponent n' des zweiten Gliedes eine ungerade Zahl; so wird für sehr kleine i der Werth dieses Polynoms größer oder kleiner als der Werth seines ersten Gliedes seyn, jenachdem die veränderliche Größe i und der Coefficient b gleiche oder ungleiche Zeichen haben.

Denn für sehr kleine i hängt das Zeichen des Polynoms

$$bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots$$

von dem Gliede $bi^{n'}$ ab (31.), und ist also $+$ oder $-$, jenachdem i und b gleiche oder ungleiche Zeichen haben, unter welcher Bedingung also auch

$$ai^n + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots \gtrless ai^n$$

seyn wird. Immer wird angenommen, daß das Polynom nach steigenden Potenzen von i geordnet sey, welches offenbar immer möglich ist.

33. Ist in dem Polynom

$$ai^n + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots$$

der Exponent n' des zweiten Gliedes eine gerade Zahl; so ist für sehr kleine Werthe von i der Werth dieses Polynoms größer oder kleiner als der Werth seines ersten Gliedes, jenachdem der Coefficient b des zweiten Gliedes positiv oder negativ ist.

Denn für sehr kleine Werthe von i hängt das Zeichen von

$$bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots$$

bloß von $bi^{n'}$ ab (31.), und dieses Zeichen ist, weil $i^{n'}$ wegen des geraden Exponenten n' immer positiv bleib,

+ oder —, jenachdem b positiv oder negativ ist, unter welchen Bedingungen also auch

$$ai^n + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots \gtrless ai^n$$

ist.

34. Ist in dem Polynom

$$a + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots$$

n' eine gerade Zahl; so ist für sehr kleine Werthe von i, diese Größe mag positiv oder negativ seyn, immer

$$a < a + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots\ldots,$$

wenn b positiv ist, dagegen immer

$$a > a + bi^{n'} + ci^{n''} + di^{n'''} + \ldots\ldots,$$

wenn b negativ ist (33.). Ist also n' eine gerade Zahl; so ist der partikuläre Werth a des obigen Polynoms kleiner oder größer als alle benachbarte Werthe dieses Polynoms, d. h. ein Minimum oder Maximum, ein kleinster oder größter Werth desselben, jenachdem der Coefficient b des zweiten Gliedes positiv oder negativ ist, wobei nur wohl zu merken ist, daß der partikuläre Werth a nur ein Minimum oder Maximum in Bezug auf die benachbarten Werthe des Polynoms ist, welche man erhält, wenn dem i unendlich kleine Werthe beigelegt werden, d. h. diese veränderliche Größe in der Nähe ihrer Gränze o bleibt.

Ueberhaupt sind die obigen Sätze bei einer strengen Darstellung der Lehre von den Maximis und Minimis sehr wichtig, wobei wir aber hier nicht länger verweilen dürfen.

35. In Bezug auf die weitere Auseinandersetzung der Lehre von den unendlich großen Größen begnügen wir uns hier, wie auch Cauchy (Cours d'Analyse de l'école royale polyt. p. 33.) thut, bloß mit folgender allgemeinen Bemerkung. Bezeichnet nämlich f(i) eine unendlich kleine Größe einer bestimmten Ordnung, so kann jede unendlich große Größe derselben Ordnung durch $\frac{1}{f(i)}$ dargestellt werden, und es würden sich, hierauf gestützt, manche den obigen analogen Sätze über die unendlich großen Größen

entwickeln lassen, auch in Bezug auf Polynomien, wenn die unveränderliche Größe unbegränzt wächst. Ist z. B.

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + hx + k$$

ein nach den fallenden Potenzen von x geordnetes Polynom, wo auch einige Coefficienten = o seyn können; so wird, wenn wir x unbegränzt wachsen lassen, dieses Polynom endlich einmal immer einerlei Zeichen mit seinem höchsten Gliede ax^n behalten. Denn man setze $x = \frac{1}{i}$, wo i unbegränzt abnimmt, so wird obiges Polynom

$$= a\frac{1}{i^n} + b\frac{1}{i^{n-1}} + c\frac{1}{i^{n-2}} + \ldots + h\frac{1}{i} + k$$

$$= \frac{a}{i^n}\left(1 + \frac{b}{a}i + \frac{c}{a}i^2 + \ldots + \frac{h}{a}i^{n-1} + \frac{k}{a}i^n\right).$$

Da nun für sehr kleine i der Factor

$$1 + \frac{b}{a}i + \frac{c}{a}i^2 + \ldots + \frac{h}{a}i^{n-1} + \frac{k}{a}i^n$$

immer mit dem ersten Gliede 1 einerlei Zeichen behält (31.), d. i. positiv bleibt; so wird für sehr kleine i, oder sehr große x, obiges Product, d. i. das gegebene Polynom, mit dem Factor $\frac{a}{i^n} = a\left(\frac{1}{i}\right)^n = ax^n$, oder dem ersten Gliede des gegebenen Polynoms, immer einerlei Zeichen behalten.

Ganz auf ähnliche Weise lassen sich auch andere Sätze von den unendlich großen Größen auf die Lehre von den unendlich kleinen Größen zurückführen.

36. Noch haben wir den bei den ältern Infinitesimalisten, namentlich bei Leibnitz, welcher ihn zuerst gebraucht und in die Mathematik eingeführt hat, durchgängig vorkommenden Satz, wenn ich diese Benennung gebrauchen darf: „daß eine unendlich kleine Größe gegen eine endliche, eine unendlich kleine Größe einer höhern Ordnung gegen eine unendlich kleine Größe einer niedrigern Ordnung verschwinde" aufzuklären und zu erläutern, wozu einige aus den Gründen der Differentialrechnung hergenommene Beispiele am geeignetsten zu seyn scheinen. Zuerst bemerken wir über den Begriff des Differentialquotienten Folgendes.

37. Wenn die veränderliche Größe x einer Function $y = f(x)$ eine beliebige Aenderung Δx erleidet, so geht y in $y' = f(x + \Delta x)$ über, und der Unterschied $y' - y = f(x + \Delta x) - f(x)$ wird bekanntlich die Differenz von y genannt, und durch Δy bezeichnet, so daß also

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

und der Differenzenquotient, der Exponent des Verhältnisses $\Delta x : \Delta y$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ist. Setzt man nun $\Delta x = i$, d. h. läßt man Δx sich der Gränze o unbegränzt nähern, welches offenbar immer möglich ist; so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i};$$

wo sowohl der Zähler als der Nenner dieses Bruchs unendlich kleine Größen sind, d. h. beide sich der o unbegränzt nähern. Dessen ungeachtet kann aber obiges Verhältniß selbst sich einer bestimmten endlichen, von o verschiedenen, Größe nähern, wie sich durch Beispiele leicht zeigen läßt. Ist z. B. $f(x) = x^n$; so ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} i$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} i^2 + \ldots$$

und das Verhältniß $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nähert sich also in diesem Falle, wenn i sich der o nähert, der Gränze nx^{n-1}, einer bestimmten endlichen, von o verschiedenen, Größe. Die Gränze nun, welcher sich $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nähert, wenn $\Delta x = i$ sich der o nähert, heißt in der Functionentheorie die derivirte Function von $y = f(x)$, weil ihre Form offenbar von der Form der Function y in jedem besondern Falle abhängig ist, und wird durch $f'(x)$ bezeichnet. Nach den gewöhnlichen Begriffen der, auf die Lehre von Gränzen gegründeten, Differentialrechnung heißt die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Differentialquotient von y, und

wird durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet, welches aber hier nicht als ein getrenntes, sondern als ein einfaches Zeichen zu betrachten ist. Es ist aber immer

$$f'(x) = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Setzt man $i = \alpha \Delta x$, wo, indem Δx eine endliche bestimmte Größe bezeichnet, α sich der Gränze o unbegränzt nähert; so wird

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha\Delta x) - f(x)}{\alpha\Delta x},$$

$$\frac{f(x+\alpha\Delta x) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}\Delta x,$$

und die Gränze, welcher der erste Bruch sich nähert, wenn α sich der o unbegränzt nähert, heißt das Differential von $y = f(x)$, und wird durch ∂y bezeichnet. Nimmt man nun, Δx als eine beständige endliche Größe betrachtend, auf beiden Seiten obiger Gleichung die Gränzen; so erhält man mittelst obiger Bezeichnungen augenblicklich

$$\partial y = \partial f(x) = f'(x).\Delta x = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x,$$

oder, wenn man $\Delta x = \partial x$ setzt, immer aber wohl bemerkt, daß ∂x eine endliche bestimmte Größe, und $\frac{\partial y}{\partial x}$ ein einfaches Zeichen ist, welches nicht getrennt werden darf:

$$\partial y = \partial f(x) = f'(x).\partial x = \frac{\partial y}{\partial x}\partial x.$$

38. Sey nun z. B. der Differentialquotient des Products pq zweier Functionen p und q zu bestimmen; so hat man

$$\Delta.pq = (p+\Delta p)(q+\Delta q) - pq = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p.\Delta q$$

$$\frac{\Delta.pq}{\Delta x} = p\frac{\Delta q}{\Delta x} + q\frac{\Delta p}{\Delta x} + \Delta p.\frac{\Delta q}{\Delta x},$$

oder, wenn man Δx unendlich klein setzt, d. h. der Gränze o sich unbegränzt nähern läßt:

$$\frac{\Delta.pq}{i} = p\frac{\Delta q}{i} + q\frac{\Delta p}{i} + \Delta p\frac{\Delta q}{i}.$$

Nimmt man nun, um den Differentialquotienten zu finden, auf beiden Seiten die Gränzen; so ist nach dem Obigen

$$\text{Lim.}\ \frac{\Delta . pq}{i} = \frac{\partial . pq}{\partial x},$$

$$\text{Lim.}\ p\frac{\Delta q}{i} = p\ \text{Lim.}\ \frac{\Delta q}{i} = p\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\text{Lim.}\ q\frac{\Delta p}{i} = q\ \text{Lim.}\ \frac{\Delta p}{i} = q\frac{\partial p}{\partial x},$$

wo zu bemerken, daß p, q endliche Größen sind, die von der Veränderung $\Delta x = i$ jetzt nicht mehr afficirt werden, und daher als constant zu betrachten sind. Da sich nun $\frac{\Delta q}{i}$ zwar der endlichen Gränze $\frac{\partial q}{\partial x}$, Δp selbst aber mit i sich unbegränzt der Gränze o nähert; so nähert sich auch das letzte Glied $\Delta p\,\frac{\Delta q}{i}$ selbst unbegränzt der Gränze o, und es ist also

$$\text{Lim.}\ \frac{\Delta . pq}{i} = p\ \text{Lim.}\ \frac{\Delta q}{i} + q\ \text{Lim.}\ \frac{\Delta p}{i},$$

d. i.

$$\frac{\partial . pq}{\partial x} = p\frac{\partial q}{\partial x} + q\frac{\partial p}{\partial x};$$

und hieraus folgt nach dem Obigen unmittelbar:

$$\frac{\partial . pq}{\partial x}\partial x = p\frac{\partial q}{\partial x}\partial x + q\frac{\partial p}{\partial x}\partial x,$$

$$\partial . pq = p\partial q + q\partial p$$

39. In der ältern Infinitesimalrechnung würden diese Schlüsse auf folgende Weise abgekürzt worden seyn. Das Glied $\Delta p\,\frac{\Delta q}{i}$ ist eine unendlich kleine Größe, und kann daher gegen die übrigen endlichen Glieder weggelassen, = o gesetzt werden. Der wahre Sinn hiervon ist kein anderer als folgender: wenn i sich der Gränze o unbegränzt nähert, nähert obiges Glied sich ebenfalls dieser Gränze, und braucht also bei Bestimmung der endlichen Gränze von $\frac{\Delta . pq}{i}$ nicht berücksichtigt zu werden, sondern es kann, wenn es bloß auf die Bestimmung dieser Gränze ankommt, weggelassen, und in dieser Beziehung bloß

$$\frac{\Delta . pq}{i} = p\frac{\Delta q}{i} + q\frac{\Delta p}{i}$$

gesetzt werden, woraus man, wenn die Gränzen auf beiden Seiten genommen werden, ganz richtig wie vorher

$$\frac{\partial.pq}{\partial x} = p\,\frac{\partial q}{\partial x} + q\,\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\partial.pq = p\partial q + q\partial p$$

erhält.

40. In der That ist aber die eigentliche Sprache der Infinitesimalisten noch ungenauer, als die, welche wir so eben geführt haben. Aendert sich x um Δx, so wird, wie oben,

$$\Delta.pq = p\Delta q + q\Delta p + \Delta p.\Delta q.$$

Setzt man nun Δx unendlich klein, so gehen, da die Differentiale als unendlich kleine Differenzen betrachtet werden, die obigen Differenzen in die Differentiale über, und die Gleichung verwandelt sich in:

$$\partial.pq = p\partial q + q\partial p + \partial p.\partial q,$$

wo $p\partial q$, $q\partial p$ unendlich kleine Größen erster Ordnung sind, $\partial p.\partial q$ aber eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung ist, welche gegen jene vernächlässigt, = o gesetzt werden kann. Dies giebt

$$\partial.pq = p\partial q + q\partial p.$$

Daß diese Sprache, wenn sie auch zu einem richtigen Resultate führt, einer eignen Interpretation bedürfe, die in den beiden vorhergehenden Nummern vollständig gegeben ist, wird gewiß Niemand in Abrede stellen. Daß aber jede Sprache, welche nicht völliges Licht über die Sache verbreitet, aus der Mathematik zu verbannen sey, scheint eben so gewiß zu seyn, und ich kann wenigstens den Mathematikern nicht beipflichten, welche in neuerer Zeit dieser Sprache wieder das Wort geredet haben, obgleich auf der andern Seite allerdings die z. B. von Carnot und v. Busse gemachten Versuche, eben diese an sich gewiß unrichtige Sprache aufzuklären, und zu zeigen, wie man dennoch dadurch zu so vielen richtigen Resultaten, welche auf die ganze Wissenschaft einen so bedeutenden Einfluß gehabt haben, gelangen konnte, in vieler Rücksicht wichtig und interessant sind, und den Scharfsinn ihrer Verfasser beurkunden. Durch die Methode der Gränzen wird Alles deutlich und klar, und hat man derselben auch nicht mit Unrecht den Vorwurf gemacht, daß sie oft zu großer Weitläufigkeit führe, tritt uns dieselbe auch in der That in dem ersten und wichtigsten

Werke, worin sie ausführlich behandelt ist, der Expositio elementaris principiorum calculi differentialis et int. Tub. 1795.) von L'Huilier, nicht immer auf die ansprechendste Weise entgegen; so ist der Weg, auf dem sie uns führt, doch auch in neuerer Zeit bedeutend geebnet worden, in welcher Beziehung Cauchy's schon oben angeführtes Werk: Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal. Paris. 1823. unzweideutige Verdienste zu haben scheint. Weitere Auseinandersetzungen über diesen Gegenstand, auch in Bezug auf die Functionen, Theorie von Lagrange, und ihr Verhältniß zu der Methode der Gränzen, wobei es uns vorzüglich auf eine Trennung zwischen dem rein analytischen Theile der Differentialrechnung, und ihren vielfältigen Anwendungen aller Art, besonders auf Geometrie und Mechanik, anzukommen scheint, gehören jetzt nicht hierher.

41. Wäre das Differential des Quotienten $\frac{p}{q}$ zu bestimmen; so schließt man nach der Infinitesimalmethode auf folgende Art. Wenn sich p, q um die unendlich kleinen Differenzen ∂p, ∂q ändern; so wird die unendlich kleine Differenz von $\frac{p}{q}$, d. i.

$$\partial . \frac{p}{q} = \frac{p+\partial p}{q+\partial q} - \frac{p}{q} = \frac{q(p+\partial p) - p(q+\partial q)}{q\,(q+\partial q)} = \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2 + q\partial q}.$$

Da nun $q\partial q$ gegen q^2 unendlich klein ist; so kann man es gegen q^2 weglassen, und erhält

$$\partial . \frac{p}{q} = \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2}.$$

Hier läßt sich fragen, warum läßt man nicht auch im Zähler die unendlich kleinen Größen $q\partial p$, $p\partial q$ weg, da man doch berechtigt ist, im Nenner sie wegzulassen? Thäte man dies, so erhielte man allgemein $\partial . \frac{p}{q} = \frac{0}{q^2} = 0$. Gewöhnlich (s. z. B. L'Hopital Analyse des infiniment petits. Paris. 1694. p. 5.) wird diese Schwierigkeit dadurch umgangen, daß man $\frac{p}{q} = z$, $p = qz$ setzt, woraus, nach dem Satze für das Differential des Products, $\partial p = q\partial z + z\partial q$, also

$$\partial z = \frac{\partial p - z\partial q}{q} = \frac{\partial p - \frac{p}{q}\partial q}{q}, \text{ d. i. } \partial . \frac{p}{q} = \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2};$$

wie oben.

Der wahre Sinn obiger Schlußart ist folgender. Verändert sich x um Δx; so wird

$$\Delta . \frac{p}{q} = \frac{p + \Delta p}{q + \Delta q} - \frac{p}{q} = \frac{q\Delta p - p\Delta q}{q(q + \Delta q)},$$

oder für $\frac{p}{q} = P$:

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{q\frac{\Delta p}{\Delta x} - p\frac{\Delta q}{\Delta x}}{q(q + \Delta q)},$$

und, unter der Voraussetzung, daß Δx unendlich klein wird, d. h. der o sich unbegränzt nähert:

$$\frac{\Delta P}{i} = \frac{q\frac{\Delta p}{i} - p\frac{\Delta q}{i}}{q(q + \Delta q)}.$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten die Gränzen, so nähern sich $\frac{\Delta p}{i}$, $\frac{\Delta q}{i}$ den endlichen bestimmten Gränzen $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$, dagegen Δq der Gränze o, $q + \Delta q$ der Gränze q, so daß also

$$\text{Lim.} \frac{\Delta P}{i} = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{q\frac{\partial p}{\partial x} - p\frac{\partial q}{\partial x}}{q^2},$$

und, mit ∂x multiplicirt (37.):

$$\partial P = \frac{q\partial p - p\partial q}{q^2}.$$

Also darf man $\frac{\Delta p}{i}$, $\frac{\Delta q}{i}$ nicht weglassen, weil sie sich den endlichen, im Allgemeinen von o verschiedenen, Gränzen $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$ nähern, Δq kann aber bei Bestimmung der Gränzen vernachlässigt werden, weil es sich der Gränze o nähert, und man kann in dieser Beziehung bloß

$$\frac{\Delta P}{i} = \frac{q\frac{\Delta p}{i} - p\frac{\Delta q}{i}}{q^2}$$

setzen, woraus dieselben Gränzen oder Differentialquotienten, wie vorher, folgen.

42. Soll die Berührende für irgend eine Curve, deren Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ ist, bestimmt werden, so schließt man in der Infinatisimalrechnung auf folgende Weise. In der Nähe des Berührungspunktes fällt die Berührende mit der Curve zusammen. Läßt man nun die Abscisse x um die unendlich kleine Größe ∂x sich verändern, so verändert sich die Ordinate y um das unendlich kleine ∂y, und man erhält leicht folgende Proportion:

$$\text{Subtang} : y = \partial x : \partial y$$

aus der Aehnlichkeit der Dreiecke. Dies giebt

$$\text{Subtang} = \frac{y \partial x}{\partial y}.$$

Nicht viel weitläufiger ist der Beweis nach der Methode der Gränzen. Man lasse sich x um Δx verändern, so ändert sich y um Δy, und, wenn v die Entfernung des Durchschnittspunktes der durch die Endpunkte der Ordinaten y und $y + \Delta y$ gehenden Sehne mit der Abscissenaxe von der Ordinate bezeichnet; so hat man augenblicklich

$$v : y = \Delta x : \Delta y, \quad v = \frac{y \Delta x}{\Delta y},$$

oder, wenn Δx sich der 0 unbegränzt nähert,

$$v = \frac{y}{\frac{\Delta y}{1}}.$$

Dann nähert sich aber die Sehne der Berührenden, v nähert sich der Subtangente, und $\frac{\Delta y}{1}$ der Gränze $\frac{\partial y}{\partial x}$. Also, wenn man die Gränzen nimmt:

$$\text{Subtang} = \frac{y}{\frac{\partial y}{\partial x}},$$

welches man abgekürzt gewöhnlich $\text{Subtang} = \frac{y \partial x}{\partial y}$ schreibt. Noch kürzer schließt man so. Bezeichnet φ den Neigungswinkel obiger Sehne, α den Neigungswinkel der Berührenden gegen die Abscissenaxe; so erhält man augenblicklich

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{1}.$$

Wenn Δx sich der 0 nähert, nähert sich die Sehne der Berührenden, φ dem Winkel α, so daß also, wenn man die Gränzen nimmt,

$$\tang \alpha = \frac{\partial y}{\partial x},$$

woraus ferner unmittelbar obiger Ausdruck für die Subtangente folgt.

Endlich kann man auch so schließen. Die Gleichung der mehrgenannten Sehne sey

$$Y = aX + b;$$

so hat man, wenn x, y die Coordinaten des Berührungspunktes sind:

$$y = ax + b,$$

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b,$$

woraus durch Elimination

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x},\ b = y - x\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

und folglich, zugleich unter der Voraussetzung, daß Δx sich der Gränze o nähert:

$$Y = \frac{\Delta y}{i} X + y - x\frac{\Delta y}{i}.$$

Dann nähert sich aber die Sehne der Berührenden, folglich auch die constanten Größen in der Gleichung der Sehne den constanten Größen in der Gleichung der Berührenden, und letztere wird aus ersterer erhalten, wenn man die Gränzen der constanten (von X, Y unabhängigen) Größen nimmt. Dies giebt als Gleichung der Berührenden:

$$Y = X\frac{\partial y}{\partial x} + y - x\frac{\partial y}{\partial x},$$

welches man gewöhnlich so schreibt:

$$Y = X\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y\partial x - x\partial y}{\partial x},$$

wo dann auch ∂x, ∂y die Differentiale selbst (37.) bezeichnen können.

43. Diese einfachen Beispiele mögen hinreichen, den eigentlichen Sinn der Ausdrücke der Infinitesimalrechnung zu zeigen. Sie lassen sich in allen Fällen auf die strenge Betrachtung der Gränzen zurückführen. Außer den mehrmals genannten neuern Abhandlungen von Cauchy, und den meisten ältern Werken über höhere Analysis, suche man weitere Belehrung in folgenden Schriften:

Euleri Inst. calc. diff. Tom. I. Cap. III.

Anfangsgründe der höhern Analysis von Tempelhoff. Thl. I. Berlin. 1770. Fünfter Abschnitt.

Kästners Analysis unendlicher Größen.

Dessen Abhandlungen de vera infiniti notione und de lege continui in natura in seinen Dissertationes mathematicae et physicae. Altenburgi. 1771. p. 35. p. 142.

Ej. Progr. inaug. de cautione in neglectu quantitatum infinite parvarum observanda. Lips. 1746.

Karstens Abhandlung vom Mathematisch-Unendlichen, mit Rücksicht auf eine im Jahre 1784 aufgegebene Preisfrage (vergl. Thl. I. S. 816. dieses Wörterbuchs) in seinen Mathematischen Abhandlungen. Halle. 1786. S. 1., und dessen übrige bekannte Schriften.

Exposition élémentaire des principes des calculs superieurs par L'Huilier. Berlin. 1786.

Dessen Principiorum calc. diff. et int. expositio elementaris. Tub. 1795. Cap. IX. De infinito (quod vocant) mathematico.

Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung von Carnot. Uebers. von Hauff. Frankfurt. 1800.

v. Busse: Bündige und reine Darstellung des wahrhaften Infinitesimal-Calculs. Thl. I. Dresden. 1825.

Krafftii Dissertatio de infinito mathematico.

Ein Aufsatz von Raymond in den Mém. de la Soc. acad. de Savoie. T. II. p. 170., vorzüglich über die geometrische Bedeutung des Symbols des Unendlichen. S. auch Bulletin. univ. des sciences. Mathém. 1827. N. 10. p. 225.

E. Halley: Account of the several species of infinite quantity, and of the proportions they bear one to the other. Philos. Transact. 1692. p. 556.

François Achard: Reflexions sur l'infini mathématique. Mém. de Berlin. 1745. p. 88. 143.

Gerdil: De l'infini absolu consideré dans la grandeur. Miscell. Soc. Taurinensis. T. II. p. 1.

Euler: De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum. Acta Petrop. 1778. P. I. p. 102.

Martin: Mémoire sur la maniere de demontrer, par les methodes des anciens, les hypotheses de Leibnitz dans le calcul differentiel. Mém. de Toulouse. T. I. p. 43.

Ej. Mémoire contenant l'application des principes tirés de la Méthode des limites aux diverses parties du calcul de l'infini. Mém. de Toulouse. T. III. p. 29.

Unendliche Reihen (Series infinitae) sind solche, deren Glieder nach einem bestimmten, allen gemeinschaftlichen, Gesetze in's Unendliche fortlaufen, ohne jemals abzubrechen. Ueber ihre verschiedenen Formen, Summirung, Umkehrung und Umformung s. m. die Artikel Reihe, summirbare Reihe, Summirung der Reihen, Umkehrung der Reihen, Umformung der Reihen. Auch vergl. man Unendlich (22.) An diesen Orten findet man auch die nöthigen historischen und literarischen Notizen in hinreichender Ausführlichkeit.

Unendlicher Kettenbruch ist ein solcher, dessen Glieder nach einem bestimmten allgemeinen Gesetze, ohne jemals abzubrechen, in's Unendliche fortlaufen. Beispiele finden sich im Art. Kettenbruch (39. ff.), so wie Logarithmus (164. ff.), und Quadratur (58. ff.) mehrere.

Unermeßlich, s. Incommensurabel.

Ungerade Zahl (numerus impar) ist jede ganze Zahl von der Form $2n - 1$ oder $2n + 1$. Die Zahl $2n - 1$ ist die nte ungerade Zahl in der Reihe 1, 3, 5, 7, 9, ... derselben, $2n + 1$ dagegen die $(n+1)$te. Da $(2n+1) + 2r = 2(n+r) + 1$, $(2n+1) - 2r = 2(n-r) + 1$, $(2n+1) + (2r+1) = 2(n+r+1)$,

$(2n + 1) - (2r + 1) = 2(n - r)$, $(2n + 1).2r = 2.r(2n + 1)$, $(2n + 1)(2r + 1) = 2(2nr + n + r) + 1$ ist; so ist die Summe und Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade, zweier ungeraden Zahlen gerade, das Product einer geraden und ungeraden Zahl gerade, zweier ungeraden Zahlen ungerade.

Ungerad = ungerade Zahl (numerus impariter impar, doppelt ungerade Zahl) ist eine Zahl, welche sich durch eine ungerade Zahl ohne Rest dividiren läßt, und zum Quotienten eine ungerade Zahl giebt; also jede Zahl von der Form $(2n + 1).(2m + 1) = 4mn + 2(m + n) + 1$.

Gerad = ungerade Zahl (numerus impariter impar) dagegen ist eine Zahl, welche durch eine gerade Zahl theilbar ist, und zum Quotienten eine ungerade Zahl giebt; also alle Zahlen von der Form $2n(2m + 1)$.

Ungereimt, s. Absurd.

Ungeschickte Vierung, s. Trapezium.

Ungleich ist, was in Ansehung der Größe nicht für einander gesetzt werden darf.

1. Sind a und b zwei ungleiche Größen; so ist

$$a > b \text{ oder } b < a,$$

wenn die Differenz $a - b$ positiv ist.

Diese von Cauchy (Cours d'Analyse de l'école royale polytechnique. Paris. 1821. p. 438.) herrührende Erklärung gilt für positive und negative Größen. Läßt man eine positive Größe nach und nach abnehmen, so wird sie endlich $= 0$, und dann, wenn sie abzunehmen fortfährt, negativ, welches zu dem Ausdrucke: eine negative Größe sey kleiner als Null, Veranlassung gegeben hat. Auch ist $-\alpha < -\beta$, wenn $\alpha > \beta$ ist, indem, für $\alpha = \beta + \delta$, $-\alpha = -\beta - \delta$ ist, und demnach aus $-\beta$ entsteht, wenn davon δ abgezogen wird. Alle diese Fälle sind, wie man leicht sehen wird, unter obiger

Erklärung, aus der wir nun einige Sätze ableiten wollen, enthalten.

2. Wenn

$$a > b,\ a' > b',\ a'' > b'',\ a''' > b''', \ldots$$

ist; so ist auch

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots > b + b' + b'' + b''' + \ldots$$

Denn die Differenzen

$$a - b,\ a' - b',\ a'' - b'',\ a''' - b''', \ldots$$

sind positiv; folglich offenbar auch deren Summe

$$(a-b) + (a'-b') + (a''-b'') + (a'''-b''') + \ldots$$
$$= a + a' + a'' + a''' + \ldots - (b + b' + b'' + b''' + \ldots).$$

3. Ist nun

$$\alpha = \beta,\ \alpha' = \beta',\ \alpha'' = \beta'',\ \alpha''' = \beta''', \ldots;$$

so sind die Differenzen

$$\alpha - \beta,\ \alpha' - \beta',\ \alpha'' - \beta'',\ \alpha''' - \beta''', \ldots$$

alle $= 0$, und folglich offenbar auch

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots + \alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \ldots$$
$$> b + b' + b'' + b''' + \ldots + \beta + \beta' + \beta'' + \beta''' + \ldots$$

4. Wenn $a > b$, $a' > b'$ ist; so ist

$$a - b' > b - a'.$$

Denn es ist

$$a > b,\ a' > b',\ -a' - b' = -a' - b'.$$

Also (3.):

$$a + a' - a' - b' > b + b' - a' - b',$$

d. i.

$$a - b' > b - a'.$$

5. Wenn alle Größen positiv sind, und

$$a > b,\ a' > b',\ a'' > b'',\ a''' > b''', \ldots$$

ist; so ist auch

$$a\,a'\,a''\,a''' \ldots > b\,b'\,b''\,b''' \ldots$$

Die Differenzen

$$a - b,\ a' - b',\ a'' - b'',\ a''' - b''', \ldots$$

sind nach der Voraussetzung positiv; folglich sind auch, da alle Größen positiv seyn sollen, in Bezug auf fünf Größen z. B., alle folgenden Producte positiv:

$$(a - b)\,a'\,a''\,a'''\,a'''' = a\,a'\,a''\,a'''\,a'''' - b\,a'\,a''\,a'''\,a'''',$$
$$(a' - b')\,b\,a''\,a'''\,a'''' = b\,a'\,a''\,a'''\,a'''' - b\,b'\,a''\,a'''\,a'''',$$

$$(a'' - b'')\, b\, b'\, a'''\, a'''' = b\, b'\, a''\, a'''\, a'''' - b\, b'\, b''\, a'''\, a'''',$$
$$(a''' - b''')\, b\, b'\, b''\, a'''' = b\, b'\, b''\, a'''\, a'''' - b\, b'\, b''\, b'''\, a'''',$$
$$(a'''' - b'''')\, b\, b'\, b''\, b''' = b\, b'\, b''\, b'''\, a'''' - b\, b'\, b''\, b'''\, b''''.$$

Die Summe dieser positiven Größen, nämlich

$$a\, a'\, a''\, a'''\, a'''' - b\, b'\, b''\, b'''\, b'''',$$

ist also auch positiv, und demnach (1.):

$$a\, a'\, a''\, a'''\, a'''' > b\, b'\, b''\, b'''\, b''''.$$

Daß dieser Satz nur dann allgemein gilt, wenn alle Größen positiv sind, fällt leicht in die Augen, indem z. B. $-6 < 2$, $-5 < 3$; aber $-6 . -5 = 30$, $> 2 . 3 = 6$ ist.

6. Sey $a > b$; so ist $ra > rb$, wenn r positiv, dagegen $ra < rb$, wenn r negativ ist.

Denn $a - b$ ist positiv, und folglich

$$r(a - b) = ra - rb$$

positiv oder negativ, d. i. $ra >$ oder $< rb$, jenachdem r positiv oder negativ ist. a und b können hier positiv und negativ seyn.

7. Wenn alle Größen positiv sind, und $a > b$, $a' > b'$ ist; so ist immer

$$\frac{a}{b'} > \frac{b}{a'}.$$

Denn $aa' > bb'$ (5.), $a'b' = a'b'$; also offenbar

$$\frac{a\,a'}{a'\,b'} > \frac{b\,b'}{a'\,b'}, \text{ d. i. } \frac{a}{b'} > \frac{b}{a'}.$$

8. Wenn a, b positiv sind, und $a > b$ ist, so ist $a^\alpha >$ oder $< b^\alpha$, jenachdem α positiv oder negativ ist.

Da nämlich a, b positiv sind; so ist $\frac{a}{b} > 1$, weil $a > b$; folglich offenbar der Bruch

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$$

$>$ oder < 1, d. i. $a^\alpha >$ oder $< b^\alpha$, jenachdem α positiv oder negativ ist. Uebrigens kann α eine ganze oder gebrochene Zahl seyn, und der Satz gilt also auch für Wurzelgrößen.

9. Ist a positiv, und $\alpha > \gamma$; so ist $a^\alpha >$ oder $< a^\gamma$,

jenachdem a $>$ oder $<$ 1 ist, α und γ mögen positiv oder negativ seyn.

Da $\alpha - \gamma$ positiv ist; so ist offenbar

$$\frac{a^\alpha}{a^\gamma} = a^{\alpha - \gamma}$$

$>$ oder $<$ 1, d. i. $a^\alpha >$ oder $< a^\gamma$, jenachdem a $>$ oder $<$ 1 ist.

10. Bezeichnet man die Logarithmen in dem Systeme, dessen Grundzahl b ist, durch log, und a, a' sind zwei positive Zahlen, so daß a $>$ a' ist; so ist log a $>$ oder $<$ log a', jenachdem b $>$ oder $<$ 1 ist.

Denn es ist

$$a = b^{\log a},\ a' = b^{\log a'},\ \frac{a}{a'} = b^{\log a - \log a'}.$$

Aber nach der Voraussetzung $\frac{a}{a'} > 1$; also auch

$$b^{\log a - \log a'} > 1,$$

und folglich offenbar $\log a - \log a'$ positiv oder negativ, d. i. log a $>$ oder $<$ log a', jenachdem b $>$ oder $<$ 1 ist.

Die Basis der natürlichen Logarithmen (Logarithmus. 30.) ist =

$$e = 2{,}718281828 \ldots,$$

also $>$ 1, und folglich immer

$$\text{lognat}\, a > \text{lognat}\, a',$$

unter der Voraussetzung, daß a $>$ a' ist.

11. Es ist immer

$$a^2 + b^2 > 2ab.$$

Denn $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$, also immer positiv.

Folglich ist auch immer

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab,\ (a + b)^2 > 4ab.$$

12. Sey

$$A = a + b + c + d + e \ldots$$

die Summe von n Größen, und B die Summe ihrer Binionen; so ist immer $(n - 1) A^2 > 2nB$. Denn es ist (11.):

$$a^2+b^2>2ab,\ a^2+c^2>2ac,\ a^2+d^2>2ad,\ a^2+e^2>2ae,\ldots;$$
$$b^2+c^2>2bc,\ b^2+d^2>2bd,\ b^2+e^2>2be,\ldots;$$
$$c^2+d^2>2cd,\ c^2+e^2>2ce,\ldots;$$
$$d^2+e^2>2de,\ldots;$$
u. s. f. u. s. f.

Setzt man nun die Summe der Quadrate $= Q$, und addirt auf beiden Seiten der Zeichen $>$; so erhält man auf der linken Seite offenbar jedes Quadrat $n-1$ Mal, und auf der rechten jede Binion 2 Mal. Also ist (2.):

$$(n-1)\,Q > 2B.$$

Aber $A^2 = Q + 2B$, $(n-1)\,A^2 = (n-1)\,Q + 2\,(n-1)\,B$. Folglich

$$(n-1)\,A^2 + (n-1)\,Q > (n-1)\,Q + 2\,(n-1)\,B + 2B,$$

d. i. $(n-1)\,A^2 > 2nB$, w. z. b. w.

13. Sind a und b willkührliche, nur positive, Größen, und n eine positive ganze Zahl; so ist immer

$$na^n + b^n > a^n + na^{n-1}\,b.$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist

$$= na^n + b^n - a^n - na^{n-1}\,b$$
$$= na^{n-1}\,(a-b) - (a^n - b^n)$$
$$= (a-b)\left\{na^{n-1} - a^{n-1} - a^{n-2}\,b - \ldots - ab^{n-2} - b^{n-1}\right\}.$$

Ist nun $a > b$; so ist offenbar

$$na^{n-1} > a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1},$$

und eben so, wenn $a < b$ ist:

$$na^{n-1} < a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}.$$

Folglich sind die beiden Factoren obigen Products immer zugleich positiv und negativ, die Differenz also immer positiv, und demnach immer

$$na^n + b^n > a^n + na^{n-1}\,b.$$

14. Ist $b < a$; so folgt hieraus leicht:

$$na^n - na^{n-1}\,b > a^n - b^n,$$
$$na^n\left(1-\frac{b}{a}\right) > a^n\left(1-\frac{b^n}{a^n}\right),$$
$$n\left(1-\frac{b}{a}\right) > 1-\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

welches also immer statt findet, wenn $\frac{b}{a}$ ein echter Bruch ist.

15. Wenn a, a', a'',.... willkührliche Größen sind, an der Zahl n; so ist immer der absolute Werth der Summe

$$a + a' + a'' + \ldots$$

kleiner als das Product

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)},$$

vorausgesetzt, daß die Größen a, a', a'',.... nicht alle unter einander gleich sind.

Denn es ist offenbar

$$\begin{array}{l} (a + a' + a'' + a''' + \ldots)^2 \\ + (a-a')^2 + (a-a'')^2 + (a-a''')^2 + (a-a'''')^2 + \ldots \\ \quad + (a'-a'')^2 + (a'-a''')^2 + (a'-a'''')^2 + \ldots \\ \quad\quad + (a''-a''')^2 + (a''-a'''')^2 + \ldots \\ \quad\quad\quad + (a'''-a'''')^2 + \ldots \\ \quad\quad\quad\quad \ldots\ldots \\ = n(a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots), \end{array}$$

und demnach, wenn die Differenzen a—a', a—a'', a—a''', u. s. f. nicht alle = o, d. i. die gegebenen Größen nicht alle einander gleich sind, weil ein Quadrat immer positiv ist, offenbar:

$$(a + a' + a'' + \ldots)^2 < n(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots),$$

$$a + a' + a'' + \ldots < \sqrt{n} . \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)},$$

wo es aber natürlich bloß auf den absoluten Werth der Summe a + a' + a'' + ... ankommt.

16. Durch Division mit n erhält man hieraus unmittelbar:

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{n} < \sqrt{\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{n}},$$

so daß also das arithmetische Mittel zwischen a, a', a'',... immer kleiner als diese Quadratwurzel ist.

17. Sind die gegebenen Größen alle einander gleich; so folgt aus (15.) unmittelbar, daß

$$a + a' + a'' + \ldots = \sqrt{n} . \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)} = na,$$

immer bloß in Bezug auf den absoluten Werth der Summe.

18. Wenn a, a', a'',....; α, α', α'',.... willkührliche Größen sind, und jede dieser Reihen n Glieder enthält; so ist, wenn die Brüche

$$\frac{a}{\alpha},\ \frac{a'}{\alpha'},\ \frac{a''}{\alpha''},\ \frac{a'''}{\alpha'''},\ \ldots$$

nicht alle unter einander gleich sind, der absolute Werth der Summe

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + \ldots$$

immer kleiner als das Product

$$\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots)}.$$

Denn es ist

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + \ldots)^2$$
$$+ (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a\alpha''' - a'''\alpha)^2 + (a\alpha'''' - a''''\alpha)^2 + \ldots$$
$$+ (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 + (a'\alpha''' - a'''\alpha')^2 + (a'\alpha'''' - a''''\alpha')^2 + \ldots$$
$$+ (a''\alpha''' - a'''\alpha'')^2 + (a''\alpha'''' - a''''\alpha'')^2 + \ldots$$
$$+ (a'''\alpha'''' - a''''\alpha''')^2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$= (a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots).$$

Folglich, wenn nicht alle obigen Brüche einander gleich, also auch nicht alle Differenzen $a\alpha' - a'\alpha$, $a\alpha'' - a''\alpha$, $a\alpha''' - a'''\alpha$, u. s. f. $= 0$ sind, offenbar

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + \ldots)^2$$
$$< (a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots),$$
$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + \ldots$$
$$< \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots)},$$

natürlich bloß in Bezug auf den absoluten Werth ersterer Summe.

19. Dividirt man durch n; so erhält man augenblicklich

$$\frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + \ldots}{n}$$
$$< \sqrt{\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{n}} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots}{n}},$$

woraus sich wieder ein leicht in Worten auszusprechender Satz vom arithmetischen Mittel ergiebt.

20. Sind die Brüche

$$\frac{a}{\alpha},\ \frac{a'}{\alpha'},\ \frac{a''}{\alpha''},\ \frac{a'''}{\alpha'''},\ \ldots$$

alle einander gleich; so erhält man aus (18.) unmittelbar

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + \ldots)^2$$
$$= (a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots),$$
$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + a'''\alpha''' + \ldots$$
$$= \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots)}$$

ebenfalls bloß in Bezug auf den absoluten Werth ersterer Summe.

21. Setzt man in (18.) $n = 2$, $n = 3$; so erhält man aus der dortigen Hauptgleichung die besonderen, an sich merkwürdigen, Gleichungen:

$$(a\alpha + a'\alpha')^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 = (a^2 + a'^2)(\alpha^2 + \alpha'^2),$$

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2$$
$$= (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2),$$

$$(a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2$$
$$= (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2) - (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2.$$

22. Sind die Größen a, b, c, d, ..., an der Zahl n, alle positiv; so ist immer

$$\sqrt[n]{abcd\ \ldots\ldots} < \frac{a + b + c + d + \ldots\ldots}{n}.$$

Für $n = 2$ ist

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

Also ist

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\ cd < \left(\frac{c+d}{2}\right)^2;$$

$$abcd < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 . \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 < \left\{\frac{a+b}{2} . \frac{c+d}{2}\right\}^2;$$

$$\frac{a+b}{2} . \frac{c+d}{2} < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2;$$

$$abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4;$$

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4}.$$

Eben so ist ferner

$$abcd < \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4,\ efgh < \left(\frac{e+f+g+h}{4}\right)^4;$$

$$abcdefgh < \left\{\frac{a+b+c+d}{4} . \frac{e+f+g+h}{4}\right\}^4;$$

$$\frac{a+b+c+d}{4} . \frac{e+f+g+h}{4} < \left(\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}\right)^2;$$

$$abcdefgh < \left(\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}\right)^8.$$

Hieraus erhellet schon, wie man weiter gehen kann, und der Satz gilt also überhaupt, wenn n von der

Form 2^m ist. Ist aber n nicht von dieser Form, so setze man

$$\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n}=\alpha,$$

und nehme, welches offenbar immer möglich ist, $2^m > n$. Dann ist nach dem Vorhergehenden

$$abcd\ldots\ldots\alpha^{2^m-n} < \left\{\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots+(2^m-n)\alpha}{2^m}\right\}^{2^m}$$

$$< \left\{\frac{a+b+c+d+\ldots+2^m\alpha-(a+b+c+d+\ldots\ldots)}{2^m}\right\}^{2^m},$$

$$\text{d. i. } abcd\ldots\ldots\alpha^{2^m-n} < \alpha^{2^m};$$

$$abcd\ldots\ldots\alpha^{2^m} < \alpha^{2^m+n},\ abcd\ldots\ldots < \alpha^n;$$

$$abcd\ldots\ldots < \left(\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n}\right)^n;$$

w. z. b. w.

Folglich ist auch immer

$$a+b+c+d+e+\ldots > n\sqrt[n]{abcde\ldots}$$

$$\sqrt[n]{abcde\ldots\ldots} < \frac{a+b+c+d+e+\ldots}{n}.$$

Für $n=2$ z. B. ist $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, d. h. die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei Zahlen ist immer kleiner als ihr arithmetisches Mittel. Eben so ist

$$\sqrt[3]{abc} < \frac{a+b+c}{3},$$

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4},$$

$$\sqrt[5]{abcde} < \frac{a+b+c+d+e}{5},$$

u. s. f. u. s. f.

Daß hier a, b, c, d, ... nicht alle einander gleich seyn dürfen, versteht sich von selbst, weil sonst

$$\sqrt[n]{abcd\ldots}=a,\ \frac{a+b+c+d+\ldots}{n}=a;$$

also auch

$$\sqrt[n]{abcd\ldots}=\frac{a+b+c+d+\ldots}{n}$$

seyn würde.

23. Aus diesem Satze lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen. Sind z. B. a, b zwei willkührliche ungleiche positive Größen, und m, n zwei positive ganze Zahlen; so ist, da in der Summe

$$na^{m+n} + mb^{m+n}$$

die Potenz a^{m+n} nmal, b^{m+n} dagegen mmal vorkommt, nach vorigem Satze:

$$\frac{na^{m+n} + mb^{m+n}}{m+n} > \sqrt[m+n]{(a^{m+n})^n \,.\, (b^{m+n})^m}$$

$$> \sqrt[m+n]{(a^n)^{m+n} \,.\, (b^m)^{m+n}} > \sqrt[m+n]{(a^n b^m)^{m+n}};$$

d. i. $$\frac{na^{m+n} + mb^{m+n}}{m+n} > a^n b^m,$$

$$na^{m+n} + mb^{m+n} > (m+n)\, a^n b^m.$$

Für $m = n = 1$ erhält man:

$$a^2 + b^2 > 2ab \ (11.).$$

Auf den hier bewiesenen allgemeinen Satz hat H. A. Rothe in seinem sehr zu empfehlenden Systematischen Lehrbuche der Arithmetik. Leipzig. 1804. Thl. II. Kap. 15. einen sehr strengen elementaren Vortrag der annähernden Berechnung irrationaler Logarithmen gegründet.

24. Bezeichnet e, wie gewöhnlich, die Basis der natürlichen Logarithmen, und x eine willkührliche reelle, positive oder negative, Größe; so ist immer

$$1 + x < e^x.$$

Da, x mag positiv oder negativ seyn, offenbar e^x immer positiv ist; so ist der Satz, wenn $1 + x$ negativ ist, für sich klar, und also bloß noch der Fall zu betrachten, wenn $1 + x$ positiv ist.

Es ist nämlich (Logarithmus. 31.):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1\ldots4} + \frac{x^5}{1\ldots5} + \ldots.$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x}{3}\right) + \frac{x^4}{2.3.4}\left(1 + \frac{x}{5}\right) + \frac{x^6}{2\ldots6}\left(1 + \frac{x}{7}\right) + \ldots$$

Wenn nun $1 + x$ positiv ist, x selbst mag positiv oder negativ seyn; so sind doch die Größen

$$1 + x,\ 1 + \frac{x}{3},\ 1 + \frac{x}{5},\ 1 + \frac{x}{7},\ \ldots\ldots$$

also auch die Producte

$$\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{x}{3}\right),\ \frac{x^4}{2.3.4}\left(1+\frac{x}{4}\right),\ \frac{x^6}{2...6}\left(1+\frac{x}{7}\right),\ ....$$

immer positiv. Folglich offenbar

$$e^x > 1 + x,$$

w. z. b. w.

25. Also ist auch (10.), wenn $1 + x$ positiv ist,

$$\log nat\ e^x > \log nat\ (1+x),$$

d. i. immer $\log nat\ (1+x) < x$.

26. Im Art. Umformung der Reihen (29.) ist gezeigt, daß, wenn x eine ganze Zahl ist, immer für jedes ganze positive k:

$$\log nat\ x < k(\sqrt[k]{x}-1), > k\left(1-\frac{1}{\sqrt[k]{x}}\right).$$

27. Sind

$$1+x,\ 1+y,\ 1+z,\ 1+u,\ .....$$

lauter positive Größen; so ist (24.):

$$1+x < e^x,\ 1+y < e^y,\ 1+z < e^z,\ 1+u < e^u,\ ....$$

Also (5.)

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+u)\ ... < e^{x+y+z+u+...},$$

eine Relation, die immer statt findet, wenn nur das Product auf der linken Seite bloß positive Factoren enthält.

28. Sind α, α', α'', ... willkührliche positive Größen, und a, a', a'', ... andere willkührliche Größen, welche respective größer als

$$-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\alpha'},\ -\frac{1}{\alpha''},\ ....$$

sind; so folgt aus (27.), wenn man

$$x = a\alpha,\ y = a'\alpha',\ z = a''\alpha'',\ u = a'''\alpha''',\ ....$$

setzt, sogleich

$$(1+a\alpha)(1+a'\alpha')(1+a''\alpha'')\ .... < e^{a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''+....}.$$

Sind nun a, a', a'', a''', ... alle kleiner als eine gewisse Gränze, die wir durch λ bezeichnen wollen; so ist (6. 2.):

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + ... < \lambda(\alpha + \alpha' + \alpha'' + ...),$$

und folglich (9.):

$$e^{aa + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots} < e^{\lambda(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots)},$$

da e positiv und > 1 ist. Also auch immer

$$(1 + a\alpha)(1 + a'\alpha')(1 + a''\alpha'') \ldots < e^{\lambda(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots)}.$$

29. Ist x positiv; so folgt aus der Natur des Kreises unmittelbar, daß immer

$$\sin x < x$$

ist, sin x selbst mag positiv oder negativ seyn.

Ist $x < \frac{1}{2}\pi$; so ist offenbar auch immer

$$\tang x > x, \text{ d. i. } \frac{\sin x}{\cos x} > x;$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin x^2}} > x, \ \sin x^2 > x^2 (1 - \sin x^2);$$

$$\sin x^2 > x^2 - x^2 \sin x^2, \ (1 + x^2)\sin x^2 > x^2;$$

$$\sin x \sqrt{1 + x^2} > x, \ \sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Also ist, wenn x positiv und $< \frac{1}{2}\pi$ ist, immer

$$\sin x < x, \ \sin x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}};$$

wodurch der Sinus eines Bogens zwischen zwei Gränzen eingeschlossen wird, die einander offenbar desto näher kommen, je kleiner x ist.

30. Die Zahl dieser Formeln der Ungleichheit würde sich leicht vermehren lassen; die Beschränktheit des Raumes gebietet uns indeß, nur noch Folgendes in der Kürze zu bemerken. Es erhellet nämlich aus den oben (2. bis 7.) bewiesenen Sätzen sogleich, daß sich mit Ausdrücken, welche durch die Zeichen > oder < mit einander verbunden sind, ganz ähnliche Verwandlungen vornehmen lassen, wie mit den gewöhnlichen algebraischen Gleichungen. Die französischen Geometer, und unter ihnen zuerst Fourier im Jahre 1823, obgleich auch Gergonne schon 1811 in den Annales de Math. T. II. p. 195. ähnliche Ideen geäußert hat, haben hierauf einen eignen Calcul gegründet, den sie calcul des inégalités nennen. Dann haben Navier und Cauchy diese Ideen weiter verfolgt, ersterer im Bulletin des sciences de la société philomatique (mai et juin. 1825. p. 66. 81.), letzterer im

Bulletin des sciences mathématiques par le Bar. de Férussac. Juillet. 1826. Wir geben nur ein Paar leichte Beispiele.

31. Eine Zahl zu finden, deren Dreifaches um 7 vermindert, größer ist als die um 11 vermehrte gesuchte Zahl. Dies giebt die Bedingung $3x - 7 > x + 11$, $3x > x + 18$, $2x > 18$, $x > 9$. Also thut jede Zahl, welche > 9 ist, der Aufgabe Genüge.

32. Eine Zahl von solcher Beschaffenheit zu finden, daß die gesuchte Zahl größer als 15 ist, ihr Dreifaches, um 1 vermehrt, kleiner als das Doppelte plus 20, und daß, wenn man die Zahl um 1 vermindert, und um 3 vermehrt, der Quotient jener Differenz durch diese Summe $> \frac{4}{5}$ ist. Dies giebt folgende Bedingungen:

$$x > 15,\ 3x + 1 < 2x + 20,\ \frac{x-1}{x+3} > \frac{4}{5};$$
$$x > 15,\ x < 19,\ 5x - 5 > 4x + 12;$$
$$x > 15,\ x < 19,\ x > 17.$$

Ist $x > 17$; so ist es auch > 15. Also bleiben bloß die Bedingungen $x > 17$, $x < 19$, so daß also jede Zahl zwischen 17 und 19 der Aufgabe Genüge leistet. Werden aber bloß ganze Zahlen verlangt; so giebt es nur eine Auflösung, nämlich $x = 18$.

33. Eine Zahl zu finden, deren Dreifaches um 2 vermindert nicht kleiner als 7, und deren Zehnfaches weniger 1 nicht größer als 11 plus dem Sechsfachen der gesuchten Zahl ist. Also

$$3x - 2 \overset{=}{>} 7,\ 10x - 1 \overset{=}{<} 11 + 6x;$$
$$3x \overset{=}{>} 9,\ 10x \overset{=}{<} 12 + 6x,\ 4x \overset{=}{<} 12;$$
$$x \overset{=}{>} 3,\ x \overset{=}{<} 3.$$

Folglich gestattet die Aufgabe nur eine Auflösung, nämlich $x = 3$.

34. Eine Relation wie $Z > o$ oder $Z < o$ kann man auch durch eine Gleichung $Z - \alpha = o$ oder $Z + \alpha = o$, indem man nämlich eine willkührliche Größe α einführt, darstellen, wodurch die Aufgabe immer auf ein gewöhnliches Problem der Algebra reducirt wird. Elimi-

nirt man nun die unbekannten Größen, so viel sich deren eliminiren lassen, so wird man eine oder mehrere Gleichungen zwischen den gegebenen und den eingeführten Größen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ erhalten, denen man nun zu genügen suchen muß. Die eingeführten Größen werden immer als positiv angenommen. In Bezug auf das Problem in (33.) hat man z. B. die Gleichungen:

$$3x-2=7+\alpha,\ 10x-1=11+6x-\beta;$$
$$x=\frac{9+\alpha}{3},\ x=\frac{12-\beta}{4};\ \frac{9+\alpha}{3}=\frac{12-\beta}{4};$$
$$36+4\alpha=36-3\beta,\ 4\alpha=-3\beta.$$

Da α, β positiv sind; so wird letzterer Gleichung nur genügt für $\alpha=\beta=0$. Also $x=\frac{9}{3}=3$.

35. Die Einheit in drei Theile zu theilen, welche ungleich seyn können, aber so beschaffen seyn sollen, daß der größte Theil das Product des kleinsten in die positive Zahl $1+r$ nicht übersteigt.

Dies giebt, wenn man drei positive willkührliche Größen α, β, γ einführt, die Gleichungen:

$$x+y+z=1,$$
$$y=x+\alpha,\ z=y+\beta,\ z=(r+1)x-\gamma.$$

Bestimmt man nun aus den drei letzten Gleichungen x, y, z; so erhält man:

$$x=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{r},$$
$$y=x+\alpha=\frac{(r+1)\alpha+\beta+\gamma}{r},$$
$$z=y+\beta=\frac{(r+1)(\alpha+\beta)+\gamma}{r}.$$

Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung; so kommt nach einigen Reductionen:

$$(2r+3)\alpha+(r+3)\beta+3\gamma=r.$$

Da nun α, β, γ alle drei positiv sind; so ergiebt sich hieraus zunächst $3\gamma \overset{=}{<} r$, $\gamma \overset{=}{<} \frac{1}{3}r$. Ferner ist

$$(2r+3)\alpha=r-3\gamma-(r+3)\beta;$$

also $$(r+3)\beta \overset{=}{<} r-3\gamma,\ \beta \overset{=}{<} \frac{r-3\gamma}{r+3}.$$

Man kann folglich für γ jeden positiven Werth setzen, welcher $\overset{=}{<} \frac{1}{3} r$ ist, und jedem einzelnen Werthe von γ jeden Werth von β zuordnen, welcher $\overset{=}{<} \frac{r-3\gamma}{r+3}$. Sind nun so die Werthe von β und γ bestimmt; so bestimmt sich α aus der Gleichung

$$\alpha = \frac{r - 3\gamma - (r+3)\beta}{2r+3}.$$

Die Werthe von x, y, z ergeben sich dann ebenfalls leicht, da x, y, z oben bloß durch α, β, γ ausgedrückt worden sind. Es wird hieraus erhellen, wie man sich bei der Auflösung ähnlicher Aufgaben zu verhalten hat. Mehreres s. m. in den angeführten Schriften. Eine elegante Construction der letzten Aufgabe hat Fourier im Bulletin de la société philomatique. Juillet. 1826. p. 99. gegeben, die auch im Bulletin des sciences mathématiques de Férussac. Janvier. 1827. p. 1. mitgetheilt ist. Besonders benutzt ist bei diesem Artikel das schon oben (1.) erwähnte Werk von Cauchy (Note II. p. 438. sqq.).

Ueber die Ungleichheit der Verhältnisse s. m. den Art. Verhältniß.

Ungleiche Vierung, s. Trapezium.

Ungleichseitig heißen im Allgemeinen alle ebenen geradlinigen Figuren, deren Seiten nicht alle unter einander gleich sind, wie z. B. das ungleichseitige Dreieck (triangulum scalenum). Das gleichschenkliche Dreieck ist im Allgemeinen auch eine ungleichseitige Figur, oder ein ungleichseitiges Dreieck, wird aber durch den Namen gleichschenklich von dem Dreieck mit drei unter einander ungleichen Seiten unterschieden, welches vorzugsweise ungleichseitig genannt wird. Das Rechteck, Rhomboid und Trapezium sind ungleichseitige Vierecke.

Ungleichseitige Hyperbel heißt jede Hyperbel, deren Axen ungleich sind, zum Gegensatz der gleichseitigen, welche gleiche Axen hat. S. Hyperbel (31.).

Ungleich= ungleiche Zahl (numerus inaequaliter inaequalis) ist bei den ältern arithmetischen Schriftstellern eine Flächenzahl mit zwei ungleichen Seiten, d. h. eine Zahl, welche als durch Multiplication zweier ungleichen Factoren in einander entstanden gedacht werden kann, wie z. B. 24 = 3 . 8, 30 = 5 . 6. Solche Zahlen werden eigentlich den Quadratzahlen entgegengesetzt, die sich immer in zwei einander gleiche Factoren zerlegen lassen, und daher numeri aequaliter aequales genannt werden.

Ungleich= ungleich= ungleiche Zahl (numerus inaequaliter inaequalis inaequaliter) ist eine Körperzahl mit drei ungleichen Seiten, d. h. eine Zahl, welche als durch Multiplication dreier ungleichen Factoren in einander entstanden gedacht wird, wie z. B. 24 = 2 . 3 . 4, 30 = 2 . 3 . 5. Die Cubikzahlen heißen zum Gegensatze numeri aequaliter aequales aequaliter.

Ungula, s. Hufförmiger Abschnitt.

Uniform, s. Gleichförmig.

Unionen heißen in der Combinatorischen Analysis bei den Combinationen und Variationen die Complexionen der ersten Klasse, welche nur e i n Element enthalten.

Unmögliche Aufgabe ist eine solche, welche die Erfüllung sich widersprechender Bedingungen verlangt, und daher unauflösbar ist. Oft sind Aufgaben nur in gewissen besondern Fällen unmöglich. Die Beurtheilung, ob eine Aufgabe möglich oder unmöglich ist, ist nicht selten mit Schwierigkeiten verknüpft. Die unmöglichen oder imaginären Größen (s. diesen Artikel) leisten aber bei der analytischen (algebraischen) Auflösung der Aufgaben vortreffliche Dienste. Man behandelt nämlich jede vorgelegte Aufgabe ohne Unterschied als möglich, d. i. als wirklich auflösbar. Enthält nun das Endresultat keine imaginären Größen, und wird auch in keinem besondern Falle

imaginär, so ist die Aufgabe allgemein auflösbar, d. h. in allen Fällen möglich. Enthält aber das Endresultat imaginäre Größen, oder wird in gewissen besondern Fällen imaginär, so ist die Aufgabe entweder überhaupt, oder in eben diesen besondern Fällen unmöglich. Nur ist im letztern Falle zu bemerken, daß man sich in jedem Falle zu versichern hat, daß das Endresultat nicht vielleicht bloß in einer imaginären Form erscheine, und, bei weiterer Reduction, die imaginären Größen sich gegenseitig aufheben, wie dies wohl zuweilen der Fall ist, wo dann die Aufgabe dennoch möglich seyn würde. Führte z. B. die Auflösung einer Aufgabe auf eine cubische Gleichung im irreduciblen Fall; so erscheint (Cardans Regel. 1.) der Ausdruck der Wurzel nach der Cardanischen Regel unter einer imaginären Form, die Gleichung hat aber drei mögliche Wurzeln, und es giebt also drei verschiedene mögliche Auflösungen der Aufgabe.

Die Aufgabe: eine gegebene gerade Linie a so zu theilen, daß das Rechteck zwischen beiden Theilen einem gegebenen Quadrate b^2 gleich sey, führt sogleich auf die quadratische Gleichung

$$x(a-x)=b^2,\ x^2-ax=-b^2,$$

ohne für jetzt weiter zu berücksichtigen, ob die Aufgabe möglich oder unmöglich ist. Löset man nun die quadratische Gleichung auf; so erhält man

$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b^2},$$

woraus man, da, für $\frac{1}{4}a^2<b^2$, $\frac{1}{4}a^2-b^2$ negativ, $\sqrt{\frac{1}{4}a^2-b^2}$ also imaginär wird, sogleich siehet, daß die Aufgabe nur möglich ist, wenn $\frac{1}{2}a \geqq b$ ist, aber unmöglich wird, wenn $\frac{1}{2}a<b$ ist. Die Aufgabe: eine gegebene gerade Linie a um ein solches Stück zu verlängern, daß das Rechteck zwischen der ganzen so verlängerten Linie und dem angesetzten Stücke einem gegebenen Quadrate b^2 gleich ist, führt sogleich auf die quadratische Gleichung

$$x(a+x)=b^2,\ x^2+ax=b^2;$$
$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+b^2};$$

woraus sogleich erhellet, daß die Aufgabe in allen Fällen möglich ist. Die doppelten Zeichen beziehen sich bei diesen beiden Aufgaben darauf, daß man das bestimmte Stück x sowohl an dem einen als dem andern Endpunkte der gegebenen Linie a von derselben abschneiden, und an sie ansetzen kann.

Ein Dreieck aus drei gegebenen Seiten zu beschreiben, wenn zwei Seiten nicht größer als die dritte sind; einen Kreis zu beschreiben, welcher drei unter einander parallele Linien zugleich berührt, u. s. f., sind ebenfalls einfache Beispiele unmöglicher Aufgaben aus der Geometrie.

Unmögliche Ausdrücke für die goniometrischen Linien, s. Unmögliche Größen (9.), und Differentialformeln (47. ff.).

Unmögliche, eingebildete oder imaginäre Größen nennt man alle solche Ausdrücke, für welche sich keine wirkliche Größe als Werth angeben läßt, wie z. B. Arc sin x, Arc cos x für $x > 1$. Die Werthe solcher Größen, wenn sie den Regeln des Algorithmus unterworfen werden, existiren also bloß symbolisch, und sind nur eingebildet oder imaginär. Dessenungeachtet sind aber solche Größen in der Mathematik von großem Nutzen, und werden oft absichtlich zur Abkürzung in Rechnungen eingeführt, wo sie sich aber im Laufe der Rechnung wieder aufheben, und das Resultat reell oder möglich bleibt. Uebrigens aber rechnet man in der Mathematik mit imaginären Größen, wie mit wirklichen. Jede Aufgabe, einer analytischen Behandlung unterworfen, wird als möglich, d. i. als auflösbar, betrachtet, und unter dieser Annahme behandelt. Enthält aber das Endresultat imaginäre Größen, welche auf keine Weise aus demselben eliminirt werden können; so hat man hierin ein Kriterium, daß die Aufgabe selbst unmöglich ist, d. h. die Erfüllung sich widersprechender Bedingungen verlangt. Jedoch hüte man sich, nicht zu voreilig auf diese Art zu schließen, weil zuweilen durch schickliche Verwandlungen und Re-

ductionen die imaginären Größen doch weggeschafft werden können, indem sie sich gegenseitig aufheben lassen, wozu u. A. der Art. Cardans Regel ein Beispiel darbietet.

1. Die Arithmetik führt schon in den Elementen auf unmögliche Größen, denn jede Wurzel mit geradem Exponenten aus einer negativen Größe, wie z. B. $\sqrt[2n]{-a}$, ist offenbar imaginär, da sie weder $= + x$, noch $= - x$, noch $= 0$ seyn kann, indem $(\pm x)^{2n} = ((\pm x)^2)^n = x^{2n}$, $0^{2n} = 0$, also nie $= - a$ ist. Die Theorie dieser imaginären Wurzelgrößen, wenn sie ganz den gewöhnlichen Regeln des Algorithmus unterworfen werden sollen, beruht auf zwei Principien. Nach dem Begriffe der Wurzel muß immer

α) $$(\sqrt[2n]{-a})^{2n} = -a$$

gesetzt werden. Ferner ist jede Wurzelausziehung eine Zerlegung in gleiche Factoren, und die Ordnung der Factoren ist nie von Einfluß auf die Größe des Products; also wird man

β) auch wenn imaginäre Größen vorkommen, aus einem Product die Wurzeln erhalten, wenn man das Wurzelzeichen mit demselben Exponenten jedem einzelnen Factor vorsetzt.

2. Euler hat die imaginären Wurzelgrößen auf eine sehr sinnreiche Art mit der Goniometrie in Verbindung gesetzt. Dazu ist folgender Satz nöthig. Man erhält nämlich bloß mit Hülfe von (1. α.) und sehr bekannten goniometrischen Formeln, wenn $\sqrt{-1}$ immer durch i bezeichnet wird, leicht:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi') \dots$$
$$= \cos(\varphi + \varphi' + \dots) + i\sin(\varphi + \varphi' + \dots)$$

3. Folglich für $\varphi = \varphi' = \varphi'' = \dots$, wenn die Anzahl der Factoren $= n$ gesetzt wird,

α) für jedes ganze positive n:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

β) Ferner ist nach (2.)

$$(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)(\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi))$$
$$= \cos(n\varphi - n\varphi) + i \sin(n\varphi - n\varphi) = 1;$$
$$(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)^{-1} = \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)$$

d. i. nach α):

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi),$$

für jedes ganze $-$ n.

γ) Folglich nach α) für jedes ganze positive m:

$$(\cos \frac{1}{m}\varphi + i \sin \frac{1}{m}\varphi)^m = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

und nach (α, β) für jedes ganze positive oder negative n:

$$(\cos \frac{n}{m}\varphi + i \sin \frac{n}{m}\varphi)^m = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n.$$

Folglich für jeden positiven oder negativen Bruch $\frac{n}{m}$:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{n}{m}\varphi + i \sin \frac{n}{m}\varphi.$$

Folglich für jedes n, wenn man zugleich $-\varphi$ für φ setzt:

$$(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi.$$

S. über diese nach Moivre benannten Gleichungen auch Thl. II. S. 554.

4. Da nun $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$ ist; so ist

$$-1 = \cos \pi \pm i \sin \pi,$$
$$\sqrt[2n]{-1} = \cos \frac{\pi}{2n} \pm i \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Aber (1. β.) $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a.(-1)} = \sqrt[2n]{a}.\sqrt[2n]{-1}$.
Also

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a}.\cos \frac{\pi}{2n} \pm i \sqrt[2n]{a}.\sin \frac{\pi}{2n},$$

d. i. $\sqrt[2n]{-a} = A + Bi$, auf welche Form also jede imaginäre Wurzelgröße immer gebracht werden kann.

5. Alle Rechnungen mit imaginären Wurzelgrößen werden am leichtesten und sichersten ausgeführt, wenn man sie zuvor auf obige Form bringt, und dann, berücksichtigend, daß immer $i^2 = -1$ (1. α.), nach den gewöhnlichen Regeln der allgemeinen Arithmetik verfährt. Z. B. $\sqrt{-a}.\sqrt{-b} = i\sqrt{a}.i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab}$

$= - \sqrt{ab}$, und eben so in ähnlichen Fällen. Auch ist immer $\frac{a}{i} = \frac{ai}{i^2} = \frac{ai}{-1} = -ai$, wovon wir nachher zuweilen Gebrauch machen werden.

5ª. Die nähere Betrachtung der imaginären Form $A + Bi$, oder $\alpha + \beta i$ ist für das Folgende sehr wichtig. Unter derselben sind auch alle reelle Größen enthalten, wenn man B, oder β, $= 0$ setzt.

Soll $\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$ seyn; so muß $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ seyn, weil sonst

$$i = - \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'}$$

ein reeller Ausdruck für eine imaginäre Größe wäre, welches ungereimt ist. Dagegen gibt $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ augenblicklich $i = \frac{0}{0}$, welches bekanntlich jede Größe bedeuten kann.

Zwei imaginäre Ausdrücke wie $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$ heißen einander conjungirt. Da

$$(\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = 2\alpha,$$
$$(\alpha + \beta i) - (\alpha - \beta i) = 2\beta i,$$
$$(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2,$$
$$\frac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{2\alpha\beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

ist; so erhellet, daß Summe und Product zweier imaginären conjungirten Ausdrücke reell, Differenz und Quotient dagegen imaginär sind.

Es ist

$$(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)i,$$
$$(\alpha - \beta i)(\alpha' - \beta' i) = \alpha\alpha' - \beta\beta' - (\alpha\beta' + \alpha'\beta)i,$$
$$(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i)(\alpha - \beta i)(\alpha' - \beta' i)$$
$$= (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)(\alpha' + \beta' i)(\alpha' - \beta' i)$$
$$= (\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2);$$

woraus also erhellet, daß das Product $(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)$, und, nach einer leichten Schlußart, auch überhaupt das Product

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2) \ldots$$

immer die Summe zweier Quadrate ist. Ein allgemeiner Satz wird im Art. Zahl (X. 3.) vorkommen.

6. Die imaginäre Form $\alpha + \beta i$ kann immer auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gebracht werden. ϱ heißt der **Modulus**, und $\cos\varphi + i\sin\varphi$ der **reducirte Ausdruck**. Man erhält nämlich leicht aus

$$\alpha + \beta i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi):$$

$$\alpha = \varrho\cos\varphi,\ \beta = \varrho\sin\varphi;$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = \varrho^2;$$

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},\ \cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\ \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};$$

$$\varphi = \text{Arc}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \text{Arc}\sin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

woraus sich φ immer bestimmen läßt, da $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > \alpha$, $> \beta$. Für $\beta = 0$ ist $\alpha + \beta i$ reell, und man erhält $\varrho = \alpha$, $\varphi = 0$, oder auch $\varrho = -\alpha$, $\varphi = \pi$.

7. Es ist

$$(\alpha+\beta i) + (\alpha'+\beta' i) + (\alpha''+\beta'' i) + \ldots$$
$$= (\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots) + (\beta+\beta'+\beta''+\ldots)i$$
$$(\alpha+\beta i) - (\alpha'+\beta' i) - (\alpha''+\beta'' i) - \ldots$$
$$= (\alpha-\alpha'-\alpha''-\ldots) + (\beta-\beta'-\beta''-\ldots)i$$
$$(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i)(\alpha''+\beta'' i)\ldots$$
$$= \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).\varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')\ldots$$
$$= \varrho\varrho'\ldots(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')\ldots$$
$$= \varrho\varrho'\ldots\{\cos(\varphi+\varphi'+\ldots) + i\sin(\varphi+\varphi'+\ldots)\}\ (2.)$$
$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i} = \frac{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')}$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho'}(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')^{-1}$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho'}(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos(-\varphi') + i\sin(-\varphi'))\ (3.)$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho'}\{\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')\}\ (2.)$$

Folglich können alle Summen, Differenzen, Producte und Quotienten der imaginären Form $\alpha + \beta i$ auf dieselbe Form $A + Bi$ gebracht werden. Wir wollen die übrigen Functionen von $\alpha + \beta i$ in dieser Beziehung auch untersuchen.

8. Es ist

$$(\alpha+\beta i)^n = \varrho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n\ (6.)$$
$$= \varrho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = A + Bi\ (3.),$$

von derselben Form.

9. Entwickelt man $e^{\pm\varphi i}$ mittelst der Exponientialreihe (Logarithmus. 31.) in eine Reihe; so ergiebt sich mittelst der cyklometrischen Reihen für sin und cos (Cyklometrie. 5. 6.) leicht:

$$e^{\pm\varphi i} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi,$$

woraus auch leicht durch Addition und Subtraction der beiden durch das doppelte Zeichen angedeuteten Ausdrücke die schon Th. I. S. 876. bewiesenen imaginären Ausdrücke der trigonometrischen Linien folgen:

$$\cos\varphi = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i};$$

$$\tang\varphi = \frac{e^{2\varphi i} - 1}{i(e^{2\varphi i}+1)}, \ \cot\varphi = \frac{1 + e^{2\varphi i}}{i(1-e^{2\varphi i})}.$$

Das Imaginäre hebt sich hier bei der Entwickelung auf.

Obige Formel giebt aber auch:

$$\operatorname{logn}(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) = \pm \varphi i.$$

Also

$$\begin{aligned}
\log(\alpha+\beta i) &= \log\{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}\ (6.) \\
&= \log\varrho + \log(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&= \log\varrho + M\varphi i \\
&= \log\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + Mi \operatorname{Arc}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\
&= \log\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + Mi \operatorname{Arc}\sin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},
\end{aligned}$$

wo M den Modulus des logarithmischen Systems bezeichnet. Also auch

$$\log(\alpha+\beta i) = A + Bi.$$

10. Da überhaupt $p^q = e^{\operatorname{logn} p^q} = e^{q \operatorname{logn} p}$ ist; so setze man

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta i)^{a+bi} &= e^{(a+bi)\operatorname{logn}(\alpha+\beta i)} \\
&= e^{(a+bi)(\operatorname{logn}\varrho + \varphi i)}\ (9.) \\
&= e^{a \operatorname{logn}\varrho - b\varphi} \cdot e^{(a\varphi + b \operatorname{logn}\varrho)i} \\
&= e^{a \operatorname{logn}\varrho - b\varphi} \cdot \{\cos(a\varphi + b\operatorname{logn}\varrho) + i\sin(a\varphi + b\operatorname{logn}\varrho)\}\ (9.) \\
&= \varrho^a \cdot e^{-b\varphi} \cdot \{\cos(a\varphi + b\operatorname{logn}\varrho) + i\sin(a\varphi + b\operatorname{logn}\varrho)\} \\
&= A + Bi.
\end{aligned}$$

11. $\sin(\alpha + \beta i) = \sin\alpha\cos(\beta i) + \cos\alpha\sin(\beta i);$

$$\cos(\beta i) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}, \ \sin(\beta i) = -\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2i} \quad (9.);$$

$$\sin(\alpha+\beta i) = \frac{(e^\beta + e^{-\beta})\sin\alpha}{2} + \frac{i(e^\beta - e^{-\beta})\cos\alpha}{2} = A + Bi.$$

12. Ganz eben so erhält man

$$\cos(\alpha+\beta i) = \frac{(e^\beta + e^{-\beta})\cos\alpha}{2} - \frac{i(e^\beta - e^{-\beta})\sin\alpha}{2} = A + Bi.$$

13. $\sin\text{vers}(\alpha+\beta i) = 1 - \cos(\alpha+\beta i)$
$= 1 - (A' + B'i)$ (12.) $= A + Bi.$
$\cos\text{vers}(\alpha+\beta i) = 1 - \sin(\alpha+\beta i)$
$= 1 - (A' + B'i)$ (11.) $= A + Bi.$

14. $\text{tang}(\alpha+\beta i) = \frac{\sin(\alpha+\beta i)}{\cos(\alpha+\beta i)}$
$= \frac{A' + B'i}{A'' + B''i}$ (11. 12.) $= A + Bi$ (7.)
$\cot(\alpha+\beta i) = \frac{\cos(\alpha+\beta i)}{\sin(\alpha+\beta i)}$
$= \frac{A' + B'i}{A'' + B''i}$ (11. 12.) $= A + Bi$ (7.).

15. $\sec(\alpha+\beta i) = \frac{1}{\cos(\alpha+\beta i)}$
$= (A' + B'i)^{-1}$ (12.) $= A + Bi$ (8.)
$\text{cosec}(\alpha+\beta i) = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta i)}$
$= (A' + B'i)^{-1}$ (11.) $= A + Bi$ (8.).

16. Sei nun ferner $\text{Arc}\cos(\alpha+\beta i)$ gegeben. Es ist (9.)

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Folglich, für $\varphi = \text{Arc}\cos x$:

$$e^{i\,\text{Arc}\cos x} = x + i\sqrt{1-x^2},$$
$$i\,\text{Arc}\cos x = \text{logn}(x + i\sqrt{1-x^2}),$$
$$i\,\text{Arc}\cos(\alpha+\beta i) = \text{logn}(\alpha+\beta i + i\sqrt{1-\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta i})$$
$$= \text{logn}(\alpha + \beta i + i(a + bi)) \ (8.)$$
$$= \text{logn}(\alpha - b + (a+\beta)i) = a' + b'i \quad (9.)$$
$$\text{Arc}\cos(\alpha+\beta i) = b' - a'i = A + Bi.$$

17. In dem besondern Falle, wo $\beta = 0$ ist, hat man:

$$i\,\text{Arc}\cos\alpha = \text{logn}(\alpha + i\sqrt{1-\alpha^2})$$

woraus sich für $\alpha = \pm 1$ ergiebt:

$$\text{logn}(+1) = \pm 2k\pi i,\ \text{logn}(-1) = \pm(2k+1)\pi i;$$
$$\log(+a) = \log a \pm 2kM\pi i,$$
$$\log(-a) = \log a \pm (2k+1)M\pi i,$$

woraus also zugleich folgt, daß jeder Logarithmus unendlich viele Werthe hat, welche für log $(-a)$ alle, für log $(+a)$ alle, außer einem, wo nämlich $k = 0$, imaginär, immer von der Form $A + Bi$, sind.

Ist $\alpha > 1$; so ist $\sqrt{1-\alpha^2} = i\sqrt{\alpha^2-1}$ eine imaginäre Größe. Also $i\sqrt{1-\alpha^2} = -\sqrt{\alpha^2-1}$ eine reelle Größe. Ist nun zuerst α positiv; so ist $\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}$ offenbar positiv, und

$$\begin{aligned}\text{Arc}\cos\alpha &= -i\,\text{logn}(\alpha - \sqrt{\alpha^2-1})\\ &= i\,\text{logn}(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})\\ &= i\{\text{logn}(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}) \pm 2k\pi i\}\\ &= \mp 2k\pi + i\,\text{logn}(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}).\end{aligned}$$

Ist dagegen α negativ; so sind $\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}$ und $\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}$ negative Größen, und man erhält nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}\text{Arc}\cos\alpha &= i\,\text{logn}(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})\\ &= i\{\text{logn}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}) \pm (2k+1)\pi i\}\\ &= \mp(2k+1)\pi + i\,\text{logn}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}),\end{aligned}$$

wo nun $-\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}$ positiv, und folglich Arc cos α für $\alpha > 1$ immer eine imaginäre Größe von der Form $A + Bi$ ist.

18. Da immer

$$\text{Arc}\sin x = \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc}\cos x;$$

so ist auch

$$\begin{aligned}\text{Arc}\sin(\alpha + \beta i) &= \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc}\cos(\alpha + \beta i)\\ &= \tfrac{1}{2}\pi - A' - B'i\ (16.) = A + Bi.\end{aligned}$$

Für $\beta = 0$, wenn $\alpha > 1$, erhält man eben so, wenn α positiv ist:

$$\begin{aligned}\text{Arc}\sin\alpha &= \tfrac{1}{2}\pi \pm 2k\pi - i\,\text{logn}(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})\\ &= \frac{(1 \pm 4k)\pi}{2} - i\,\text{logn}(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}),\end{aligned}$$

und, wenn α negativ ist:

$$\text{Arc}\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\pi \pm (2k+1)\pi - i\,\text{logn}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2-1})$$
$$= \frac{(1 \pm 2(2k+1))\pi}{2} - i\,\text{logn}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}).$$

welches also auch immer imaginär und von der Form A + Bi ist.

19. Cauchy in seinem trefflichen Cours d'Analyse de l'école polyt. T. I. Paris. 1821. p. 323. entwickelt $\text{Arc}\cos(\alpha+\beta i)$ auf folgende Art. Sei

$$\text{Arc}\cos(\alpha+\beta i) = x + yi,$$
$$\cos(x+yi) = \alpha + \beta i,$$
$$\cos x \cos(yi) - \sin x \sin(yi) = \alpha + \beta i,$$
$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x - \frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x \,.\, i = \alpha + \beta i,$$
$$\frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x = \alpha,\ \frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x = -\beta;$$
$$e^y = \frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x},\ e^{-y} = \frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x};$$
$$e^y \times e^{-y} = 1 = \frac{\alpha^2}{\cos x^2} - \frac{\beta^2}{\sin x^2},$$
$$\sin x^4 - (1-\alpha^2-\beta^2)\sin x^2 - \beta^2 = 0,$$
$$\sin x^2 = \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2} + \sqrt{\left\{\left(\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2}\right)^2 + \beta^2\right\}}$$
$$\cos x^2 = \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} - \sqrt{\left\{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2\right\}}$$
$$= \frac{\alpha^2}{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left\{\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2\right\}}}.$$

Folglich

$$x = \text{Arc}\cos\frac{\alpha}{\left\{\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

und wenn wir diesen Werth = A setzen:

$$y = \text{logn}\left(\frac{\alpha}{\cos A} - \frac{\beta}{\sin A}\right) = B,$$
$$\text{Arc}\cos(\alpha+\beta i) = A + Bi.$$

Ueber diesen Ausdruck ist aber Folgendes zu bemerken. Für $\beta = 0$ wird $A = \text{Arc}\cos\alpha$, $B = 0$, also

$$\text{Arc}\cos\alpha = \text{Arc}\cos\alpha.$$

Ist β nicht $= 0$; so folgt aus der Form des Ausdruckes für $\cos A$ leicht, daß derselbe < 1, A also eine

mögliche Größe ist. Für $\beta = 0$ wird aber Arccos α durch obigen Ausdruck nicht auf die Form A + Bi gebracht, sondern man erhält bloß die obige identische Gleichung, wo aber Arccos α für $\alpha > 1$ selbst imaginär ist. Auch B muß im Allgemeinen eine reelle Größe seyn, welches auch in der That der Fall ist. Denn es ist nach dem Obigen

$$\frac{\alpha^2}{\cos A^2} - \frac{\beta^2}{\sin A^2} = 1;$$

also $\frac{\alpha^2}{\cos A^2} > \frac{\beta^2}{\sin A^2}$, so daß also das Zeichen von

$$\frac{\alpha}{\cos A} - \frac{\beta}{\sin A}$$

nur von dem ersten Gliede abhängt. Damit nun diese Differenz immer positiv, ihr natürlicher Logarithmus, d. i. B, also immer möglich sey, nehme man den obigen Ausdruck für cos A, welches wegen der Quadratwurzel im Nenner verstattet ist, positiv oder negativ, jenachdem α positiv oder negativ ist. Dann giebt obiger Ausdruck für Arccos$(\alpha + \beta i)$ immer einen Ausdruck von der Form A + Bi, wenn β nicht $= 0$ ist. Arcsin$(\alpha + \beta i)$ gestattet eine ganz ähnliche Behandlung.

20. Ferner ist Arcsin v$(\alpha + \beta i) =$ Arccos$(1 - \alpha - \beta i)$ $=$ Arccos$(\alpha' + \beta' i) =$ A + Bi (16.); Arccos v$(\alpha + \beta i)$ $=$ Arcsin$(1 - \alpha - \beta i) =$ Arcsin$(\alpha' + \beta' i) =$ A + Bi (18.)

21. $\text{Arctang}(\alpha + \beta i) = \text{Arcsin}\frac{\alpha + \beta i}{\sqrt{1 + (\alpha + \beta i)^2}}$

$$= \text{Arcsin}\frac{\alpha + \beta i}{\sqrt{1 + \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i}}$$

$$= \text{Arcsin}\frac{\alpha + \beta i}{\sqrt{\alpha' + \beta' i}} = \text{Arcsin}\frac{\alpha + \beta i}{\alpha'' + \beta'' i} \quad (8.)$$

$$= \text{Arcsin}(\alpha''' + \beta''' i) \ (7.) = A + Bi \quad (18.)$$

$$\text{Arccot}(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arctang}(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2}\pi - A' - B'i = A + Bi.$$

22. $\text{Arcsec}(\alpha + \beta i) = \text{Arccos}\frac{1}{\alpha + \beta i}$

$$= \text{Arccos}(\alpha + \beta i)^{-1} = \text{Arccos}(\alpha' + \beta' i) \ (8.) = A + Bi \ (16.)$$

$$\text{Arccosec}(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arcsec}(\alpha + \beta i)$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - A' - B'i = A + Bi.$$

23. Nach dem Bisherigen kann also jede einfache Function der Größe $\alpha + \beta i$ auf dieselbe Form gebracht werden. Da nun unter $\alpha + \beta i$ auch alle reelle Größen enthalten sind, wenn $\beta = 0$ gesetzt wird; so kann auch jede einfache Function einer reellen Größe auf die Form $A + Bi$ gebracht werden, wo B nothwendig verschwinden muß, wenn die in Rede stehende Function reell ist, aber nicht $= 0$ seyn wird, wenn diese Function imaginär ist, wie z. B. oben bei $\text{Arc}\cos\alpha$ und $\text{Arc}\sin\alpha$, jenachdem α zwischen -1 und $+1$ enthalten, oder rücksichtlich seines absoluten Werthes > 1 ist. Man sieht also hieraus, daß sich jeder auf die in der Analysis vorkommenden Functionen beziehende imaginäre Ausdruck auf die Form $A + Bi$ bringen läßt, da nach dem Obigen offenbar auch alle Verbindungen der einfachen Functionen von $\alpha + \beta i$ auf diese Form gebracht werden kann. Obiges ist freilich nur ein Beweis durch Induction. Wer einen allgemeinen Beweis für den Satz, daß jede imaginäre Größe auf die Form $A + Bi$ gebracht werden kann, führen wollte, müßte denselben, wie es uns scheint, aus der gleich zu Anfange dieses Artikels gegebenen Erklärung imaginärer Größen durch ganz allgemeine Schlüsse abzuleiten suchen. Mehrere Mathematiker haben sich mit diesem Beweise beschäftigt, aber kein Versuch scheint mir, in Bezug auf die so eben ausgesprochene Forderuug an einen solchen Beweis, völlig gelungen. Die obige Induction, vorzüglich in Verbindung mit Kreisgrößen, gehört dem Wesentlichen nach Euler (Mém. de Berlin. 1749.). Außerdem sind besonders noch zu erwähnen: D'Alembert (Mém. de Berlin. 1746. Opuscules mathém. T. V.), Fuß (Acta Petrop. 1781. P. 2.), Canterzani (Mém. della Soc. Ital. T. II. P. 2.), Foncenex (Misc. Soc. Taurin. T. I.), Fontana (Mém. della Soc. Ital. T. VIII.), Cossali und Riccati das. T. IX. T. IV. Playfair (Philos. Transact. 1778.). $(\alpha+\beta i)^{a+bi}$ auf die Form $A + Bi$ zu bringen zeigt auch D'Alembert schon in den Reflexions sur la cause des vents. p. 182., mittelst der Differentialrechnung. Auch s. m.

Lagrange Résolution des équations numeriques. An. VI. p. 182. Besonders s. m. auch Cauchy a. a. O., und Thibaut Grundriß der allgem. Arithm. Gött. 1813. M. v. den Art. Logarithmus (160.).

24. Mehrere der oben betrachteten Functionen von $\alpha + \beta i$ haben mehr als einen Werth, zu deren Untersuchung wir jetzt übergehen wollen, indem wir zunächst

$$(\alpha + \beta i)^{\frac{m}{n}}$$

betrachten, wo m jede positive oder negative Zahl bedeuten, eben deshalb aber n immer als positiv angenommen werden kann. Man bringe nun $\alpha + \beta i$ nach (6.) auf die Form

$$\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

bezeichne irgend einen Werth von $(\alpha + \beta i)^{\frac{m}{n}}$ durch x, und setze

$$x = r(\cos\psi + i\sin\psi);$$

so hat man die Gleichung:

$$\{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}^{\frac{m}{n}} = r(\cos\psi + i\sin\psi),$$
$$\varrho^m(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = r^n(\cos\psi + i\sin\psi)^n,$$
$$\varrho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) = r^n \cos n\psi + i\sin n\psi,$$
$$\varrho^m \cos m\varphi = r^n \cos n\psi,\ \varrho^m \sin m\varphi = r^n \sin n\psi.$$

Quadrirt man nun auf beiden Seiten, und addirt; so erhält man leicht:

$$\varrho^{2m} = r^{2n},\ \varrho^m = r^n,\ r = \varrho^{\frac{m}{n}};$$

und folglich auch

$$\cos m\varphi = \cos n\psi,\ \sin m\varphi = \sin n\psi.$$

Also $n\psi = m\varphi \pm 2k\pi$, $\psi = \frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n}$ für jedes ganze positive k. Bezeichnen wir nun nach einer von Cauchy vorgeschlagenen Bezeichnung, welche allgemeinere Aufnahme verdiente, den Inbegriff aller Werthe von $(\alpha + \beta i)^{\frac{m}{n}}$ durch $((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}}$, einen bestimmten Werth dagegen durch $(\alpha + \beta i)^{\frac{m}{n}}$, und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen; so ist

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left\{ \cos \frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n} + i \sin \frac{m\varphi \pm 2k\pi}{n} \right\}$$

$$= \varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi}{n} + i \sin \frac{m\varphi}{n} \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

oder auch, wenn wir

$$\varrho^{\frac{m}{n}} \left(\cos \frac{m\varphi}{n} + i \sin \frac{m\varphi}{n} \right) = \Phi$$

setzen:

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}} = \Phi \left(\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

für jedes ganze positive k.

25. Sei nun einmal $2k > n$, $= n + \delta = n + \alpha n + \delta' = (\alpha + 1) n + \delta'$, wo $\delta' < n$. Ist $\alpha + 1$ gerade; so muß auch δ' gerade seyn, und man kann setzen $2k = 2k'n + 2k''$, wo $2k'' < n$. Ist aber $\alpha + 1$ ungerade; so sey $\alpha + 1 = 2k' - 1$, $2k = (2k' - 1) n + \delta' = 2k'n - (n - \delta')$, also $n - \delta'$ eine gerade Zahl $= 2k''$, und natürlich auch $< n$. Also hat man $2k = 2k'n \pm 2k''$, wo $2k'' < n$. Folglich auch

$$2k\pi = 2k'n\pi \pm 2k''\pi,$$

$$\frac{2k\pi}{n} = 2k'\pi \pm \frac{2k''\pi}{n},$$

$$\cos \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2k''\pi}{n}, \ \sin \frac{2k\pi}{n} = \pm \sin \frac{2k''\pi}{n};$$

$$\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2k''\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k''\pi}{n},$$

unter der Voraussetzung, daß die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen, wenn $2k = 2k'n + 2k''$, daß sich aber die obern auf die untern beziehen, wenn $2k = 2k'n - 2k''$ ist. Allgemein aber ergiebt sich hieraus, daß für $2k > n$ oder $k > \frac{1}{2} n$ die Werthe von $((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}}$ wiederkehren. Also braucht man nur zu setzen:

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}} = \Phi \left(\cos \frac{2k\pi}{n} \pm i \sin \frac{2k\pi}{n} \right),$$

so daß $2k \overline{\overline{<}} n$, $k \overline{\overline{<}} \frac{1}{2} n$.

Ist n eine gerade Zahl $= 2\nu$; so ist der größte Werth von $k = \nu$. Für $k = o$ und $k = \nu$ reduciren sich die durch $\pm$ angedeuteten vier Werthe auf die zwei Werthe Φ und $-\Phi$, so daß also die Anzahl aller Werthe $= 2(\nu - 1) + 2 = 2\nu = n$ ist, wie es nach der Theorie der Gleichungen auch seyn muß. Ist n ungerade $= 2\nu + 1$, so ist der höchste Werth von $2k = 2\nu$, $k = \nu$. Die letzten beiden Werthe sind:

$$\Phi\left(\cos\frac{2\nu\pi}{2\nu+1} \pm i\sin\frac{2\nu\pi}{2\nu+1}\right);$$

für $k = o$ reduciren sich aber wieder beide Werthe auf den einen Werth Φ. Die Anzahl aller Werthe ist also $= 2\nu + 1 = n$, wie es seyn muß.

26. Wenn $\beta = o$, $\alpha + \beta i$ also $= \alpha$, eine reelle Größe ist; so sind zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem α positiv oder negativ ist, indem man nämlich in (6.) $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ immer positiv nimmt. Ist also α positiv; so hat man $\varrho = \alpha$, $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = o$, $\varphi = o$, $\cos\frac{m\varphi}{n} = 1$, $\sin\frac{m\varphi}{n} = o$, $\Phi = (\alpha)^{\frac{m}{n}}$. Folglich

$$((\alpha))^{\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}}.\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

wo $\alpha^{\frac{m}{n}}$ eine reelle Größe ist, und $k \overline{\gtrless} \frac{1}{2}n$ genommen wird. Folglich auch unter derselben Bedingung:

$$((+1))^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Ist aber α negativ; so erhält man, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ immer positiv nehmend, $\varrho = -\alpha$, $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = o$, $\varphi = \pi$. Folglich

$$\Phi = (-\alpha)^{\frac{m}{n}}\cdot\left(\cos\frac{m\pi}{n} + i\sin\frac{m\pi}{n}\right).$$

Also für $m = 1$:

$$((\alpha))^{\frac{1}{n}} =$$

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{(2k\pm1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k\pm1)\pi}{n}\right),$$

nach (2.), da man

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{\pm 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pm 2k\pi}{n}$$

setzen kann. Die obern und untern Zeichen beziehen sich auf einander. Nach dem Obigen ist $k \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}n$, $2k \overline{\overline{<}} n$ zu nehmen. Also hat man folgende Werthe von $((\alpha))^{\frac{1}{n}}$:

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{-\pi}{n} - i\sin\frac{-\pi}{n}\right)$$

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{\pi}{n} \pm i\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

. . . .

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$$

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right),$$

wo $2k \overline{\overline{<}} n$. Nach (25.) sind die folgenden Werthe bloß wiederkehrend. Der erste Werth ist mit beizufügen, da im Obigen auch $2k = o$ gesetzt werden kann. Es ist aber

$$\cos\frac{-\pi}{n} - i\sin\frac{-\pi}{n} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n},$$

so daß also der erste Werth auch wiederkehrt. Ist n eine ungerade, also $n+1$ eine gerade Zahl; so ist $2k+1 = n$ zu setzen, und der letzte Werth wird $= -(-\alpha)^{\frac{1}{n}}$, die Anzahl aller Werthe offenbar $= 2k+1 = n$, wie es seyn muß. Ist aber n gerade, also $n+1$ ungerade, so muß man nach dem Obigen $2k+1 = n+1$ setzen. Dann wird der letzte Werth =

$$(-\alpha)^{\frac{1}{n}}.\left(\cos\frac{(n+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(n+1)\pi}{n}\right)$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right) - i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$= (-\alpha)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{n} - i\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)$$

welcher also schon unter den ersteren enthalten. Also hat man nur $2k + 1 = n - 1$ zu setzen. Die Anzahl aller Werthe ist in diesem Falle $= 2(k + 1) = 2k + 1 + 1 = n$, wie es seyn muß.

Für ein negatives α ist also:

$$((\alpha))^{\frac{1}{n}} = (-\alpha)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right),$$

für $2k + 1 \overline{\overline{<}}\, n$, $2k \overline{\overline{<}}\, n - 1$, $k \overline{\overline{<}}\, \frac{1}{2}(n-1)$, wie aus dem Bisherigen leicht folgt. Also (3.):

$$((\alpha))^{\frac{m}{n}} = (-\alpha)^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)m\pi}{n}\right).$$

Folglich auch

$$((-1))^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{(2k+1)m\pi}{n} \pm i\sin\frac{(2k+1)m\pi}{n}$$

für $\overline{\overline{<}}\, \frac{1}{2}(n-1)$.

M. v. Cotesischer Lehrsatz und Anwendung der Geometrie auf die Algebra. VI. VII.

27. Nach (9.) ist, wenn die natürlichen Logarithmen bloß durch l bezeichnet werden:

$$l((\alpha + \beta i)) =$$

$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2 + \beta^2) + i\,\mathrm{Arc\,cos}\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}l(\alpha^2 + \beta^2) + i\,\mathrm{Arc\,sin}\left(\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\right);$$

wo $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ immer positiv genommen wird, so daß die Zeichen des Cosinus und Sinus von α und β abhängen. Auch ist

$$\mathrm{tang\,Arc\,cos}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Sind nun die bestimmten Werthe der Bogen (welche also nach Cauchy's Bezeichnung nicht mit doppelten Parenthesen behaftet sind) immer dem absoluten Werth nach die möglichst kleinsten; so ist, da für ein positives α der Cosinus positiv ist, und die Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ einerlei Zeichen mit dem Sinus hat, wenn α positiv ist:

$$\mathrm{Arc\,cos}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \mathrm{Arc\,tang}\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ist aber α, folglich auch der Cosinus negativ; so hat die Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ das entgegengesetzte Zeichen des Sinus, und es ist folglich

$$\text{Arc}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \pi + \text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha},$$

wenn, wie gesagt, hier immer die möglichst kleinsten Werthe der Bogen genommen werden. Aber

$$\text{Arc}\cos\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)\right) = \text{Arc}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \pm 2k\pi.$$

Also, wenn α positiv ist:

$$l((\alpha+\beta i)) =$$
$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha} \pm 2k\pi i;$$

und, wenn α negativ ist:

$$l((\alpha+\beta i)) =$$
$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha} \pm (2k\pm 1)\pi i;$$

oder, da sowohl $2k+1$, als auch $2k-1$ irgend eine ungerade Zahl bezeichnet:

$$l((\alpha+\beta i)) =$$
$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha} \pm (2k+1)\pi i.$$

Für $\beta = 0$ also, wenn α positiv:

$$l((\alpha)) = l\alpha \pm 2k\pi i.$$

Ist α negativ; so ist doch α^2 positiv, $= (-\alpha)^2$. Folglich

$$\tfrac{1}{2}l\alpha^2 = \tfrac{1}{2}l(-\alpha)^2 = l(-\alpha),$$

wo nun $-\alpha$ positiv. Also

$$l((\alpha)) = l(-\alpha) \pm (2k+1)\pi i.$$

Jeder Logarithmus hat also unendlich viele Werthe, die für imaginäre und negative Größen alle, für positive Größen dagegen alle bis auf einen, welchen man erhält, wenn man $2k = 0$ setzt, unmöglich sind. Nach (17.) kann man diese Formeln auch so darstellen. Wenn α positiv:

$$l((\alpha+\beta i)) =$$
$$\tfrac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2) + i\,\text{Arc tang}\frac{\beta}{\alpha} + l((+1)),\quad l((\alpha)) = l\alpha + l((+1));$$

wenn α negativ:

$$l((\alpha + \beta i)) =$$
$$\tfrac{1}{2} l((\alpha^2 + \beta^2)) + i \operatorname{Arc tang} \frac{\beta}{\alpha} + l((-1)),\ l((\alpha)) = l(-\alpha) + l((-1)).$$

Andere Logarithmen als natürliche erhält man, wenn man mit dem Modul multiplicirt.

28. Für $\alpha = 0$ und $\beta = 1$, erhält man, da $\operatorname{Arc tang} \frac{1}{0} = \frac{1}{2}\pi$ ist:

$$l((i)) = \tfrac{1}{2}\pi i \pm 2k\pi i = \frac{(1 \pm 4k)\pi i}{2},$$

und für $k = 0$ z. B.

$$li = \frac{\pi i}{2},\ \pi = \frac{2li}{i},$$

eine nach Montucla (III. p. 285.) von Joh. Bernoulli gefundene Formel.

29. Aus unsern allgemeinen Ausdrücken (27.) lassen sich auch einige vom Grafen Jules Charles de Fagnano und seinem Sohne Jean François de Fagnano im Journal de litterature helvetique (Montucla a. a. O.) gegebene imaginäre Ausdrücke für π ableiten, wobei wir immer $k = 0$ setzen wollen. Für $\alpha = 1$ und $\beta = -1$, und $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ist $\operatorname{Arc tang} \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{4}\pi$, und $= +\frac{1}{4}\pi$. Also

$$l(1-i) = \tfrac{1}{2} l2 - \tfrac{1}{4}\pi i,\ l(1+i) = \tfrac{1}{2} l2 + \tfrac{1}{4}\pi i;$$
$$l\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -\tfrac{1}{2}\pi i,\ il\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = l\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^i = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Folglich, wenn man im Zähler und Nenner mit $1 - i$ multiplicirt.

$$\tfrac{1}{2}\pi = il(-i).$$

30. Die Formel $\frac{1}{2}\pi = \frac{li}{i}$ (28.) giebt leicht:

$$\tfrac{1}{2}\pi = l\, i^{\frac{1}{i}} = l e^{\frac{1}{2}\pi},\ i^{\frac{1}{i}} = e^{\frac{1}{2}\pi};\ i^{\frac{1}{i}} = i^{\frac{i}{i^2}} = i^{-i} = e^{\frac{1}{2}\pi},\ i^{i} = e^{-\frac{1}{2}\pi}.$$

Also

$$i^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{\pi}{1.2} + \frac{\pi^2}{1.2.4} + \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \ldots$$
$$i^{i} = 1 - \frac{\pi}{1.2} + \frac{\pi^2}{1.2.4} - \frac{\pi^3}{1.2.3.8} + \ldots.$$

Hieraus findet man:

$$i^i = 0{,}207879\ldots,\quad i^{\frac{1}{i}} = 4{,}81049\ldots$$

31. Setzt man in den Formeln (11. 12.) $\alpha = 2k\pi \pm \frac{1}{2}\pi$, und $\alpha = k'\pi$; so erhält man, da im ersten Falle $\cos\alpha$, im andern $\sin\alpha = 0$ ist:

$$\sin(2k\pi \pm \tfrac{1}{2}\pi + \beta i) = \pm \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2},$$

$$\cos(k'\pi + \beta i) = \pm \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2},$$

$$2k\pi \pm \tfrac{1}{2}\pi + \beta i = \mathrm{Arc\,sin}\left(\left(\pm \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\right)\right),$$

$$k'\pi + \beta i = \mathrm{Arc\,cos}\left(\left(\pm \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\right)\right),$$

so daß es also scheint, als könnten reelle Sinus und Cosinus imaginäre Bogen haben. Es ist aber

$$\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} = \frac{1 + e^{2\beta}}{2e^\beta} = \frac{1 + e^{-2\beta}}{2e^{-\beta}},$$

also immer $= \frac{1 + e^{2\gamma}}{2e^\gamma}$. Da nun $(a-1)^2 = a^2 + 1 - 2a$, also immer positiv, d. i. $1 + a^2$ immer $> 2a$ ist; so ist obiger Bruch immer > 1. Also können die obigen, scheinbar reellen, Sinus und Cosinus im Kreise nicht existiren.

Verbindung der Lehre von den unmöglichen Größen mit der Theorie der Gleichungen.

32. Die Theorie der Gleichungen beruht ganz auf dem Satze, daß es für jede Gleichung immer wenigstens eine reelle oder imaginäre Wurzel gebe, welches von Kästner (Anal. endl. Größen. 210.) noch als Grundsatz angenommen wird. Die neuern Mathematiker haben sich aber bemüht, genügende Beweise dieses Satzes zu finden, und ich werde daher hier den mit der Lehre von den unmöglichen Größen in unmittelbarer Verbindung stehen-

den Beweis nach Cauchy (Cours d'Analyse. P. I. p. 331.) mittheilen.

33. Der zu beweisende Satz ist folgender:

Wenn n eine positive ganze Zahl ist, und a_0, a_1, a_2, ... a_n beliebige reelle oder imaginäre Größen bezeichnen; so giebt es immer eine reelle oder imaginäre Wurzel der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Man bezeichne dieser Gleichung ersten Theil durch ψx; so wird, da auch jede reelle Größe unter der Form $u + vi$ enthalten ist, der Beweis darauf ankommen, daß man zeigt, daß es reelle Werthe von u, v giebt, für welche, $x = u + vi$ gesetzt, $\psi x = 0$ wird. Wird $x = u + vi$ in unsere Gleichung gesetzt; so wird sie sich (8. 7.) auf die Form:

$$f(u, v) + i . f'(u, v) = 0$$

bringen lassen, so daß also u, v so zu bestimmen sind (5ª.), daß zu gleicher Zeit

$$f(u, v) = 0, \; f'(u, v) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind aber offenbar erfüllt, wenn u, v so bestimmt werden, daß

$$\{f(u, v)\}^2 + \{f'(u, v)\}^2 = 0$$

ist. Daß nun diese Bestimmung von u, v immer möglich ist, läßt sich, den ersten Theil letzterer Gleichung durch F (u, v) bezeichnend, so zeigen.

Man setze, welches immer möglich ist (6.):

$$a_0 = \varrho_0 (\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0) = \varrho_0 \Phi_0,$$
$$a_1 = \varrho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) = \varrho_1 \Phi_1,$$
$$a_2 = \varrho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) = \varrho_2 \Phi_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = \varrho_n (\cos\varphi_n + i \sin\varphi_n) = \varrho_n \Phi_n$$
$$u + vi = r(\cos t + i \sin t);$$

so wird $\psi(u + vi) =$

$$\varrho_0 \Phi_0 . r^n (\cos t + i \sin t)^n$$
$$+ \varrho_1 \Phi_1 . r^{n-1} (\cos t + i \sin t)^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \varrho_{n-1} \Phi_{n-1} . r (\cos t + i \sin t)$$
$$+ \varrho_n \Phi_n$$

$$= \quad \varrho_0 \Phi_0 . r^n \{\cos nt + i \sin nt\}$$
$$+ \varrho_1 \Phi_1 . r^{n-1} \{\cos(n-1)t + i \sin(n-1)t\}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \varrho_{n-1} \Phi_{n-1} . r \{\cos t + i \sin t\}$$
$$+ \varrho_n \Phi_n \; (3.)$$
$$= \quad \varrho_0 r^n \{\cos(nt + \varphi_0) + i \sin(nt + \varphi_0)\}$$
$$+ \varrho_1 r^{n-1} \{\cos((n-1)t + \varphi_1) + i \sin((n-1)t + \varphi_1)\}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \varrho_{n-1} r \{\cos(t + \varphi_{n-1}) + i \sin(t + \varphi_{n-1})\}$$
$$+ \varrho_n \{\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n\} \; (2.)$$
$$= f(u, v) + i f'(u, v),$$

wo also $f(u, v) =$

$$\varrho_0 r^n \cos(nt + \varphi_0) + \varrho_1 r^{n-1} \cos((n-1)t + \varphi_1)$$
$$+ \ldots + \varrho_{n-1} r \cos(t + \varphi_{n-1}) + \varrho_n \cos \varphi_n$$
$$f'(u, v) =$$
$$\varrho_0 r^n \sin(nt + \varphi_0) + \varrho_1 r^{n-1} \sin((n-1)t + \varphi_1)$$
$$+ \ldots + \varrho_{n-1} r \sin(t + \varphi_{n-1}) + \varrho_n \sin \varphi_n \, .$$

Entwickelt man nun die Quadrate dieser beiden Größen; so erhält man leicht:

$$F(u, v) = \{f(u, v)\}^2 + \{f'(u, v)\}^2 =$$
$$r^{2n} . \left\{ \begin{array}{l} \varrho_0^2 + \dfrac{2\varrho_0 \varrho_1 \cos(t + \varphi_0 - \varphi_1)}{r} \\ \quad + \dfrac{\varrho_1^2 + 2\varrho_0 \varrho_2 \cos(2t + \varphi_0 - \varphi_2)}{r^2} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} .$$

Nach (6.) ist $r^2 = u^2 + v^2$, also $r^{2n} = (u^2 + v^2)^n$, eben so wie $F(u, v)$, welches die Summe zweier Quadrate ist, immer positiv. Demnach ist auch der zweite Factor von $F(u, v)$, immer positiv. Läßt man u und v wachsen, so wird auch r fortwährend wachsen, und kann größer als jede gegebene Größe werden. Der zweite Factor nähert sich dann immer mehr und mehr der Größe ϱ_0^2, und kann derselben beliebig nahe gebracht werden, da offenbar alle einzelnen Brüche durch Vergrößerung von r, d. i. von u und v, (also auch ihre Summe, da die Brüche in endlicher Anzahl vorhanden) kleiner gemacht werden können als jede gegebene Größe, immer in Bezug auf die absoluten Werthe, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen. Man hat hierbei zu bemerken, daß die Cosinus in den Zählern die Einheit nie übersteigen können. Da also der eine Factor

mit u, v in's Unendliche wächst, der andere aber sich immer einer bestimmten Gränze nähert; so wächst auch das Product F(u, v) unendlich, wenn u, v, oder nur eines, unendlich wachsen, und behält nur dann einen endlichen Werth, wenn u, v beide einen endlichen Werth behalten. Ferner ist F(u, v) offenbar eine ganze reelle Function von u, v, und wird sich daher offenbar stetig ändern, wenn u, v sich stetig ändern, so daß man sie sich als eine zusammenhängende krumme Linie dargestellt denken kann. Auch ist F(u, v) immer positiv, und muß sich daher offenbar, weil sie nie < 0 werden kann, im Abnehmen einer bestimmten Gränze nähern, welche sie nie überschreitet. Sey A diese Gränze, und u_0, v_0 zwei Werthe von u, v, für welche F(u, v) diese Gränze wirklich erreicht, so daß also

$$F(u_0, v_0) = A.$$

Nach dem Vorhergehenden ist für jede zwei andere Werthe $u_0 + \alpha h$, $v_0 + \alpha k$ von u, v immer

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) > F(u_0, v_0)$$

oder die Differenz

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) - F(u_0, v_0)$$

eine positive Größe, wie klein man auch α nehmen mag. In der Function $\psi(u + vi)$ gebe man jetzt den Größen u, v die Werthe $u_0 + \alpha h$, $v_0 + \alpha k$, so daß also

$$u + vi = u_0 + v_0 i + \alpha(h + ki).$$

Mittelst des binomischen Lehrsatzes kann man offenbar $\psi(u + vi)$ nach Potenzen von $\alpha(h + ki)$ entwickeln, so daß die Reihe mit $\alpha^0(h + ki)^0$ anfängt, und mit $\alpha^n(h + ki)^n$ endigt. Die Coefficienten der einzelnen Glieder, auf die gewöhnliche Form gebracht, seyen:

$$r_1(\cos t_1 + i \sin t_1) = r_1 T_1,$$
$$r_2(\cos t_2 + i \sin t_2) = r_2 T_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n+1}(\cos t_{n+1} + i \sin t_{n+1}) = r_{n+1} T_{n+1},$$

und $h + ki$ sey $= \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$; so ist

$$\psi(u_0 + v_0 i + \alpha(h + ki)) =$$
$$r_1 T_1 + r_2 T_2 \cdot \alpha\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$+ r_3 T_3 \cdot \alpha^2 \varrho^2 (\cos\varphi + i \sin\varphi)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ r_{n+1} T_{n+1} \cdot \alpha^n \varrho^n (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

$$\begin{aligned}
= \; & r_1 \{\cos t_1 && + i \sin t_1\} \\
& + \alpha r_2 \varrho \{\cos(t_2+\varphi) && + i \sin(t_2+\varphi)\} \\
& + \alpha^2 r_3 \varrho^2 \{\cos(t_3+2\varphi) && + i \sin(t_3+2\varphi)\} \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& + \alpha^n r_{n+1} \varrho^n \{\cos(t_{n+1}+n\varphi) && + i \sin(t_{n+1}+n\varphi)\}
\end{aligned}$$

nach (2. 3.). Also

$$\psi(u_0+v_0 i+\alpha(h+ki)) = T + T'i,$$

wo die Werthe von T, T' in den beiden obigen Vertikalreihen enthalten. Aber

$$\psi(u_0+v_0 i+\alpha(h+ki)) = \psi(u_0+\alpha h+(v_0+\alpha k)i)$$
$$= f(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k) + i f'(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k).$$

Folglich (5ª.):

$$f(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k) = T,$$
$$f'(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k) = T'.$$

Also

$$F(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k) =$$
$$\{f(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k)\}^2 + \{f'(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k)\}^2$$
$$= T^2 + T'^2,$$

woraus für $\alpha = 0$:

$$F(u_0, v_0) = (r_1 \cos t_1)^2 + (r_1 \sin t_1)^2$$
$$= r_1^2(\cos t_1^2 + \sin t_1^2) = r_1^2,$$

d. i. $A = r_1^2$, $r_1 = \sqrt{A}$.

Setzen wir nun

$$T = r_1 \cos t_1 + U,\ T' = r_1 \sin t_1 + U';$$

so erhält man

$$F(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k) =$$
$$r_1^2 \cos t_1^2 + 2r_1 \cos t_1\, U + U^2 + r_1^2 \sin t_1^2 + 2r_1 \sin t_1\, U' + U'^2$$
$$= r_1^2 + 2r_1(\cos t_1\, U + \sin t_1\, U') + U^2 + U'^2.$$

Folglich, da $r_1^2 = A = F(u_0, v_0)$ ist, nach einigen leichten Entwickelungen:

$$F(u_0+\alpha h,\ v_0+\alpha k) - F(u_0, v_0)$$
$$= 2A^{\frac{1}{2}}\alpha\varrho \left\{ \begin{aligned} & r_2 \cos(t_2-t_1+\varphi) \\ & + \alpha\varrho r_3 \cos(t_3-t_1+2\varphi) \\ & \cdots\cdots \\ & + \alpha^{n-1}\varrho^{n-1} r_{n+1} \cos(t_{n+1}-t_1+n\varphi) \end{aligned} \right\}$$
$$+ \alpha^2\varrho^2 \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & r_2 \cos(t_2+\varphi) + \alpha\varrho r_3 \cos(t_3+2\varphi) + \ldots \\ & \ldots + \alpha^{n-1}\varrho^{n-1} r_{n+1} \cos(t_{n+1}+n\varphi) \end{aligned}\right]^2 \\ + & \left[\begin{aligned} & r_2 \sin(t_2+\varphi) + \alpha\varrho r_3 \sin(t_3+2\varphi) + \ldots \\ & \ldots + \alpha^{n-1}\varrho^{n-1} r_{n+1} \sin(t_{n+1}+n\varphi) \end{aligned}\right]^2 \end{aligned} \right\},$$

welches nach dem Obigen, so klein auch α genommen werden mag, doch nie negativ werden kann. Ist nun r_{m+1} das erste nicht verschwindende Glied in der Reihe r_1, r_2, r_3, ... r_{n+1}; so ist, wenn A nicht $= 0$ ist, das erste nicht verschwindende Glied in obiger Reihe:

$$2A^{\frac{1}{2}}\alpha^m \varrho^m r_{m+1} \cos(t_{m+1} - t_1 + m\varphi)$$

mit der niedrigsten Potenz von α. Ist aber $A = 0$; so ist das erste nicht verschwindende Glied:

$$\alpha^2 \varrho^2 \left\{ \left[\alpha^{m-1} \varrho^{m-1} r_{m+1} \cos(t_{m+1} + m\varphi)\right]^2 + \left[\alpha^{m-1} \varrho^{m-1} r_{m+1} \sin(t_{m+1} + m\varphi)\right]^2 \right\}$$
$$= \alpha^{2m} \varrho^{2m} . (r_{m+1})^2 .$$

Hat man nun irgend eine Reihe mit einer endlichen Anzahl von Gliedern

$$A\alpha^a + B\alpha^b + C\alpha^c + \ldots + N\alpha^n,$$

wo a, b, c, ... n wachsende positive ganze Zahlen sind; so kann man immer α so klein nehmen, daß in Bezug auf die absoluten Werthe:

$$A\alpha^a > B\alpha^b + C\alpha^c + \ldots + N\alpha^n .$$

Denn sey F der größte Coefficient der gegebenen Reihe; so setze man zunächst für α einen ächten Bruch. Dann ist

$$F\alpha^{b-a} \overset{=}{>} B\alpha^{b-a} ,$$
$$F\alpha^{b-a} > C\alpha^{c-a} ,$$
$$\ldots\ldots$$
$$F\alpha^{b-a} > N\alpha^{n-a} ;$$

also, wenn die Anzahl der Glieder der gegebenen Reihe $= k$ ist:

$$kF\alpha^{b-a} > B\alpha^{b-a} + C\alpha^{c-a} + \ldots + N\alpha^{n-a} .$$

Erfüllt man nun, welches offenbar immer möglich ist, zugleich die beiden Bedingungen:

$$\alpha < 1, \ \alpha < \frac{A}{kF} ;$$

so ist $A > kF\alpha$, folglich auch immer $A > kF\alpha^{b-a}$. Also

$$A > B\alpha^{b-a} + C\alpha^{c-a} + \ldots + N\alpha^{n-a},$$
$$A\alpha^a > B\alpha^b + C\alpha^c + \ldots + N\alpha^n,$$

so daß also immer $A\alpha^a$ größer als das Aggregat aller folgenden Glieder gemacht werden kann, und folglich das Zeichen von

$$A\alpha^a + B\alpha^b + C\alpha^c + \ldots + N\alpha^n$$

nur von $A\alpha^a$ abhängt.

Also kann man in Bezug auf das Obige α immer so klein nehmen, daß das Zeichen von

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) - F(u_0, v_0);$$

wenn A nicht $= 0$ ist, nur von

$$2A^{\frac{1}{2}} \alpha^m \varrho^m r_{m+1} \cos(t_{m+1} - t_1 + m\varphi);$$

wenn $A = 0$ ist, nur von

$$\alpha^{2m} \varrho^{2m} . (r_{m+1})^2$$

abhängt. Da nun in der Gleichung

$$h + ki = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

h, k ganz willkührliche Größen sind; so kann offenbar auch der Bogen φ jeden Werth erhalten. Man erhält nämlich aus dieser Gleichung leicht:

$$\varrho^2 = h^2 + k^2, \ \operatorname{tang}\varphi = \frac{k}{h};$$

woraus umgekehrt:

$$h = \frac{\varrho}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}\varphi^2}}, \ k = \frac{\varrho \operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}\varphi^2}},$$

so daß man also ϱ, φ ganz willkührlich annehmen, und daraus h, k bestimmen kann. Folglich wird sich φ leicht so annehmen lassen, daß

$$\cos(t_{m+1} - t_1 + m\varphi);$$

also auch, unabhängig von α,

$$2A^{\frac{1}{2}} \alpha^m \varrho^m r_{m+1} \cos(t_{m+1} - t_1 + m\varphi);$$

und demnach, bei hinreichender Kleinheit von α,

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) - F(u_0, v_0)$$

negativ wird. Diese Differenz ist aber immer positiv, wie wir oben gesehen haben. Also kann auch

$$2A^{\frac{1}{2}} \alpha^m \varrho^m r_{m+1} \cos(t_{m+1} - t_1 + m\varphi)$$

nicht das Glied seyn, von welchem bei hinreichender Kleinheit von α ihr Zeichen abhängt. Dieses Glied würde aber durch vorstehende Formel ausgedrückt werden, wenn A nicht $= 0$

wäre. Also kann auch dies nicht statt finden, und A muß $= 0$ seyn, wie denn in der That das Glied

$$(\alpha^m \varrho^m . r_{m+1})^2,$$

von welchem bei hinreichender Kleinheit von α, wenn $A = 0$ ist, das Zeichen obiger Differenz abhängt, immer positiv ist. Also giebt es immer zwei Werthe u_0, v_0 von u, v, für welche $F(u, v) = 0$ wird, und folglich auch immer einen Werth $u_0 + v_0 i$ von x, für welchen $\psi x = 0$ wird, d. i. immer eine reelle oder imaginäre Wurzel der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 .$$

Wären r_1, r_2, r_3, ... r_{n+1} alle $= 0$; so wäre nach dem Obigen

$$\psi(u_0 + v_0 i + \alpha(h + ki)) = \psi(u_0 + \alpha h + (v_0 + \alpha k)i)$$

für jedes α, h, k, $= 0$; folglich $\psi(u + vi)$ für jedes u, v, $= 0$, d. i. es wäre ψx identisch $= 0$.

34. Wir wollen nun den Fall, wo alle Coefficienten der gegebenen Gleichung mögliche Größen sind, etwas näher betrachten. Zuerst erhellet leicht, daß, wenn $u_0 + v_0 i$ eine Wurzel der Gleichung ist, dann in diesem Falle auch immer $u_0 - v_0 i$ eine Wurzel seyn muß. Sey nämlich

$$u_0 + v_0 i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

so ist

$$u_0 = \varrho\cos\varphi, \quad v_0 = \varrho\sin\varphi;$$
$$u_0 - v_0 i = \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi) .$$

Da nun $u_0 + v_0 i$ eine Wurzel unserer Gleichung ist, so ist

$$\begin{aligned} 0 = \; & a_0 \varrho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ & + a_1 \varrho^{n-1}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1} \\ & \quad \ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n-1}\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ & + a_n \\ = \; & a_0 \varrho^n\{\cos n\varphi + i\sin n\varphi\} \\ & + a_1 \varrho^{n-1}\{\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi\} \\ & \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$+ a^{n-1}\varrho \{ \cos\varphi + i \sin\varphi \}$$
$$+ a_n$$
$$= \Phi + \Phi' i \, .$$

Da alle Coefficienten, also auch Φ, Φ', reelle Größen sind; so ist

$$\Phi = 0, \; \Phi' = 0 \, .$$

Folglich auch $\Phi - \Phi' i = 0$, d. i.

$$0 = a_0 \varrho^n \{ \cos n\varphi - i \sin n\varphi \}$$
$$+ a_1 \varrho^{n-1} \{ \cos (n-1)\varphi - i \sin (n-1)\varphi \}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{n-1}\varrho \{ \cos\varphi - i \sin\varphi \}$$
$$+ a_n$$
$$= a_0 \varrho^n (\cos\varphi - i \sin\varphi)^n$$
$$+ a_1 \varrho^{n-1} (\cos\varphi - i \sin\varphi)^{n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{n-1}\varrho (\cos\varphi - i \sin\varphi)$$
$$+ a_n$$
$$= a_0 (u - vi)^n + a_1 (u - vi)^{n-1} + \ldots + a^{n-1}(u - vi) + a^n \, ;$$

also $u - vi$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung. Die imaginären Wurzeln sind folglich, wenn alle Coefficienten mögliche Größen sind, immer paarweise, also immer in gerader Anzahl vorhanden, und immer von der Form $u \pm vi$.

35. Es erhellet leicht, daß für jedes a:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2} a + \ldots + x a^{n-2} + a^{n-1}$$

eine ganze rationale Function des $(n-1)$ten Grades von x ist. Die Wurzel, welche es für die Gleichung $\psi x = 0$ wenigstens immer geben muß (33.), sey $u_0 + v_0 i$; so ist

$$\psi x = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n ,$$
$$0 = a_0 (u_0 + vi)^n + a_1 (u_0 + v_0 i)^{n-1} + \ldots + a^{n-1}(u_0 + v_0 i) a_n$$

woraus durch Subtraction, und beiderseitige Division durch $x - u_0 - v_0 i$:

$$\frac{\psi x}{x - u_0 - v_0 i} = \frac{a_0 \{ x^n - (u_0 + v_0 i)^n \}}{x - u_0 - v_0 i}$$
$$+ \frac{a_1 \{ x^{n-1} - (u_0 + v_0 i)^{n-1} \}}{x - u_0 - v_0 i} + \ldots + \frac{a_{n-1} \{ x - (u_0 + v_0 i) \}}{x - u_0 - v_0 i} \, .$$

Also ist dieser Quotient offenbar eine ganze rationale Function des (n—1)ten Gliedes von x, und folglich, wenn $\psi_1 x$ eine solche Function von x bedeutet:

$$\psi x = (x - u_0 - v_0 i)\psi_1 x.$$

Da es nun auch für $\psi_1 x = 0$ wenigstens eine Wurzel $u_1 + v_1 i$ geben muß; so erhält man hieraus durch mehrfache Anwendung des so eben Bewiesenen leicht:

$$\psi x = (x - u_0 - v_0 i)\psi_1 x$$
$$\psi_1 x = (x - u_1 - v_1 i)\psi_2 x$$
$$\psi_2 x = (x - u_2 - v_2 i)\psi_3 x$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_{n-1} x = (x - u_{n-1} - v_{n-1} i)\psi_n x,$$

wo $\psi_n x$ eine Function des oten Grades, d. i. eine constante Größe = C, ist. Also

$$\psi x = C(x - u_0 - v_0 i)(x - u_1 - v_1 i)\ldots(x - u_{n-1} i - v_{n-1} i),$$

so daß sich also jede ganze rationale Function des nten Grades in n Factoren von der Form x — u — vi zerlegen läßt. Die ersten Glieder auf der linken und rechten Seite sind $a_0 x^n$ und Cx^n. Da nun offenbar beide Entwickelungen identisch seyn müssen; so ist

$$\psi x = a_0(x - u_0 - v_0 i)(x - u_1 - v_1 i)\ldots(x - u_{n-1} - v_{n-1} i).$$

36. Diese Zerlegung in Factoren ist nur auf eine einzige Art möglich. Wäre nämlich auch

$$\psi x = a_0(x - y_0 - z_0 i)(x - y_1 - z_1 i)\ldots(x - y_{n-1} - z_{n-1} i);$$

so wäre

$$(x - u_0 - v_0 i)(x - u_1 - v_1 i)\ldots(x - u_{n-1} - v_{n-1} i)$$
$$= (x - y_0 - z_0 i)(x - y_1 - z_1 i)\ldots(x - y_{n-1} - z_{n-1} i).$$

Das erste Product wird = o für $x = u_0 + v_0 i$. Für denselben Werth von x muß also auch das zweite Product, folglich für diesen Werth von x einer seiner Factoren = o werden. Sey z. B. $x - y_0 - z_0 i$ dieser Factor; so ist also

$$u_0 + v_0 i - y_0 - z_0 i = 0,$$
$$u_0 + v_0 i = y_0 + z_0 i,$$
$$x - u_0 - v_0 i = x - y_0 - z_0 i.$$

Folglich durch Division:

$$(x - u_1 - v_1 i)\ldots(x - u_{n-1} - v_{n-1} i)$$
$$= (x - y_1 - z_1 i)\ldots(x - y^{n-1} - z_{n-1} i),$$

woraus durch ähnliche Schlüsse nach und nach die Gleichheit aller Factoren abgeleitet wird.

37. Da das Product

$$(x-u_0-v_0 i)(x-u_1-v_1 i)\ldots(x-u_{n-1}-v_{n-1}i)$$

$=0$ wird, wenn man dem x einen der Werthe

$$u_0+v_0 i,\ u_1+v_1 i,\ \ldots,\ u_{n-1}+v_{n-1}i$$

beilegt; so sind alle diese Größen Wurzeln der Gleichung $\psi x=0$. Also hat jede Gleichung des $n$ten Grades n Wurzeln, unter denen indeß auch vielleicht einige gleiche vorkommen können. Mehr als n Wurzeln kann aber keine Gleichung des $n$ten Grads haben, weil sonst die Zerlegung der Function ψx in n Factoren von der Form $x-u-vi$ auf mehr als eine Art möglich seyn müßte (35.), welches nach (36.) unstatthaft ist.

38. Sind alle Coefficienten der Gleichung $\psi x=0$ mögliche Größen; so sind die imaginären Wurzeln, wenn es deren giebt, immer paarweise, wie $u_0 \pm v_0 i$ (34.), also auch die imaginären Factoren von ψx immer paarweise, wie

$$x-u_0 \mp v_0 i$$

vorhanden. Setzen wir nun

$$u_0 \pm v_0 i = \varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi);$$

so ist $(x-u_0-v_0 i)(x-u_0+v_0 i)$

$$= (x-\varrho\cos\varphi-\varrho i\sin\varphi)(x-\varrho\cos\varphi+\varrho i\sin\varphi)$$
$$= (x-\varrho\cos\varphi)^2-\varrho^2 i^2\sin\varphi^2$$
$$= x^2-2x\varrho\cos\varphi+\varrho^2\cos\varphi^2+\varrho^2\sin\varphi^2$$
$$= x^2-2x\varrho\cos\varphi+\varrho^2$$

eine reelle Function des zweiten Grades. Hieraus ergiebt sich der für die Algebra überaus wichtige Satz, daß jede ganze reelle Function irgend eines Grades immer in lauter reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades, welche letztere von der Form $x^2-2x\varrho\cos\varphi+\varrho^2$, oder $x^2-2xu_0+u_0{}^2+v_0{}^2$ sind, zerlegt werden kann. Schon in dem Art. Gleichung. (155. ff.) ist von diesem Satze gehandelt, aber auf eine sehr ungenügende Art. Der hier nach Cauchy geführte Beweis hängt zu eng mit der Theorie der imaginären Größe zusammen, als daß er an einem andern Orte hätte vorgetragen werden können. In den Zusätzen zu diesem Werke werde ich bei dem Art.

Gleichung wieder auf ihn zurück kommen, vorzüglich auf die schönen von Gauß gegebenen Beweise, die dort ganz an ihrem Orte seyn werden. Mehrere literarische Notizen s. Gleichung. (163.)

39. Da die Anzahl der imaginären Wurzeln immer gerade ist; so kann eine Gleichung eines geraden Grades nur eine gerade, eine Gleichung eines ungeraden Grades nur eine ungerade Anzahl reeller Wurzeln haben, eine quadratische Gleichung z. B. zwei oder keine, eine cubische drei oder eine. Also hat auch eine Gleichung eines ungeraden Grades immer wenigstens eine mögliche Wurzel. Sind bei einer Gleichung eines geraden Grades alle Wurzeln imaginär; so muß das letzte Glied, welches in diesem Falle nach (35.) offenbar das Product der Wurzeln ist, nothwendig positiv seyn, weil immer zwei Wurzeln von der Form $u_0 \pm v_0 i$ vorkommen, deren Product $= u_0{}^2 + v_0{}^2$, also jederzeit positiv ist. Ist also bei einer Gleichung eines geraden Grades das letzte Glied negativ; so muß sie wenigstens eine reelle Wurzel haben. Mehr über die imaginären Wurzeln in den Zusätzen zum Art. Gleichung.

Anwendung der imaginären Größen bei der Summirung der Reihen.

40. Cauchy handelt im 9ten Kap. seines angeführten Werkes sehr ausführlich von den imaginären Reihen. Um eine Anwendung der unmöglichen Größen in der Analysis zu zeigen, theilen wir hier daraus einen eleganten Beweis der Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ mit, da im Art. Cyclometrie diese Reihen nur durch die Integralrechnung gefunden worden sind.

41. Sey fx irgend eine imaginäre Function von x. Man soll ihre Form so bestimmen, daß sie zwischen jeden zwei reellen Gränzen continuirlich bleibt, und der allgemeinen Gleichung

$$f(x+y) = fx \cdot fy$$

genügt.

Für x = o erhält man:

$$fy = fo . fy, \; fo = 1,$$

so daß also fx = 1 für x = o. Da nun fx zwischen jeden zwei reellen Gränzen von x continuirlich bleiben soll, und diese Function für x = o den positiven Werth 1 erhält; so muß sie in der Nähe dieses Werthes, d. h. für ein sehr kleines α, zwischen den Gränzen x = o, x = α, immer positiv seyn. Sey nun allgemein

$$fx = \psi x + i\psi' x,$$

so wird für x = o:

$$1 = \psi o + i\psi' o, \; \psi o = 1, \; \psi' o = o.$$

Auch ist

$$f\alpha = \psi\alpha + i\psi'\alpha,$$

und, wenn man, welches bekanntlich immer möglich ist (6.):

$$f\alpha = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt:

$$\varrho\cos\varphi = \psi\alpha, \; \varrho\sin\varphi = \psi'\alpha \quad (5^a.);$$

$$\varrho = \sqrt{(\psi\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}, \; \varphi = \text{Arc tang}\,\frac{\psi'\alpha}{\psi\alpha}.$$

42. Man hat nun nach der Bedingung:

$$fx = fx,$$

$$f(x+x') = fx . fx',$$

$$f(x+x'+x'') = f(x+x') . fx'' = fx . fx' . fx'',$$

$$f(x+x'+x''+x''') = f(x+x'+x'') . fx''' = fx . fx' . fx'' . fx''',$$

u. s. w. u. s. w.

folglich für x = x' = x'' = ...

$$f(mx) = (fx)^m, \; f(m\alpha) = (f\alpha)^m$$

$$= \varrho^m(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \varrho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi),$$

für jedes ganze positive m.

Für x = x' = $\frac{1}{2}\alpha$ erhält man leicht:

$$(f(\tfrac{1}{2}\alpha))^2 = f\alpha = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin\tfrac{1}{2}\varphi) \quad (3.).$$

Mehrmalige Anwendung hiervon giebt:

$$f\alpha = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$f(\tfrac{1}{2}\alpha) = \varrho^{\frac{1}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}\varphi + i\sin\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$f(\tfrac{1}{4}\alpha) = \varrho^{\frac{1}{4}}(\cos\tfrac{1}{4}\varphi + i\sin\tfrac{1}{4}\varphi)$$

. . . .

$$f\left(\frac{1}{2^n}\alpha\right) = \varrho^{\frac{1}{2^n}}\left(\cos\frac{1}{2^n}\varphi + i\sin\frac{1}{2^n}\varphi\right).$$

Folglich nach dem Obigen, $\frac{1}{2^n}\alpha$ für α gesetzt:

$$f\left(\frac{m}{2^n}\alpha\right) = \varrho^{\frac{m}{2^n}}\left(\cos\frac{m}{2^n}\varphi + i\sin\frac{m}{2^n}\varphi\right).$$

Ist nun μ irgend eine positive Größe; so kann man offenbar m, n sich so ändern lassen, daß der Bruch $\frac{m}{2^n}$ sich der Größe μ unendlich nähert, diese also für jenen gesetzt werden kann, und folglich für jedes positive μ:

$$f(\mu\alpha) = \varrho^{\mu}(\cos\mu\varphi + i\sin\mu\varphi).$$

Da nun in (41.) für $x = \mu\alpha$, $y = -\mu\alpha$:

$$fo = 1 = f(\mu\alpha).f(-\mu\alpha) \text{ ist;}$$

so ist

$$f(-\mu\alpha) = (f(\mu\alpha))^{-1} = \varrho^{-\mu}(\cos(-\mu\varphi) + i\sin(-\mu\varphi))$$

also für jedes m:

$$f(m\alpha) = \varrho^{m}(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).$$

Für jedes reelle x also, wenn man $m = \frac{x}{\alpha}$ setzt:

$$fx = \varrho^{\frac{x}{\alpha}}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{\alpha}x\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{\alpha}x\right)\right).$$

Also für $\varrho^{\frac{1}{\alpha}} = a$, $\frac{\varphi}{\alpha} = b$:

$$fx = a^x(\cos bx + i\sin bx)$$

wo a, b willkührliche Constanten sind, und a positiv ist, da ϱ es immer ist.

Hat man nun die beiden Reihen:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots = X,$$

$$1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \ldots = Y;$$

so ist das allgemeine Glied von XY =

$$\frac{x^n}{1..n} + \frac{x^{n-1}}{1..(n-1)}\cdot\frac{y}{1} + \frac{x^{n-2}}{1..(n-2)}\cdot\frac{y^2}{1.2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x}{1}\cdot\frac{y^{n-1}}{1..(n-1)} + \frac{y^n}{1..n}$$
$$= \frac{1}{1..n}\left\{x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}y + .. + \frac{n}{1}xy^{n-1} + y^n\right\} = \frac{(x+y)^n}{1...n},$$

nach dem binomischen Lehrsatze. Die Exponentialreihen geben dasselbe Resultat. Also

$$XY = 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \dots$$

Setzt man ix, iy für x, y; so wird:

$$\left\{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \dots + i\left(x - \frac{x^3}{1...3} + \frac{x^5}{1..5} - \dots\right)\right\}$$

$$\times\left\{1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1..4} - \dots + i\left(y - \frac{y^3}{1...3} + \frac{y^5}{1..5} - \dots\right)\right\}$$

$$= 1 - \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^4}{1...4} - \dots$$

$$+ i\left\{x + y - \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \frac{(x+y)^5}{1...5} - \dots\right\}$$

so daß folglich unsere Reihen der Gleichung

$$fx \,.\, fy = f(x+y)$$

genügen. Also ist nach dem Obigen

$$X = a^x(\cos bx + i \sin bx)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1..6} + \dots$$

$$+ i\left\{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \frac{x^7}{1..7} + \dots\right\}$$

$$a^x \cos bx = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \dots$$

$$a^x \sin bx = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \dots \quad (5^a.)$$

Setzt man $-x$ für x; so wird

$$a^{-x} \cos(-bx) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \dots$$

d. i. $a^{-x} \cos(-bx) = a^x \cos bx$.

Aber $\cos(-bx) = \cos bx$. Also $a^{-x} = a^x$, $a^{2x} = 1$, $a = 1$, $a^x = 1$. Folglich

$$\cos bx = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \dots,$$

$$\sin bx = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \dots.$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{\sin bx}{x} = 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1...5} - \dots.$$

Also nähert sich, wenn x abnimmt, $\frac{\sin bx}{x}$ immer mehr der Einheit. Eben so nähert sich offenbar, wenn x ab=

nimmt, $\frac{\sin bx}{bx}$ immer mehr der Einheit, $\frac{\sin bx}{bx}.b$ also immer mehr der Gränze b. Da nun offenbar

$$\frac{\sin bx}{x} = \frac{\sin bx}{bx}.b\ ;$$

so würden diese beiden gleichen Größen für ein abnehmendes x, wenn b nicht = 1 wäre, sich verschiedenen Gränzen nähern, welches ungereimt ist. Also ist b = 1, und folglich

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1...5} - \ldots .$$

Dieser sinnreiche Beweis ist ein gutes Beispiel, wie man durch absichtliche Einführung imaginärer Größen oft zu wichtigen reellen Ausdrücken gelangt.

43. Mehr über die Anwendung der imaginären Größe zu sagen verbietet die Beschränktheit des Raumes. Das angeführte Werk von Cauchy gewährt viele und gründliche Belehrung. Den Gebrauch der imaginären Größen in der Analysis überhaupt und besonders in der Integralrechnung lehrt Euler in drei besondern Abhandlungen in den Nov. Act. Petrop. T. III. T. X. T. XII., so wie die bekannten Werke über die Integralrechnung. Besonders wichtig ist auch Cauchy Mémoire sur les integrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris. 1825. In Bezug auf die Anwendung der imaginären Größen bei Summirung der Reihen s. m. auch eine Abhandlung von Abel über die Binomialreihe in Crelle's Journal der reinen u. angew. Math. B. I. H. 4. S. 311.

Unmögliche Wurzeln aus der Einheit, s. Unmögliche Größen (26.), Cotesischer Lehrsatz, Anwendung der Geometrie auf die Algebra. VI. VII.

Unmögliche Wurzeln einer Gleichung, s. Gleichung (153. ff.), und Unmögliche Größen (32. ff.)

Unreine Gleichung, s. Gleichung (4.).

Unsichtbarer vielfacher Punkt (punctum multiplex invisibile), gleichbedeutend, besonders bei ältern Schriftstellern, mit conjugirter Punkt; s. diesen Artikel und vielfacher Punkt (5.).

Unterschied, s. Differenz.

Untheilbar, Methode des Untheilbaren, s. Cavaleri's Methode des Untheilbaren.

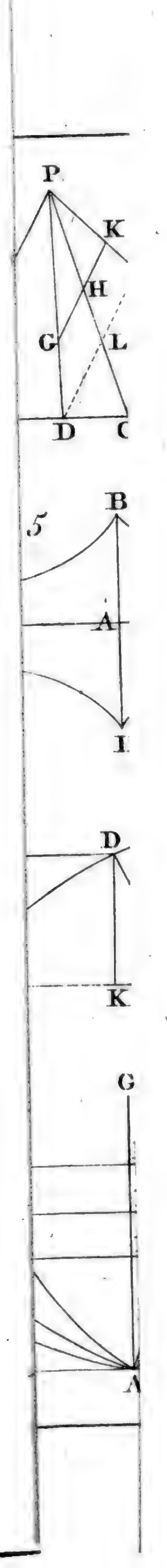
Unveränderliche Functionen (fonctions invariables) heißen zuweilen (z. B. in Francoeur Cours complet de Mathématiques pures. éd. 3. T. II. Paris. 1828. p. 114.) die Functionen, welche sonst gewöhnlicher symmetrische Functionen genannt werden; s. diesen Artikel.

Unveränderliche Größe, auch beständige Größe, ist eine solche, welche, während andere Größen ihre Werthe ändern, immer denselben Werth behält. Die unveränderlichen Größen werden durch die erstern lateinischen Buchstaben a, b, c, d, ..., die veränderlichen durch die letztern x, y, z, u, v, ... bezeichnet. In der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ des Kreises aus dem Mittelpunkte sind die Coordinaten x, y veränderliche Größen, der Radius r dagegen ist eine unveränderliche Größe, da sein Werth für alle Punkte des Kreises derselbe bleibt. Eben so ist bei der Parabel der Parameter eine unveränderliche, der Radius vector aber z. B. eine veränderliche Größe. Die Axen, die Excentricität, der Parameter der Ellipse und Hyperbel sind unveränderliche, die Radii vectores aber auch hier veränderliche Größen.

Unveränderlicher Punkt einer Curve ist ein Punkt, welcher seinen Ort nicht verändert, wie z. B. der Mittelpunkt des Kreises, die Brennpunkte der Kegelschnitte, u. s. f. Der Punkt dagegen, welcher eine Curve durch eine stetige Bewegung beschreibt, ist ein veränderlicher Punkt.

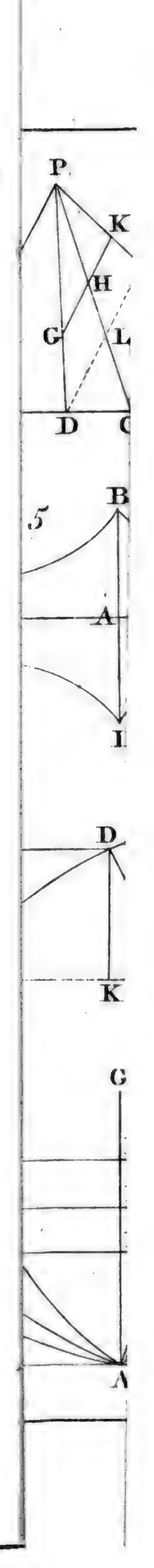
Unvollkommene Zahl, s. Vollkommene Zahl.

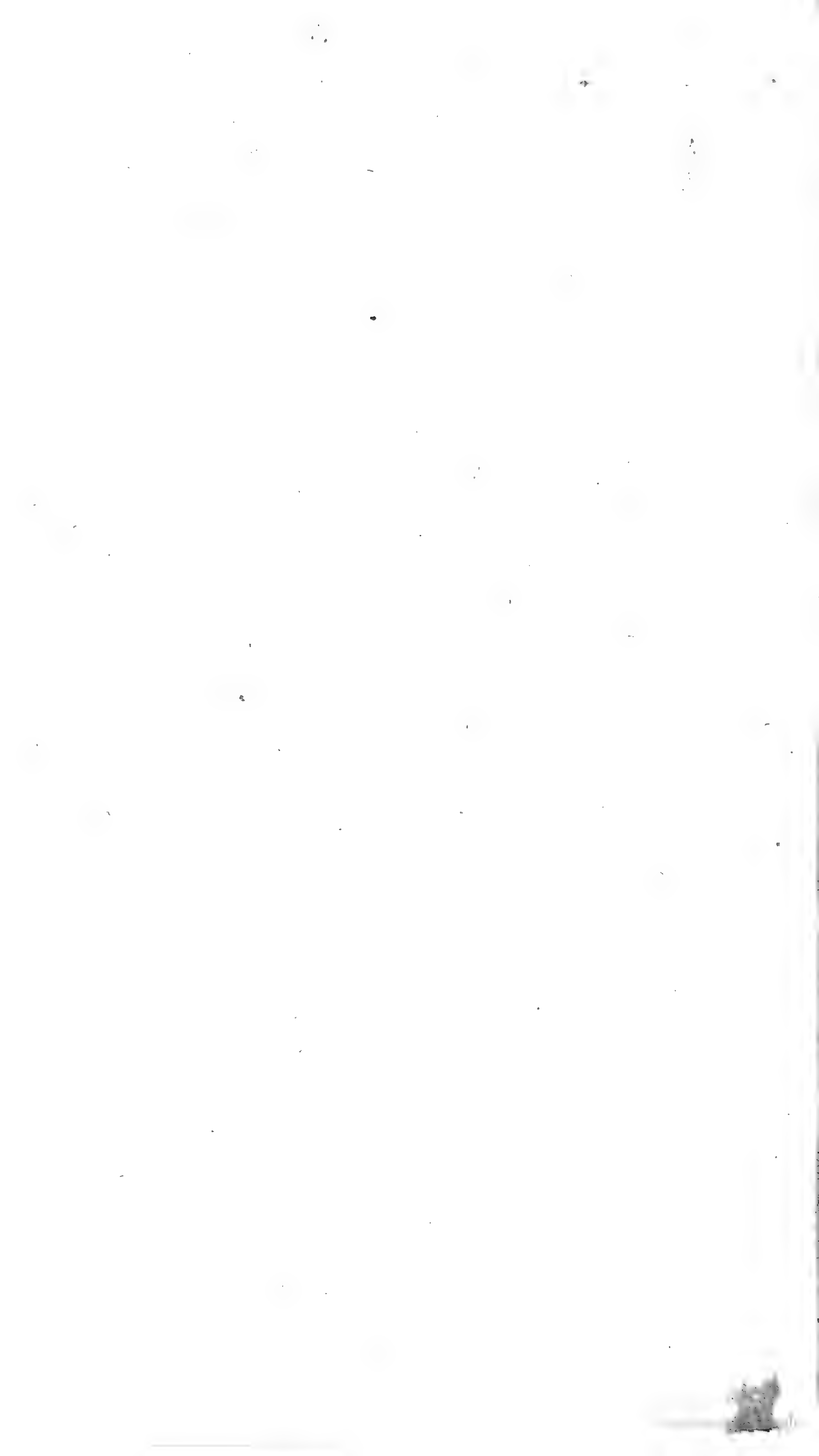
Digitized by Google

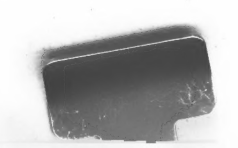


P
K
H
G
L
D
C
5
B
A
I
D
K
G
A

Digitized by Google

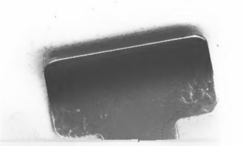

P
K
H
G
L
D
5
B
A
I
D
K
G
A



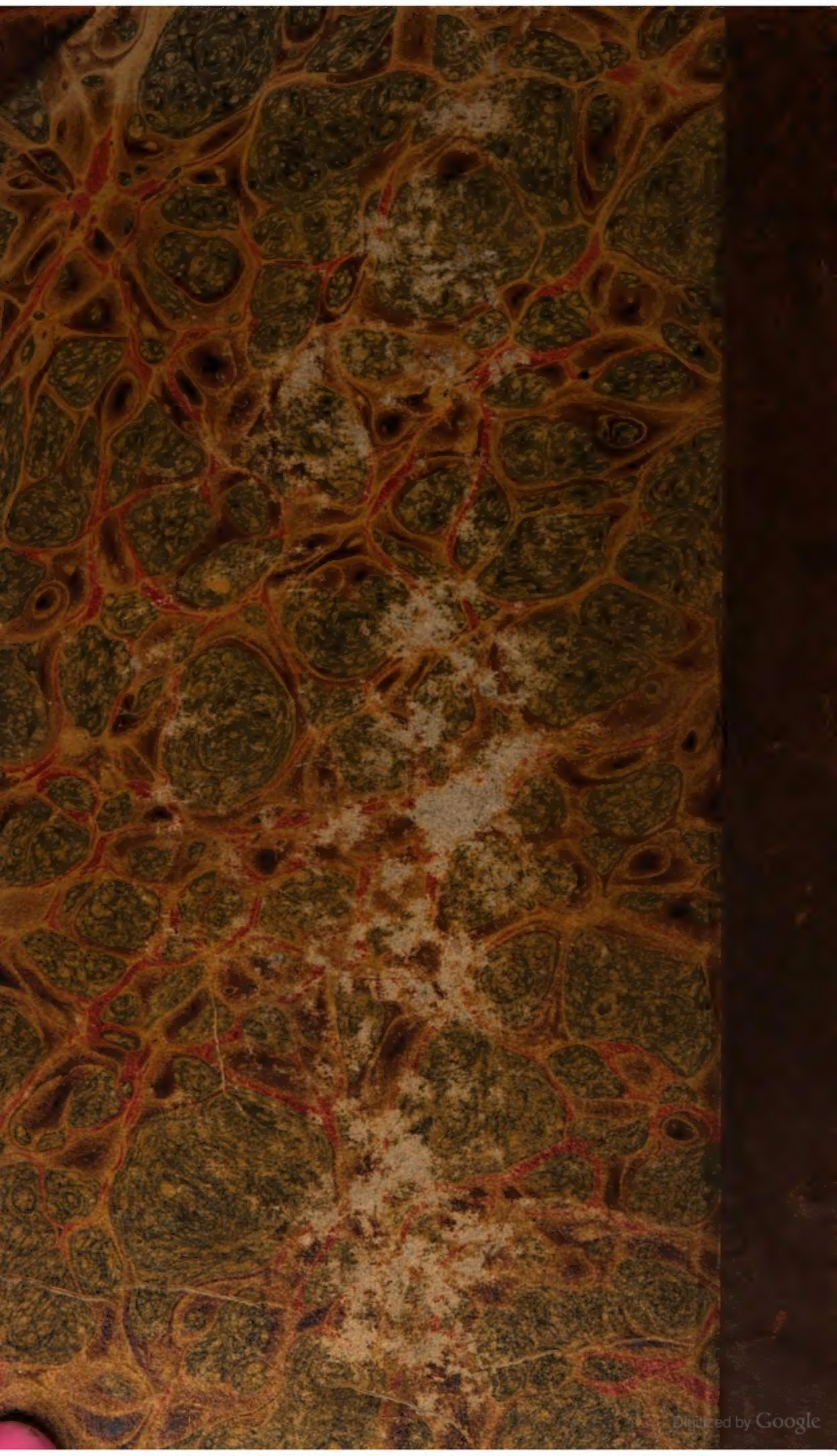


Digi[...] Googl[...] Schinner

Digitized by Google



Digitized by Google
Schinner


Digitized by Google